УДК 519.21

Т.О.БАРДАДИМ, О.В.ІВАНОВ,
кандидати фіз.-мат. наук,
ст. наукові співробітники,
Ін-т кібернетики

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД РОЗПОДІЛУ ОДНОГО ФУНКЦІОНАЛА ВІД ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Досліджується нелінійна модель регресії $x_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j$, $j = 1,\dots,n, \theta \in \Theta \subset R^q$, $q \geq 1$. Наводиться асимптотичний розклад розподілу функціонала $(L_n(\theta) - L_n(\hat\theta_n))/\sigma^2$, де $L_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} [x_j - g(j, \theta)]^2$, $\hat\theta_n$ — оцінка найменших квадратів невідомого параметра $\theta \in \Theta$, добута по спостереженнях $x_1,\dots, x_n$, σ^2 — дисперсія похибки спостереження ε_j.

Нехай B^n – σ-алгебра борелівських множин в евклідовому просторі R^n, $\Theta \leq R^q$ — відкрита опукла множина. Будемо розглядати статистичний експеримент $\{R^n, B^n, P_\theta^n, \theta \in \Theta\}$, породжений незалежними спостереженнями

$$x_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j,\ j = 1,\dots, n, \tag{1}$$

де $\{g(j, \theta), \theta \in \Theta^c\}$ (Θ^c — замикання Θ в R^q) — послідовність функцій, $\{\varepsilon_j\}$ — послідовність незалежних випадкових величин (в.в.) із спільною функцією розподілу (ф.р.) $P(x)$, що не залежить від θ, та нульовим математичним сподіванням ($E\varepsilon_j = 0$).

Оцінкою найменших квадратів невідомого параметра $\theta \in \Theta$ моделі (1), побудованою за спостереженнями $x_1,\dots, x_n$, назвемо в.в. $\hat\theta_n = \hat\theta_n(x_1,\dots, x_n) \in \Theta^c$, для якої

$$L_n(\hat\theta_n) = \inf_{\theta \in \Theta^c} L_n(\theta),\quad L_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} [x_j - g(j, \theta)]^2.$$

У нашій статті буде знайдений асимптотичний розклад (а.р.) при $n \to \infty$ ф.р. функціонала $(L_n(\theta_n) - L_n(\hat\theta_n)) / \sigma^2$ від оцінки $\hat\theta_n$, $\sigma^2 = E\varepsilon_j^2$. Якщо ε_j — гауссівські $(0, \sigma^2)$ в.в., то цей функціонал є статистикою критерія Неймана—Пірсона перевірки простої гіпотези про значення параметра θ [1, с.369]. У регресійному аналізі функціонал використовується при побудові надійних областей для невідомого параметра θ [2, 3].

Будемо вважати, що у функцій $g(j, \theta)$, $\theta \in \Theta^c$, $j \geq 1$ існують та неперервні всі частинні похідні по змінних $\theta = (\theta_1,\dots, \theta_q)$ до порядку $k \geq 3$ включно. Нехай $\alpha = (\alpha_1,\dots, \alpha_q)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_q$, $g^{(\alpha)} = (\partial^{|\alpha|}/\partial\theta_1^{\alpha_1} \dots \partial\theta_q^{\alpha_q})\, g$, $a_n(\alpha, \theta)$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (g^{(\alpha)}(j, \theta))^2\right)^{1/2},$$

$$\Phi_{\alpha n}(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^{n} \left(g^{\alpha}(j, \theta + u_1) - g^{\alpha}(j, \theta + u_2)\right)^2.$$

Будемо користуватися також іншим означенням для похідної. Для $r = 1, \dots, k$ та $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, q\}$ візьмемо $g_{i_1 \dots i_r} = (\partial^r / \partial \theta_{i_1} \dots \partial \theta_{i_r}) g$,

$$b_n^{i_1 \dots i_r}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j g_{i_1 \dots i_r}(j, \theta), \quad \nu_n^{i_1 \dots i_r}(\theta) = \Lambda_n^{i_1 l}(\theta)\, b_n^{l i_2 \dots i_r}(\theta)$$

