УДК 519.21

І.В.БОНДАРЕНКО, інж., О.В.ІВАНОВ, ст. наук. співроб.,
Ін-т кібернетики

ПРО ВИБІРКОВІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ІЗ СТІЙКИМИ ПРИРОСТАМИ

Розглядаються квазінорми $\|\xi\|_p = \left(M\left(|\xi|^p / 1+|\xi|^p \right)^{1/p} \right)$, $p > 1$ для стійких випадкових величин (в.в.) з параметром стійкості α, $0 < \alpha < 2$. При різних співвідношеннях між α та p добуті оцінки $\|\xi\|_p$ через параметр масштабу стійкого розподілу. Ці оцінки використовуються для формулювання тверджень про неперервність випадкових полів зі стійкими приростами.

Нехай X - деякий лінійний простір в.в. ξ, визначених на ймовірному просторі (Ω, F, P). Квазінормою [1,с.6] на X називається функціонал $\|\bullet\|$, який кожному елементу $\xi \in X$ зіставляє число $\|\xi\| \geq 0$, що задовольняє такі умови :

1) $\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ майже напевне ;
2) якщо λ таке число, що $\|\lambda\| < 1$, то $\|\lambda\xi\| \leq \|\xi\|$;
3) $\|\xi+\eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$.

Повний простір X із квазінормою $\|\bullet\|$ називається квазібанаховим.

Твердження 1. Функціонали $\|\xi\|_p$, $p \geq 1$ являють собою квазінорми.

Насправді вірне більш загальне твердження.

Нехай $u(x)$, $x \in R^1$ – функція Орлича [2, с.11] і функція $u(cx)/1+u(x)$, $x \geq 0$, $c \geq 1$ монотонно не спадає за x. Тоді функціонал $\|\xi\| = \inf\{ r>0 : M(u(\xi/r)/1+u(\xi)) < 1\}$ – квазінорма.

Квазінорма $\|\xi\|$ розширює поняття норми Люксембурга [2]. Твердження 1 для функціоналів $\|\xi\|_p$, $p>1$ вірне, якщо взяти $u(x) = |x|^p$. Функціонал $\|\xi\|_1$, очевидно, являє собою квазінорму.

Оцінимо квазінорму $\|\xi\|_p$, $p>1$ для в.в. ξ, що має стійкий розподіл імовірностей із щільністю $\Delta^{-1} f(x/\Delta;\alpha)$, $0<\alpha<2$, $\Delta>0$, де щільності $f(x;\alpha)$ відповідає характеристична функція $\exp\{-|\lambda|^{\alpha}\}$. У площині (p,α) множину $K = \{(p,\alpha) : p>1, 0<\alpha<2\}$ розіб'ємо на підмножини таким чином: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, де $K_1 = \{(p,\alpha) : p>1, 0<\alpha<2, p>\alpha\}$; $K_2 = \{(p,\alpha) : 1<p<\alpha<2\}$; $K_3 = \{(p,\alpha) : 1<p=\alpha<2\}$.

Твердження 2. Нехай $(p,\alpha) \in K$. Тоді для в.в. ξ із щільністю $\Delta^{-1} f(x/\Delta;\alpha)$ вірні оцінки

$$\|\xi\|_p \leq \begin{cases} c_1(p,\alpha)\Delta^{\alpha/p}, & (p,\alpha) \in K_1; \quad (1) \\ c_2(p,\alpha)\Delta, & (p,\alpha) \in K_2; \quad (2) \\ c_3(p)\Delta |\ln\Delta|^{1/p}, & (p,\alpha) \in K_3; \quad (3) \end{cases}$$

c_1, c_2, c_3 – деякі константи.

