Легко показати, що $T(b(s_n)+K) \to T(K)$ для довільного $K \in \mathfrak{K}$, якщо $s_n \to 1$, $n \to \infty$, $s_n \in Q_+$. Враховуючи ортогональність $b(s_n)$ та H_A, за умови (*i*) переконуємось, що послідовність $b(s_n)$ обмежена. Припускаючи, що $b(s_n) \to b$, $n \to \infty$, доводимо, що $b = 0$ аналогічно до теореми 3. Тому $b(s)$ неперервна в точці $s = 1$, а згідно з (13) — у довільній точці $s \in Q_+$. Звідси $b(s) = v \ln s$ для деякого $v \perp H_A$. Твердження теореми дістаємо із співвідношень $s\Psi(K + v \ln s) = \Psi(K)$, $s > 0$, $K \in \mathfrak{K}_A$, $F_A + v \ln s = F_A$.

Достатність випливає з (12) при $b_n = v \ln n$.

Приклад 5. Нехай $A = (-\infty, \xi]$. Тоді ВЗМ A U-стійка відносно адитивного нормування, якщо ξ — max-стійка випадкова величина з розподілом типу III (див. [5]).

ВЗМ з прикладів 2, 3 є U-стійкими відносно адитивного нормування, якщо тільки

$$\lambda(u + vs) = e^{-s}\lambda(u), \quad u \in R^d, \quad s \in R \tag{14}$$

для деякого вектора $v \in R^d$.

ВЗМ A з прикладу 4 є U-стійкою відносно адитивного нормування, якщо функція f задовольняє (14).

Список використаної літератури

1. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. М., 1978. 318 с. 2. *Stoyan D., Kendall W. S., Mecke J.* Stochastic geometry and its applications. Berlin, 1987. 345 p. 3. *Молчанов И. С.* Одно обобщение теоремы Шоке для случайных множеств с заданным классом реализаций // Теория вероятностей и мат. статистика. 1983. Вып. 28. С. 86—97. 4. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М., 1986. 416 с. 5. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М., 1984. 304 с. 6. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М., 1966. 516 с. 7. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М., 1968. 394 с.

Надійшла до редколегії 11.07.90

Охарактеризованы сопровождающие функционалы, описывающие распределения устойчивых относительно объединений случайных замкнутых множеств. У этих множеств не предполагается отсутствие фиксированных точек. Приведены примеры устойчивых относительно объединений замкнутых множеств и соответствующих емкостей.

УДК 519.21

А. Я. ОЛЕНКО, асп., Київ. ун-т

ПРО БЛИЗЬКІСТЬ СПЕКТРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ОДНОРІДНИХ ІЗОТРОПНИХ ПОЛІВ

Встановлено зв'язок середньої імовірнісної метрики і метрики Леві — Прохорова для мір, які визначені на R^n. Отримані оцінки близькості в різних метриках спектральних функцій однорідних ізотропних полів, якщо їх кореляційні функції однакові на інтервалі.

Нехай P_1 і P_2 — імовірнісні міри на $\mathbb{R}^n$, а F_1 і F_2 — відповідні функції розподілу. Визначимо імовірнісні метрики $\varkappa_1(P_1, P_2)$ і $\pi(P_1, P_2)$ таким чином:

$$\varkappa_1(P_1, P_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F_1(x) - F_2(x)|\, dx,$$

$$\pi(P_1, P_2) = \inf\{\varepsilon : P_1(A) - P_2(A^\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

$$P_2(A) - P_1(A^\varepsilon) \leqslant \varepsilon,\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\},$$

де A^ε — ε-окіл множини A.

За теоремою 1.5.4 [1] при $n = 1$ для будь-яких P_1 і P_2 має місце нерівність $\pi^2(P_1, P_2) \leqslant \varkappa_1(P_1, P_2)$.

Виявляється, що у багатовимірному випадку вірний аналогічний результат.

Теорема 1. Якщо P_1, P_2-імовірнісні міри на $\mathbb{R}^n$, то

$$2^{n-1}\varkappa_1(P_1, P_2) \geqslant \pi^{n+1}(P_1, P_2).$$

Доведення. Позначимо через G клас таких функцій f із скінченним носієм, для яких похідні $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ існують майже скрізь і за абсолютною величиною не перевищують одиницю.