(якщо в добутку двох або більшого числа співмножників який-небудь індекс зустрічається двічі, це означає підсумовування по всіх значеннях індекса від 1 до q), де $\Lambda_n^{i_1 l}$ — елемент матриці $\Lambda_n(\theta) = I_n^{-1}(\theta)$,

$$I_n(\theta) = \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_i(j, \theta)\, g_l(j, \theta)\right)_{i,l=1}^{q}.$$

Нехай штрих означає транспонування. Позначимо $_{k-1}\nu_n(\theta) = (\nu^1, \dots, \nu^q, \dots, \nu^{11}, \dots, \nu^{1q}, \dots, \nu^{2q}, \dots, \nu^{qq}, \dots, \nu^{111}, \dots, \nu^{\underbrace{q \dots q}_{k-1}})'$ — вектор, складений з усіх різних ненульових величин $\nu_n^{i_1 \dots i_r}(\theta)$, $r = 1, \dots, k-1$, узятих у природному порядку; $p = \dim\left({}_{k-1}\nu_n(\theta)\right) \le q\, C_{k+q-2}^{q}$. Помітимо, що

$_{k-1}\nu_n(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j w_{jn}(\theta)$, де p-вимірні вектори $w_{jn}(\theta)$ складені з величин $\Lambda_n^{i_1 l}(\theta)\, g_{l i_2 \dots i_r}(j, \theta)$. Візьмемо $W_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} w_{jn}(\theta) w'_{jn}(\theta)$. Тоді

$K_n(\theta) = \sigma^2 n^{-1} W_n(\theta)$ — кореляційна матриця вектора $_{k-1}\nu_n(\theta)$. Позначимо $V(\theta) = \Theta - \theta$, $s(R) = \{u \in R^q : |u| < R\}$, $\lambda_{\min}(A)$ — найменше власне значення симетричної невід'ємно визначеної матриці A, $T \subset \Theta$ — компакт.

Введемо такі умови.

I. Для довільного $R > 0$

$$\sup_{\theta \in T} \sup_{u \in S^c(R) \cap V^c(\theta)} n^{-1/2} d_n(\alpha, \theta + u) \le c_1(\alpha, R) < \infty, \ |\alpha| = 1, \dots, k;$$

$$\sup_{\theta \in T} \sup_{u_1, u_2 \in S^c(R) \cap V^c(\theta)} n^{-1} \Phi_{\alpha n}(u_1, u_2)\, |u_1 - u_2|^{-2} \le$$

$$\le c_2(\alpha, R) < \infty, \ |\alpha| = k;$$

II. $\varliminf_{n \to \infty} \inf_{\theta \in T} n^{-1/2} d_n(\alpha, \theta) > 0$, $|\alpha| = 1, \dots, k$, якщо тільки $g^{(\alpha)}(j, \theta) \not\equiv 0$.

III. $\varlimsup_{n \to \infty} \sup_{\theta \in T} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \left| g^{\alpha}(j, \theta) \right|^{k+1} < \infty$, $|\alpha| = 1, \dots, k$.

IV. $\varliminf_{n \to \infty} \inf_{\theta \in T} \Lambda_{\min}(I_n(\theta)) > \lambda_0 > 0$.

V. Існує ціле число $h \geq p$ таке, що з довільної сукупності $\{w_{jn}, j=m+1,\ldots,m+h\}$, $0 \leq m \leq n-h$, $n \geq h+1$ можна вибрати p векторів $w_{j_1 n},\ldots,w_{j_p n}$ таких, що матриці $W_{mn}^{(h)}(\theta)=p^{-1}\sum_{i=1}^{p} w_{j_i n} w'_{j_i n}$ рівномірно додатно визначені:

$$\inf_{0\leq m\leq n-h\,;\,n\geq h+1} \inf_{\theta\in T} \lambda_{\min}\left(W_{mn}^{(h)}(\theta)\right) > \lambda > 0.$$

VI. $\mu_{k+1}=E\,|\varepsilon_j|^{k+1}<\infty$; $\int_{-\infty}^{\infty} |E e^{i\lambda\varepsilon_j}|\,d\lambda < \infty$.