Д о в е д е н н я. Позначимо $T_p(x) = (1+|x|^p)^{-1}$, $x\in R^1$, $p>1$, $\tilde{T}_p(\lambda) = 2\int_0^\infty \cos\lambda x\, T_p(x)dx$ – перетворення Фур'є $T_p(x)$. Ясно, що

$$\|\xi\|_p^p=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-|\Delta\lambda|^\alpha})\tilde{T}_p(\lambda)\,d\lambda \le$$
$$\le (2\pi)^{-1}\Delta^\alpha\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^\alpha|\tilde{T}_p(\lambda)|\,d\lambda\,. \qquad (4)$$

Запишемо $K=K_1^{(1)}\cup K_1^{(2)}\cup K_1^{(3)}$, де $K_1^{(1)}=\{(p,\alpha):p>1,0<\alpha<1\}$, $K_1^{(2)}=$ $=\{(p,\alpha):p>1,\alpha=1\}$, $K_1^{(3)}=\{(p,\alpha):1<\alpha<2,p>\alpha\}$. Легко впевнитись, що $T_p^{(m)}(x) = O(x^{-p-m})$ при $x\to\infty$, $m=1,2,\dots$. Якщо ми проінтегруємо $\tilde{T}_p(\lambda)$ частинами два рази, ми переконаємось, що $|\tilde{T}_p(\lambda)|\le$ $\le k_1(p)|\lambda|^{-2}$, $k_1(p)<\infty$. Тому у точках з $K_1^{(1)}$ інтеграл (4) скінченний, тобто вірне (1).

Коли ми проінтегруємо $\tilde{T}_p(\lambda)$ частинами тричі, то для $p>2$ можна показати, що $|\tilde{T}_p(\lambda)|\le k_2(p)|\lambda|^{-3}$, $k_2(p)<\infty$ і довести (1) для множини $K_1^{(4)}=\{(p,\alpha):p>2,0<\alpha<2\}\subset K_1$. Але для того щоб охопити всю множину K_1, будемо діяти інакше. Нехай $(p,\alpha)\in K_1^{(3)}$. З асимптотичного зображення [3, с.182] для стійкої щільності $f(x;\alpha)$, $1<\alpha<2$ випливає, що для деякої константи $c(\alpha)<\infty$ $f(x;\alpha)\le\pi^{-1}c(\alpha)(1+x^{1+\alpha})^{-1}$, $x\ge0$. Послідовно дістаємо:

$$\|\xi\|_p^p=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^{-1}f(x/\Delta;\alpha)|x|^p(1+|x|^p)^{-1}dx\le$$
$$\le 2c(\alpha)\pi^{-1}\left(\int_0^{\Delta^{-1}}+\int_{\Delta^{-1}}^{\infty}\right)\left((\Delta x)^p\left((1+(\Delta x)^p)(1+x^{1+\alpha})\right)^{-1}dx\right)\le$$

$$\le 2c(\alpha)\pi^{-1}\left(\Delta^p\int_0^{\Delta^{-1}}x^{p-\alpha-1}dx+\int_{\Delta^{-1}}^{\infty}x^{-1-\alpha}dx\right)=$$
$$=2c(\alpha)p\Delta^\alpha(\pi\alpha(p-\alpha))^{-1}. \qquad (5)$$

Таким чином, у точках $(p,\alpha)\in K_1^{(3)}$ виконується (1) при $c_1(p,\alpha)=(2c(\alpha)\,p/\pi\alpha(p-\alpha))^{1/p}$. Для розподілу Коші $\left((p,\alpha)\in K_1^{(2)}\right)$ міркування аналогічні й $c_1(p,1)=(4p/\pi(p-1))^{1/p}$.

Нехай $(p,\alpha)\in K_2$. Тоді $\|\xi\|_p\le c_2(p,\alpha)\Delta$, де $c_2(p,\alpha)=\mu_p^{1/p}(\alpha)$, $\mu_p(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^pf(x;\alpha)dx<\infty$.

Для множини K_3 оцінку (3) дістаємо, як і (5), слід тільки квазінорму подати у вигляді $\|\xi\|_p^p=2\left(\int_0^1+\int_1^{\Delta^{-1}}+\int_{\Delta^{-1}}^{\infty}\right)$ та оцінити кожний доданок.

Для деяких конкретних значень параметрів (p,α) оцінку квазінорми можна уточнити.