За аналогією до [1, с 57] для будь-якої функції $f \in G$

$$\varkappa_1(P_1, P_2) \geqslant \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d(F_1(x) - F_2(x)) \right|. \qquad (1)$$

Отже,

$$\varkappa_1(P_1, P_2) \geqslant \sup\left\{ \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d(F_1(x) - F_2(x)) \right|,\ f \in G \right\}.$$

Нехай n — парне. Розглянемо функцію

$$\tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x) = \sup\left(0,\ \frac{\varepsilon^n - \rho^n(x, \bar{0})}{2^{n-1}}\right).$$

При $\rho(x, \bar{0}) < \varepsilon$

$$\frac{\partial^n \tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = -\frac{\partial^n \rho^n(x, \bar{0})}{2^{n-1}\partial x_1 \dots \partial x_n} = -\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\partial^n \left(\sum\limits_1^n x_i^2\right)^{n/2}}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = 0.$$

Отже, легко переконатись, що $\tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x) \in G$.

При непарних n визначимо $\tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x)$ таким чином:

$$\tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x) = \sup\left(0,\ \frac{\varepsilon^n - \rho^{n-1}(x, \bar{0})}{2^{n-1}}\right)$$

(нас цікавить випадок $n \geqslant 1$). Подібно до попереднього

$$\frac{\partial^n \tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = 0$$

і тому $\tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x) \in G$.

Введемо тепер функцію

$$f_{\{\bar{0}\}}(x) = \min\left\{\frac{(\varepsilon-\delta)^n}{2^{n-1}},\ \tilde{f}_{\{\bar{0}\}}(x)\right\}, \qquad 0 < \delta < \varepsilon.$$

Аналогічно $f_{\{\bar{0}\}}(x)$ визначимо $f_{\{y\}}(x)$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо будь-яку множину $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Позначимо $A_r = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, 0) < r\}$. Для A_r існує скінченна δ-сітка: множина точок $\{x_k \in A_r;\ k = 1, \ldots, m_r\}$ таких, що $\forall x \in A_r : \min\limits_k \rho(x, x_k) < \delta$. Введемо функцію $f_{A_r}(x) = \sup\limits_k f_{\{x_k\}}(x)$. Очевидно, що $f_{A_r} \in G$. Крім того, $f_{A_r}(x) = \frac{(\varepsilon-\delta)^n}{2^{n-1}}$ для $x \in A_r$ і $f_{A_r}(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R}^n \setminus A_r^{\varepsilon}$.

Нехай $\pi(P_1, P_2) = \tilde{\varepsilon} > 0$ (якщо $\tilde{\varepsilon} = 0$, то твердження теореми очевидне). Тоді для будь-якого $\tilde{\varepsilon} - \tilde{\delta}$, $0 < \tilde{\delta} < \tilde{\varepsilon}$: $\exists A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$: $P_1(A) - P_2(A^{\tilde{\varepsilon}-\tilde{\delta}}) > \tilde{\varepsilon} - \tilde{\delta}$ (випадок $P_2(A) - P_1(A^{\tilde{\varepsilon}-\tilde{\delta}}) > \tilde{\varepsilon} - \tilde{\delta}$ розглядається аналогічно). Внаслідок неперервності міри існує $r > 0$ таке, що $P_1(A_r) - P_2(A_r^{\tilde{\varepsilon}-\tilde{\delta}}) > \tilde{\varepsilon} - \tilde{\delta}$.

Розглянемо $f_{A_r}(x)$ для $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, $\delta = \tilde{\delta}$. Скориставшись [1], отримуємо

$$\varkappa_1(P_1, P_2) \geqslant \frac{(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\delta})^{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Звідси і випливає твердження теореми.

Зауваження. Оцінка в теоремі в деякому розумінні найкраща. Нехай $n = 2$; міра P_1 кожної з точок (a, a) і $(-a, -a)$ дорівнює δ, а точки $(N, 0)$ — $(1-2\delta)$; міра P_2 кожної з точок $(a, -a)$ і $(-a, a)$ дорівнює δ, а точки $(N, 0)$ — $(1-2\delta)$.

Як легко помітити, при досить великому N $\varkappa_1(P_1, P_2) = 4\delta a^2$; $\pi(P_1, P_2) = 2\min(a, \delta)$. При $a = \delta$ отримуємо $2\varkappa_1(P_1, P_2) = 8\delta^3 = \pi^3(P_1, P_2)$. Отже, для вказаних P_1 і P_2 у твердженні теореми має місце рівність. Аналогічні приклади легко побудувати для будь-якого n.

Нехай $\xi_i(x)$, $x \in R^n$, $i = 1, 2$ — однорідні ізотропні неперервні в середньому квадратичному випадкові поля [3]. Розглянемо їх кореляційні функції

$$B_i(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}}\,d\Phi_i(\lambda), \qquad i = 1, 2.$$

Тут $J_\nu(x)$ — функція Бесселя першого роду, $\Phi_i(\lambda)$ — спектральні функції.