VII. $\sup_{\theta\in T} P_\theta^n\{\,|\hat{\theta}_n-\theta\,|\geq r\,\}= 0(n^{-(k-1)/2})$ для довільного $r>0$.

Вимоги до моделі (1), що забезпечують виконання VII, наведено у роботі [4].

Теорема. Якщо для деякого $k\geq 3$ виконані умови I—VII, то для довільного $u_0 > 0$ $(q=1)$ та $u_0=0$ $(q>1)$

$$\sup_{\theta\in T}\sup_{u\geq u_0}\Big|\,P_\theta^n\{\delta^{-2}(L_n(\theta)-L_n(\hat{\theta}))<u\}$$

$$-\int_0^u f_{\chi_q^2}(x)\left(1+\sum_{\nu=1}^{[(k-3)/2]} n^{-\nu} S_{\nu n}(\theta, x)\right)dx\Big| = O\left(n^{-(k-2)/2}\log^{k/2} n\right),$$

де $f_{\chi_q^2}(x)$ — щільність розподілу χ^2 з q ступенями свободи, $S_{\nu n}(\theta, x)$ — поліноми степеня 3ν по змінній x, коефіцієнти яких рівномірно обмежені за $\theta\in T$ та n.

Доведення. За теоремою роботи [5] при виконанні умов I—III, VI, VII існує константа $c_1>0$ така, що

$$\sup_{\theta\in T} P_\theta^n\Big\{\,|L_n(\theta)-L_n(\hat{\theta}_n)+\sum_{\nu=0}^{k-3} P_{\nu+1,n}(\theta)\,n^{-\nu/2}\,|\geq$$

$$\geq c_1 n^{-(k-2)/2}\log^{k/2} n\Big\} = 0\,(n^{-(k-1)/2}),$$

де $P_{\nu+1,n}(\theta)$, $\nu=0,\ldots,k-3$ — однорідні поліноми степеня $\nu+2$ відносно координат векторів $\nu v_n(\theta), \nu=1,\ldots,k-2$ з рівномірно обмеженими за $\theta\in T$ та n коефіцієнтами. Зокрема,

$$P_{1n}=I_n^{il}v_n^i v_n^l;$$

$$P_{2n} = I_n^{i_1 i_2}\,{}_1v_n^{i_1}\,{}_1v_n^{i_3}\,{}_2v_n^{i_2 i_3} - \Pi_n^{(i_1 i_2)(i_3)}\,v_n^{i_1}v_n^{i_2}v_n^{i_3},$$

$$\Pi_n^{(i_1 i_2)(i_3)}(\theta) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} g_{i_1 i_2}(j,\theta)\,g_{i_3}(j,\theta)\,.$$

Нехай $Q_n^*(\theta)$ — розподіл вектора ${}_{k-1}v_n(\theta)$. При виконанні умов I—VII вірне співвідношення

$$\sup_{\theta\in T}\sup_{B\in \mathcal{B}^p}\left|\int_B Q_n^*(\theta)\,(dx)-\int_B \overline{Q}_n(\theta, x)\,dx\,\right| = O\,(n^{-(k-1)/2}),$$

де

$$\overline{Q}_n(\theta, x)=\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-2} n^{\nu/2}\overline{P}_{\nu n}(\theta, x)\right)\varphi_{K_n(\theta)}(x)\,, \qquad (2)$$

$\mathcal{P}_{\nu n}(\theta,x)$ — поліноми степеня 3ν по змінній $x \in R^p$, коефіцієнти яких рівномірно обмежені за $\theta \in T$ та n, а $\varphi_{K_n(\theta)}(x)$ — щільність p-вимірного нормального розподілу з нульовим середнім та коваріаційною матрицею $K_n(\theta)$, що має структуру

$$K_n(\theta)= \left\|\begin{matrix}\Lambda_n(\theta) & \Sigma_{12}(\theta)\\ \Sigma_{21}(\theta) & \Sigma_{22}(\theta)\end{matrix}\right\|.$$

(Один з перших результатів такого роду міститься у статті [6].)

