Теория случайных детерминантов. К., 1980. 368 с. 4. *Он же.* Многомерный статистический анализ. К., 1988. 320 с. 5. *Он же.* Предельные теоремы для сумм функций распределения собственных чисел симметричных случайных матриц // Укр. мат. журн. 1989. 41, № 1. С. 36—41.

Надійшла до редколегії 12.10.89

Исследована асимптотика преобразований Стильтьеса спектральных функций сингулярных собственных чисел матрицы $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$ методами общего статистического анализа при условии, что известны только X_i, $i=\overline{1, s}$ — независимые наблюдения за матрицей $A+\Xi$, где Ξ — случайная матрица.

УДК 519.21

І. Ю. ДЕНИСОВА, асп., Київ. ун-т

ПРО СТІЙКІСТЬ ІНВАРІАНТНОЇ МНОЖИНИ СИСТЕМИ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Стаття містить нові дані про стійкість інваріантної множини системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь. Виводяться умови, за яких така стійкість можлива.

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\zeta_i(t) = a_i^*(t, \zeta(t))\,dt + b_i^*(t, \zeta(t))\,dw(t), \tag{1}$$

$i = 1, 2$, $w(t)$ — одновимірний вінерів процес; (x_1^0, x_2^0) — початковий стан системи. Коефіцієнти $a_i^*(t, x)$ і $b_i^*(t, x)$ припускають розклад

$$\begin{aligned} a_i^*(t, x) &= (Ax)_i + \tilde{a}_i(t, x), \quad A = (a_{ij}), \\ b_i^*(t, x) &= (Bx)_i + \tilde{b}_i(t, x), \quad B = (b_{ij}), \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Система лінійних рівнянь, що відповідає нелінійній системі (1), має вигляд

$$d\xi(t) = A\xi(t)\,dt + B\xi(t)\,dw(t), \tag{3}$$

де $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$.

Дослідимо стійкість за імовірністю інваріантної множини лінійної системи (3) для нелінійної системи (1). Нехай інваріантну множину системи (3) описує рівняння $G(x) = 0$, де $G(x_1, x_2)$ — двічі неперервно диференційовна функція [1]. Візьмемо процес $\eta(t) = G^2(\zeta(t)) \geqslant 0$. За формулою Іто

$$d\eta(t) = \Big(2G(\xi(t)) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G(\xi(t))}{\partial x_i} a_i^*(t, \xi(t)) + \sum_{i,j=1}^{2} \Big(G(\xi(t)) \frac{\partial^2 G(\xi(t))}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial G(\xi(t))}{\partial x_i} \frac{\partial G(\xi(t))}{\partial x_j}\Big) b_i^*(t, \xi(t))\, b_j^*(t, \xi(t))\Big)\,dt +$$

$$+ 2G(\xi(t)) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G(\xi(t))}{\partial x_i} b_i^*(t, \xi(t))\, dw(t).$$

Використовуючи розкладання (2), дістаємо

$$d\eta(t) = \Big(2G(\xi(t)) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G(\xi(t))}{\partial x_i} (A\xi(t))_i + \sum_{i,j=1}^{2} \Big(G(\xi(t)) \frac{\partial^2 G(\xi(t))}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial G(\xi(t))}{\partial x_i} \frac{\partial G(\xi(t))}{\partial x_j}\Big) (B\xi(t))_i (B\xi(t))_j + \widetilde{L}_1 G(\xi(t))\Big)\, dt +$$

$$+ L_2^* G(\xi(t))\, dw(t) = (L_1 + \widetilde{L}_1)\, G(\xi(t))\, dt + L_2^* G(\xi(t))\, dw(t),$$

де L_1, $\widetilde{L}_1$, L_2^* — оператори. Нехай існує $\gamma = \mathrm{const} > 0$ таке, що форма $L_1 G(x_1, x_2) \leqslant -\gamma G^2(x_1, x_2)$ є від'ємно визначеною і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що в області $|G(x)| < \delta$ вірне

$$\widetilde{L}_1 G(x) = 2G(x) \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \widetilde{a}_i(t, x) + \sum_{i,j=1}^{2} \Big(G(x) \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \frac{\partial G(x)}{\partial x_j}\Big) (\widetilde{b}_i(t, x) \widetilde{b}_j(t, x) + \widetilde{b}_i(t, x)(Bx)_j +$$

$$+ \widetilde{b}_j(t, x)(Bx)_i) \leqslant \varepsilon G^2(x).$$

Нехай $U_\delta = \{x : |G(x)| < \delta\}$ — δ-окіл інваріантної множини, $\forall r < \delta$ r-окіл U_r цієї множини міститься в її δ-околі. Припустимо, що $(x_1^0, x_2^0) \in U_r$. Позначимо $\tau_r(t) = \min\{\tau_r, t\}$, τ_r — момент першого досягнення межі області U_r. Тоді

$$\eta(\tau_r(t)) = \eta(0) + \int_0^{\tau_r(t)} (L_1 + \widetilde{L}_1)\, G(\xi(s))\, ds + \int_0^{\tau_r(t)} L_2^* G(\xi(s))\, dw(s).$$

Виберемо ε і відповідно δ настільки мале, щоб $\gamma \geqslant \varepsilon$. Тоді $(L_1 + \widetilde{L}_1)\, G(\xi(t)) \leqslant (-\gamma + \varepsilon)\, G^2(\xi(t)) \leqslant 0$. Тому

$$\eta(\tau_r(t)) \leqslant \eta(0) + \int_0^{\tau_r(t)} L_2^* G(\xi(s))\, dw(s).$$