Нехай $B_1(r) = B_2(r)$ при $0 \leqslant r \leqslant H$. Що можна в цьому випадку стверджувати про близькість спектральних функцій Φ_1 і Φ_2 в різних метриках?

Теорема 2. Нехай $B_1(r) = B_2(r)$ при $0 \leqslant r \leqslant H$. Тоді

$$\pi(\Phi_1, \Phi_2) \leqslant \left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Доведення. Скориставшись результатом [2], отримуємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_1(y) - F_2(y)|\,dy \leqslant \frac{\pi^n n^{n/2}}{2^{n-1}H^n},$$

де $F_i(y)$ — спектральні міри, які відповідають функціям $\Phi_i(\lambda)$. З теореми 1 випливає

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_1(x) - F_2(x)|\,dx \geqslant \frac{\pi^{n+1}(\Phi_1, \Phi_2)}{2^{n-1}}.$$

Звідси прийдемо до твердження теореми.

Скористаємось співвідношеннями між різними метриками [1].

Наслідок 1. Якщо $B_1(r) = B_2(r)$ при $0 \leqslant r \leqslant H$, то має місце оцінка

$$L(\Phi_1, \Phi_2) \leqslant \left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

де $L(\Phi_1, \Phi_2) = \inf\{\varepsilon : \Phi_1\{\lambda) - \Phi_2(\lambda + \varepsilon) \leqslant \varepsilon,\ \Phi_2(\lambda) - \Phi_1(\lambda + \varepsilon) \leqslant \varepsilon,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Наслідок 2. Якщо $\Phi_1(\lambda)$ має обмежену щільність $p_1(\lambda)$, то

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) \leqslant (1 + \sup_{\lambda \geqslant 0} p_1(\lambda))\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

де $\rho(\Phi_1, \Phi_2) = \sup\{|\Phi_1(\lambda) - \Phi_2(\lambda)|,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Наслідок 3. Має місце оцінка

$$\varkappa_1(\Phi_1, \Phi_2) \leqslant \int_t^{+\infty} |\Phi_1(\lambda) - \Phi_2(\lambda)|\,d\lambda + 3\sqrt{2}(t + 2) \times$$

$$\times \left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

де $\varkappa_1(\Phi_1, \Phi_2) = \int_0^\infty |\Phi_1(\lambda) - \Phi_2(\lambda)|\,d\lambda$.

Список використаної літератури

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М., 1986. 415 с. 2. *Маляренко А. А.* Узагальнення однієї теореми Ессеена // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. 1979. Вип. 21. С. 84—88. 3. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. К., 1980. 207 с.

Надійшла до редколегії 20.01.91

Установлена связь средней вероятностной метрики и метрики Леви — Прохорова в многомерном случае. Получены оценки близости в различных метриках спектральных функций однородных изотропных полей, когда их корреляционные функции совпадают на интервале.

УДК 519.21

А. О. ПАШКО, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
Ін-т випробувань машин

ПРО ОЦІНКИ РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМА СУБГАУССІВСЬКИХ ІНТЕГРАЛІВ

Добуто оцінки розподілу супремума випадкових процесів, які записуються у вигляді субгауссівських інтегралів. Ці оцінки при додаткових обмеженнях покращують відомі.

Нехай $\varphi(\lambda)$ — неперервна функція обмеженої варіації на $[a, b]$. Випадковий процес $\xi(t)$ такий, що майже всі траєкторії $\xi(t)$ вимірні на відрізку $[a, b]$ і існує константа C_a^b така, що $M|\xi(t)| \leqslant C_a^b$ при $a \leqslant t \leqslant b$. Такий процес належить класові J_a^b [1].

Інтеграл $\int\limits_a^b \varphi(\lambda)\, d\xi(\lambda)$ будемо обчислювати за формулою

$$\int\limits_a^b \varphi(\lambda)\, d\xi(\lambda) = \varphi(\lambda)\, \xi(\lambda)\big|_a^b - \int\limits_a^b \xi(\lambda)\, d\varphi(\lambda), \qquad (1)$$

де $\int\limits_a^b \xi(\lambda)\, d\varphi(\lambda)$ — інтеграл Лебега по узагальненій мірі, породженій функцією $\varphi(\lambda)$. Для процесів з класу J_a^b інтеграл (1) існує майже для всіх траєкторій. Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d\xi(\lambda)$ будемо розуміти як границю за імовірністю, якщо вона існує,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d\xi(\lambda) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b \varphi(\lambda)\, d\xi(\lambda).$$

Нехай $\mu(\cdot)$ — σ-скінченна борелівська міра на R^1, $C(R^1)$ — простір неперервних і обмежених на R^1 функцій з нормою $\|f(t)\|_C =$