Далі зручно використовувати позначення

$$\mathcal{H}_n\left({}_{k-1}\nu_n(\theta)\right) = -\sum_{\varphi=0}^{k-3} P_{\nu+1,n}(\theta)n^{-\psi/2}$$

(права частина тут залежить тільки від ${}_{k-2}\nu_n(\theta)$, тому залежність $\mathcal{H}_n$ від аргументів, що додаються при переході від вектора ${}_{k-2}\nu_n(\theta)$ до вектора ${}_{k-1}\nu_n(\theta)$, фіктивна).

А.р. імовірності $P_\theta^n\left\{\sigma^{-2}(L_n(\theta)-L_n(\hat\theta_n))<u\right\}$ рівномірно за $\theta \in T$ з точністю до величини $O\left(n^{-(k-1)/2}\right)$ збігається з а.р. імовірності $P_\theta^n\left\{\sigma^{-2}\mathcal{H}_n\left({}_{k-1}\nu_n(\theta)\right)<u+\delta_n\right\}$, $\delta_n=O\left(n^{-(k-2)/2}\log^{k/2}n\right)$, : наша задача зводиться до побудови а.р. інтегралів

$$I_n^{\pm}(\theta)= \int\limits_{\{x \in R^p:\, \mathcal{H}_n(x)<\sigma^2u \pm \sigma^2\delta_n\}} \mathcal{Q}_n(\theta,x)dx.$$

В інтегралі $I_n^+(\theta)$ проведемо заміни змінних. Позначимо $y_i=x_i$, $i=1,\dots,q$; $z_i=x_i$, $i=q+1,\dots,p$. Тоді за лемою з роботи [7]

$$I_n^+(\theta)=\int\limits_{B_n(u)} \varphi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(y)\varphi_{\sigma^2 S_n(\theta)}(z-\Sigma_{21}I_ny)\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-2} n^{-\nu/2}\mathcal{P}_{\nu n}(\theta,y,z)\right)dydz,$$

$$S_n(\theta)=\Sigma_{22}(\theta)-\Sigma_{21}(\theta)I_n(\theta)\Sigma_{12}(\theta),$$

$$B_n(\theta)=\{(y,z) \in R^q \times R^{p-q} : \langle I_n(\theta)y,y\rangle + P_{2n}(\theta,y,z)n^{-1/2} + \\ + \dots+P_{k-2,n}(\theta,y,z)n^{-(k-3)/2}\le\sigma^2(u+\delta_n)\}.$$

Далі по перших q змінних проводимо заміну $y \to \sigma\Lambda_n^{1/2}y$, а потім полярну заміну, при якій вектор y перетворюється на вектор $r\langle\varphi\rangle$. Після цього здійснимо зсув $z-\Sigma_{21}I_n\sigma\Lambda_n^{1/2}r\langle\varphi\rangle$. Тоді

$$I_n^*(\theta)=\int\limits_{B_n^+(u)}(2\pi)^{-q/2}e^{-r^2/2}r^{q-1}I(\varphi)\varphi_{\sigma^2 S_n}(z) \times \\ \times\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-2}n^{-\nu/2}\overline{\overline{\mathcal{P}}}_{\nu n}(\theta,r,\varphi,z)\right)drd\varphi dz, \tag{3}$$

де $B_n^*(u)=\{(r,\varphi,z) \in [0,\infty[\times[0,\pi]^{q-2}\times[0,2\pi]\times R^{p-q}: r^2+\sigma^{-2}P_{2n}^* \times (\theta,r,\varphi,z)n^{-1/2}+\dots+\sigma^{-2}P_{k-2n}^*(\theta,r,\varphi,z)n^{-(k-3)/2}<u+\delta_n\}$; $r^{q-1}I(\varphi)$ — якобіан полярної заміни; поліноми $\overline{\overline{\mathcal{P}}}_{\nu n}$ добуті при заміні змінних з поліномів $\mathcal{P}_{\nu n}(\theta,y,z), \nu=1,\dots,k-2$, а поліноми $P_{\nu+1,n}^*$ — з поліномів $P_{\nu+1,n}(\theta,y,z), \nu=1,\dots,k-3$. Позначимо $A_n(\ae_1)=\{r>0: r\le\ae_1\log^{1/2}n\}$,