Оскільки $\tau_r(t)$ — марківський момент, обмежений з імовірністю одиниця, то

$$M \int_0^{\tau_r(t)} L_2^* G(\xi(s))\, dw(s) = 0.$$

Отже, $MG^2(\xi(\tau_r(t))) \leqslant G^2(x_1^0, x_2^0)$. Легко упевнитися, що має місце нерівність

$$P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} G^2(\xi(s)) > \delta^2\} \leqslant P\{G^2(\xi(\tau_r(t))) \geqslant r^2\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{MG^2(\xi(\tau_r(t)))}{r^2} \leqslant \frac{G^2(x_1^0, x_2^0)}{r^2}.$$

Переходячи до границі при $t \to \infty$, дістаємо

$$P\{\sup_{t\geqslant 0} G^2(\xi(t)) > \delta^2\} \leqslant \frac{G^2(x_1^0, x_2^0)}{r^2}.$$

Внаслідок неперервності функції $G(x_1, x_2)$ [3]

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \rho > 0\, |\, G(x_1^0, x_2^0)| < \rho : \frac{G^2(x_1^0, x_2^0)}{r^2} < \varepsilon,$$

отже, $\rho = r\sqrt{\varepsilon}$.

Теорема. Нехай $G(x_1, x_2) = 0$ — рівняння інваріантної множини системи лінійних рівнянь (3). Припустимо, що існує $\gamma = \mathrm{const} > 0$ таке, що

$$2G(x)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}(Ax)_i + \sum_{i,j=1}\left(G(x)\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\frac{\partial G(x)}{\partial x_j}\right) \times$$
$$\times (Bx)_i (Bx)_j \leqslant -\gamma G^2(x)$$

і $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\ |G(x)| < \delta$:

$$2G(x)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\tilde{a}_i(t, x) + \sum_{i,j=1}^{2}\left(G(x)\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\frac{\partial G(x)}{\partial x_j}\right) \times$$
$$\times (\tilde{b}_i(t, x)\tilde{b}_j(t, x) + \tilde{b}_i(t, x)(Bx)_j + \tilde{b}_j(t, x)(Bx)_i) \leqslant \varepsilon G^2(x).$$

Тоді множина $G(x_1, x_2) = 0$ стійка за імовірністю для системи (1).

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

де a, b — деякі числа, $\lambda_i \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $i = 1, 2$. Інваріантна множина $x_1 = 0$. Функція $G(x_1, x_2) = x_1$,

$$\tilde{a}_1(x_1, x_2) = \frac{-1 - 2\lambda_1 x_1 - \lambda_1 2\sqrt{x_1}}{2(\sqrt{x_1} + 1)^2},$$

$$\tilde{b}_1(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1} + 1},$$

$$\tilde{a}_2(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2} + 1}, \quad \tilde{b}_2(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1 + x_2}}{\sqrt{x_1 + x_2} + 1}.$$

Годі

$$2G(x)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}(Ax)_i+\sum_{i,j=1}^{2}\left(G(x)\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\frac{\partial G(x)}{\partial x_j}\right)\times$$

$$\times(Bx)_i(Bx)_j=(2a+\lambda_1^2)x_1^2\leqslant-\gamma x_1^2,$$

отже, $0\leqslant\gamma\leqslant-(2a+\lambda_1^2)$.

$$2G(x)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\tilde{a}_i(x)+\sum_{i,j=1}^{2}\left(G(x)\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\frac{\partial G(x)}{\partial x_j}\right)\times$$

$$\times(\tilde{b}_i(x)\tilde{b}_j(x)+\tilde{b}_i(x)(Bx)_j+\tilde{b}_j(x)(Bx)_i)=\frac{x_1}{(\sqrt{x_1}+1)^2}+$$

$$+\frac{2\lambda_1 x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}+1}-2x_1\frac{1+2\lambda_1 x_1+2\lambda_1\sqrt{x_1}}{2(\sqrt{x_1}+1)^2}=0.$$

Тому стійкість за імовірністю можлива, коли $0\leqslant\gamma\leqslant-(2a+\lambda_1^2)$.

Список використаної літератури

1. *Бабчук В. Г., Кулинич Г. Л.* Об одном методе нахождения инвариантных множеств стохастических дифференциальных уравнений Ито // Теория вероятностей и ее применения. 1978. 23, вып. 2. С. 454. 2. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зимняя школа по теории вероятностей и мат. статистике. Ужгород, 1964. С. 41—86. 3. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969. 367 с.

Надійшла до редколегії 16.01.89

Статья содержит новые данные об устойчивости инвариантного множества системы линейных стохастических дифференциальных уравнений. Выводятся условия, при которых такая устойчивость возможна.

УДК 519.21

Н. М. ЗІНЧЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб., Київ. ун-т

ДО ПИТАННЯ ПРО АСИМПТОТИКУ ПРИРОСТІВ АСИМЕТРИЧНИХ СТІЙКИХ ПРОЦЕСІВ

Запропоновані інтегральні критерії для вивчення швидкості зростання приростів стійкого процесу без додатних стрибків $\xi_{\alpha,\beta}(t)$, $\beta=-1$, $\alpha\in(1, 2)$ на інтервалах довжиною a_T, де a_T зростає не швидше за T.

Нехай $\xi(t)=\xi_{\alpha,\beta}(t)$, $t\in R^1$ — стійкий процес з параметрами $\beta=-1$, $\alpha\in(1, 2)$, a_T — неспадна функція на $[0, \infty)$ така, що: (i) $0<a_T\leqslant T$, (ii) T/a_T не спадає по T.

У роботі [1] для процесу $\xi(t)$, тобто для стійкого процесу без додатних стрибків, доведено, що майже напевно (м. н.)