$C_n(æ_2)=\{\, z\in R^{p-q} : |z| < æ_2 \log^{1/2} n \,\}$. Виберемо величини $æ_1>0$, $æ_2>0$ так, щоб для інтеграла

$$I_n^+(\theta)=\int\limits_{A_n(æ_1)\cap B_n^*(u)\cap C_n(æ_2)}(2\pi)^{-q/2}e^{-r^{2/2}}r^{q-1}I(\varphi)\varphi_\sigma{}^2 s_n(z)\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-2}n^{-\nu/2}\overline{P}_{\nu n}\right)dr\,d\varphi\,dz \quad (4)$$

виконувалося співвідношення

$$I_n^+(\theta)={}_1I_n^+(\theta)+O(n^{-(k-1)/2}). \quad (5)$$

За теоремою Фубіні

$${}_1I_n^*(\theta)=(2\pi)^{-q/2}\int\limits_{[0,\pi]^{q-2}\times[0,2\pi]}I(\varphi)d(\varphi)\int\limits_{C_n(æ_2)}\varphi_\sigma{}^2 s_n(z)dz\int\limits_{B_n(u)\cap A_n(æ_1)}e^{-r^2/2}r^{q-\cdot}\times$$
$$\times\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-2}n^{-\nu/2}\overline{P}_{\nu n}\right)dr,$$

$$B_n(u)=\left\{r\ge 0 : r^2+\sigma^{-2}P_{2n}^*n^{-1/2}+\ldots+\sigma^2P_{k-2,n}^*n^{-(k-3)/2}<u+\delta_n\right\}. \quad (6)$$

У внутрішньому інтегралі (6) введемо таку заміну змінної:

$$\rho(r)=r^2+\sigma^{-2}P_{2n}n^{-1/2}+\ldots+\sigma^{-2}P_{k-2,n}^*n^{-(k-2)/2}. \quad (7)$$

Оскільки $P_{\nu n}$ — однорідні поліноми степеня $\nu+1$, то $P_{\nu n}^*$ — однорідні поліноми степеня $\nu+1$ відносно змінних (r,z) з тригонометричними коефіцієнтами (які також залежать від похідних функції регресії $g(j,\theta)$). Мінімальний степінь цих поліномів за r (максимальний за z) дорівнює $r^2(z^{\nu-1})$.

Позначимо $H_n(\theta,\varphi,z)$ образ інтервала $i_n=[0æ_1\log^{1/2}n]$ при відображенні $r\to\rho(r)$ за умови, що $z\in C_n(æ_2)$. Очевидно, що знайдуться константи $\overline{æ}>0$ і $\underline{æ}>0$ такі, що

$$[0,æ_1^2\log n-\underline{æ}n^{-1/2}\log^{3/2}n\,]\subseteq H_n(\theta,\varphi,z)\subseteq$$
$$\subseteq[0,æ_1^2\log n-\overline{æ}n^{-1/2}\log^{3/2}n\,] \quad (8)$$

рівномірно за $\theta\in T$, $\varphi\in[0,\pi]^{q-2}\times[0,2\pi]$, $z\in C_n(æ_2)$.

Нехай $r=\Psi_n(\theta,r,\varphi,z) : H_n\to R^1$ — функція, обернена до $\rho(r)\,|\,i_n$. Для того щоб знайти її, помітимо, що з (7) випливає

$$\rho(r)=r^2+(a_{01}(\varphi)r^3+a_{11}(\varphi,z)r^2)n^{-1/2}+(a_{22}(\varphi,z)r^2+$$
$$+a_{12}(\varphi,z)r^3+a_{02}(\varphi)r^4)n^{-1}+\ldots=r^2\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-3}\left(\sum_{h=0}^{\nu}a_{h\nu}r^{\nu-h}\right)n^{-\nu/2}\right), \quad (9)$$

де $a_{h\nu}(\varphi,z)$ — форми h—го порядку від z (при $h=0$ $a_{0\nu}$ не залежить від z, при $h=1$ $a_{1\nu}$ — лінійні форми від z, $a_{2\nu}$ — квадратичні тощо). Обернену функцію $r\to\Psi_n(\theta,\rho,\varphi,z)$ будемо шукати у вигляді

$$r=\rho^{1/2}\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{h=0}^{\nu}a_{h\nu}^*(\varphi,z)\rho^{(\nu-h)/2}\right)n^{-\nu/2}\right), \quad (10)$$

де $a_{h\nu}^*$ — форми h—го порядку від z.

Форми з «зірочками» можна виразити через форми без «зірочок», якщо підставити у (10) вираз (9) для $\rho^{1/2}$ та зрівняти коефіцієнти при однакових ступенях n і r. Тоді $a_{01}^{*}=-a_{01}^{*}/2$, $a_{11}^{*}=-a_{11}^{*}/2$, $a_{02}^{*}=5/8\cdot a_{01}^{2}-a_{02}/2$, $a_{12}^{*}=a_{01}a_{11}-a_{12}/2$, $a_{22}^{*}=3/8\cdot a_{11}^{2}-a_{22}/2$. Таким чином, функцію $r=\Psi_n(\theta,\rho,\varphi,z)$ можна подати у вигляді ряду

$$r=\rho^{1/2}\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\tilde{\pi}_{\nu n}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z)n^{-\nu/2}\right), \tag{11}$$

де $\tilde{\pi}_{\nu n}$ — однорідні поліноми степеня ν від змінних $(\rho^{1/2},z)$, причому їх мінімальний степінь за $\rho^{1/2}$ (максимальний за z) дорівнює нулю (ν).

Після заміни змінних $r\to\Psi_n(\theta,\rho,\varphi,z)$ внутрішній інтеграл у (6) набуває вигляду

$$I_{\theta n}=\int\limits_{[0,u+\delta_n]} e^{-\Psi_n^2/2}\Psi_n^{q-1}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-2}n^{-\nu/2}\overline{\overline{P}}_{\nu n}(\theta,\Psi_n,\varphi,z)\right)\left(\partial\Psi_n/\partial\rho\right)d\rho. \tag{12}$$

Аналогічно [5]

$$\Psi_n=\rho^{1/2}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-3}\tilde{\pi}_{\nu n}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z)\,n^{-\nu/2}\right)+R_n^{[k]}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z), \tag{13}$$

причому рівномірно за $\theta\in T$, $\rho<c\log n$, $c>æ_1^2$, $z\in C_n(æ_2)$, $\varphi\in[0,\pi]^{q-2}\times[0,2\pi]$ $R_n^{[k]}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z)=O\left(n^{-(k-2)/2}\log^{k/2}n\right)$. Зауважимо, що

$$\partial\Psi_n/\partial\rho=\left(1+\sum_{n=1}^{k-3}n^{-\nu/2}\overline{\overline{\pi}}_{\nu n}+{}_1R_n^{[k]}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z)\right)/2\rho^{1/2}, \tag{14}$$

де $\overline{\overline{\pi}}_{\nu n}$ — однорідні поліноми степеня ν по змінних $(\rho_{1/2},z)$ і рівномірно по $\theta\in T,\varphi\in[0,\pi]^{q-2}\times[0,2\pi],\rho<c\log n$, $c>æ_1^2$, $z\in C_n(æ_2)$ ${}_1R_n^{[k]}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z)=O\left(n^{-(k-2)/2}\log^{(k-1)/2}n\right)$. Якщо у (12) підставити вирази (13) і (14), то

$$I_{\theta n}=1/2\int\limits_{H_n(\theta,\varphi,z)\cap[0,u+\delta_n]} e^{-\rho/2}\rho^{q/2-1}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-3}n^{-\nu/2}P_{\nu n}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z)\right)d\rho+$$

$$+{}_2P_n^{[k]}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z), \tag{15}$$

де ${}_2R_n^{[k]}$ має ту ж властивість, що й $R_n^{[k]}$, а $P_{\nu n}$ — деякі поліноми.

Згідно з (8) збільшуючи, якщо це необхідно, величину $æ_1$, можна записати таке співвідношення:

$$\int\limits_{\hat{B}_n(\theta,\varphi,z)} e^{-\rho/2}\rho^{q/2-1}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-3} n^{-\nu/2}\mathcal{P}_{\nu n}(\theta,\rho,\varphi,z)\right)d\rho = O\left(n^{-(k-1)/2}\right)$$

рівномірно за $\theta \in T$, $\varphi \in [0,\pi]^{q-2} \times [0,2\pi]$, $z \in C_n(æ_2)$.

Константу $æ_2$ можна вибрати так, щоб рівномірно за $\theta \in T, \varphi \in [0,\pi]^{q-2} \times [0,2\pi]$

$$\int\limits_{\hat{C}_n(æ_2)} \varphi_\sigma^2 s_n(z)dz\int_0^\infty e^{-\rho/2}\rho^{q/2-1}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-3}n^{-\nu/2}\left|\mathcal{P}_{\nu n}(\theta,\rho,\varphi,z)\right|\right)d\rho = O\left(n^{-(k-1)/2}\right).$$

З формул (3)—(6) і подальших міркувань випливає, що

$$I_n^+(\theta) = \left((2\pi)^{-q/2}\right)\int_0^{u+\delta_n}\int\limits_{[0,\pi]^{q-2}\times[0,2\pi]} e^{-\rho/2}\rho^{q/2-1}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-3}\tilde{\mathcal{P}}_{\nu n}(\theta,\rho,\varphi)n^{-\nu/2}\right)d\rho d\varphi +$$

$$+{}_3R_n^{[k]}(\theta,\varphi), \qquad (16)$$

де ${}_3R_n^{[k]}(\theta,\varphi) = O\left(n^{-(k-2)/2}\log^{k/2} n\right)$ рівномірно за $\theta \in T$, $\varphi \in [o,\pi]^{q-2} \times [0,2\pi]$

$$\dot{\mathcal{P}}_{\nu n} = \int\limits_{R^{p-q}} \varphi_\sigma^2 s_n(z)\ \tilde{\mathcal{P}}_{\nu n}dz,\ \nu=1,\ldots,k-3. \qquad (17)$$

Залишається з'ясувати структуру поліномів, що добуті інтегруванням $\mathcal{P}_{\nu n}$ в (15) за φ та z. Початкові поліноми $\overline{P}_{\nu n}(\theta,x)$ в (2) мають степінь 3ν за змінною $x \in R^p$ і до $\overline{P}_{\nu n}(\theta,x)$ входять степені x тієї ж парності, що й ν [6]. Після полярної заміни та зсуву по z залишаються поліноми $\overline{\mathcal{P}}_{\nu n}(\theta,\varphi,r,z)$ степеня 3ν за (r,φ), в яких степені (r, z) мають ту ж парність, що й ν.

При проведенні заміни (11) форми з «зірочками» виражаються через форми без «зірочок» із збереженням порядку форми, тому поліноми $\tilde{\pi}(\theta,\rho^{1/2},\varphi,z)$ у (11) однорідні за $(\rho^{1/2},z)$ і мають степінь ν за $(\rho^{1/2},z)$.

Якщо підставити ряд (11) в інтеграл (12), поліноми $P_{\nu n}$ будуть коефіцієнтами при $n^{-\nu/2}$ у формальному добутку

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}P_{\nu n}n^{-\nu/2} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\pi^*_{\nu n}n^{-\nu/2}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\tilde{\tilde{\pi}}\, n^{-\nu/2}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu A^\nu/\nu\,!\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{\overline{P}}_{\nu n}\, n^{-\nu/2}\right) \qquad (18)$$

де $\pi^{*}_{\nu n}$ та $\tilde{\tilde{\pi}}_{\nu n}$ — однорідні за $(\rho^{1/2},z)$ поліноми степеня ν, добуті з формул для Ψ_n^{q-1} та $\partial\Psi_n/\partial\rho$ відповідно, $A=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\tilde{\pi}_{\nu n}n^{-\nu/2}\right)^2$, $\tilde{\pi}_{\nu n}$ — поліноми з (11), $\bar{P}_{\nu n}$ — поліноми, добуті з $\bar{P}_{\nu n}(\theta,\rho,\varphi,z)$ при заміні (11), і тому мають властивості $\bar{P}_{\nu n}$.

Оскільки у перші три співмножника (18) входять тільки однорідні поліноми степеня, що дорівнює степеню $n^{-1/2}$, то поліноми $P_{\nu n}$, як і $\bar{P}_{\nu n}$, будуть мати степінь 3ν по $(\rho^{1/2},z)$ і будуть містити у собі лише степені $(\rho^{1/2},z)$ тієї ж парності, що й ν.

Співвідношення (17) показують, що при інтегруванні по z у поліномі $\tilde{P}_{\nu n}$ перетворюються на нуль усі ті члени, яким у $P_{\nu n}$ відповідали члени з непарними степенями по змінних z_i. Отже, поліноми $\tilde{P}_{\nu n}$ у (16) будуть мати вигляд $\tilde{P}_{1n}=t_{1,0}^{[n]}\rho^{3/2}+t_{1,2}^{[n]}\rho^{1/2}z^2$, $\tilde{P}_{2n}=t_{2,0}^{[n]}\rho^3+t_{2,2}^{[n]}\rho^2z^2+$ $+t_{2,4}^{[n]}\rho z^4+t_{2,6}^{[n]}z^6$, і т.д.,

де $t_{\nu,h}^{[n]}(\theta,\varphi)$, $h=0,\ldots,3\nu$ — рівномірно обмежені по $\theta\in T$, $\varphi\in[0,\pi]^{q-2}\times[0,2\pi]$ коефіцієнти.

Зупинимося на членах з непарними ν. Вони містять доданки з непарними степенями $\rho^{1/2}$, а у коефіцієнти $t_{\nu,h}^{[n]}$, $h=0,\ldots,3\nu$ як співмножники входять $\cos\varphi_k$, $k\le q-2$ або $\sin\varphi_{q-1}$ у непарних степенях, що з'явилися при полярній заміні. Після інтегрування за φ ці коефіцієнти перетворяться на нулі.

Отже, після інтегрування за φ у ряді з інтеграла (16) залишаються тільки цілі степені n^{-1}.

Аналогічні міркування вірні і для $I_n^{-}(\theta)$. Закінчується доведення, як у роботі [5].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. М., 1968. 548 с. 2. *Beale E.M.L.* Confidence regions in non—linear estimation (with discussion) // J.Roy. Statist. Soc. 1960. b22. P.41—88. 3. *Bates D.M., Watts D.G.* Nonlinear regression analysis and its applications. New York, 1988. 475 p. 4. *Иванов А.В.* Две теоремы о состоятельности оценки наименьших квадратов // Теория вероятностей и мат. статистика. 1983. Вып. 28. С.25–34. 5. *Бардадым Т.А., Иванов А.В.* Асимптотические разложения, связанные с оценкой дисперсии ошибки наблюдения для модели «сигнал плюс шум» // Там же. 1985. Вып. 33. С.11—20. 6. *Ivanov A.V., Zwanzig S.* An asymptotic expansion of the distribution of least squares estimators in the nonlinear regression model // Math. Operationsforsch. Statist. 1983. 14, № 1. P.7—27. 7. *Андерсон Е.* Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963. 500 с.

Надійшла до редколегії 01.03.91

Исследуется нелинейная модель регрессии $x_j=g(j,\theta)+\varepsilon_j$, $j=1,\ldots,n$, $\theta\in\Theta\subset R^q$, $q\ge1$. Получено асимптотическое разложение распределения функционала $\left(L_n(\theta)-L_n(\hat{\theta}_n)\right)/\sigma^2$, где $L_n(\theta)=\sum_{j=1}[x_j-g(j,\theta)]^2$, $\hat{\theta}_n$ — оценка наименьших квадратов неизвестного параметра $\theta\in\Theta$, полученная по наблюдениям $x_1,\ldots,x_n$, σ^2— дисперсия ошибки наблюдения ε_j.