Твердження 3. Нехай $p=2n$, $n=1,2,\ldots$. Тоді для довільного $0<\alpha<2$ вірна оцінка (1) з константою $c_1(2n,\alpha)=$ $=\left(\Gamma(1+\alpha)/(\sin(\pi/2n))^{1+\alpha}\right)^{1/2n}$.

У доведенні використовується явний вираз [4, с.396] для інтеграла

$$\tilde{T}_{2n}(\lambda) = 2\int_0^\infty (\cos\lambda x/1+x^{2n})dx =$$

$$= \pi n^{-1}\sum_{l=0}^{n-1} \exp\{-|\lambda|\sin((2l+1)/2n)\pi\}\times$$

$$\times \sin\left(((2l+1)/2n)\pi+|\lambda|\cos((2l+1)/2n)\pi\right).$$

Ясно, що $|\tilde{T}_{2n}(\lambda)| \le \pi \exp\{-(\sin(\pi/2n))|\lambda|\}$ і

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty |\lambda|^\alpha|\tilde{T}_{2n}(\lambda)|d\lambda \le \int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-\lambda\sin(\pi/2n)}d\lambda =$$

$$= \Gamma(1+\alpha)/(\sin(\pi/2n))^{1+\alpha}.$$

Зокрема, $\|\xi\|_2 \le \Gamma^{1/2}(1+\alpha)\Delta^{\alpha/2}$.

Твердження 4. Нехай $1<\alpha<p<2$. Тоді вірна оцінка (1) з константою $c_1(p,\alpha) = \left(\mu_\alpha(p)(p/\alpha)\Gamma(1+p/\alpha)\right)^{1/p}$, де $\mu^\alpha(p) = \int_{-\infty}^\infty |x|^\alpha f\times$ $\times(x;\alpha)dx < \infty$.

Доведення спирається на зображення функції $\tilde{T}_p(\lambda) =$ $=2\int_0^\infty (\cos\lambda x/1+x^p)dx$, $1<p<2$, $\lambda>0$. Зробимо заміну змінної $\lambda x=y$, а потім $u=z^{-1/p}$, тоді

$$\tilde{T}_p(\lambda) = 2\lambda^{p-1}\int_0^\infty \cos y\,(\lambda^p+y^p)^{-1}dy =$$

$$= 2\lambda^{p-1}\int_0^\infty \cos y\int_0^\infty e^{-z(\lambda^p+y^p)}dzdy =$$

$$= \lambda^{p-1}\int_0^\infty e^{-z\lambda^p}\int_0^\infty e^{-iy}e^{-z|y|^p}dydz =$$

$$= 2\pi\lambda^{p-1}\int_0^\infty e^{-z\lambda^p}z^{-1/p}f(z^{-1/p};p)dz =$$

$$= 2\pi p\,\lambda^{p-1}\int_0^\infty e^{-(\lambda/u)^p}u^{-p}f(u;p)du \ge 0, \lambda>0\,.$$

Отже,

$$\pi^{-1}\int_0^\infty \lambda^\alpha\tilde{T}_p(\lambda)d\lambda = 2p\int_0^\infty (\lambda u^{-1})^{p+\alpha-1}e^{-(\lambda u^{-1})^p}d(\lambda u^{-1})\times$$

$$\times\int_0^\infty u^\alpha f(u;p)du = p\mu_\alpha(p)\int_0^\infty v^{\alpha+p-1}e^{-v^p}dv =$$

$$= p\alpha^{-1}\mu_\alpha(p)\Gamma(1+p\alpha^{-1}).$$

Нехай X_p – квазібанаховий простір з квазінормою $\|\cdot\|_p$. Тоді для довільної послідовності в.в. $\xi_k \in X_p$, $k=1,\ldots,n$; $n\ge 1$

$$\|\max_{1\le k\le n}|\xi_k|\,\|_p \le x(n)\max_{1\le k\le n}\|\xi_k\|_p\ , \quad x(n)=n^{1/p}$$

Доведення (6) не викликає труднощів.

Функція $x(n)$, $n=1,2,\ldots$ називається характеристикою квазібанахового простору X_p [5].

Нехай $T=\{t=(t_1,\ldots,t_q)\in R^q : 0\le t_k\le 1,\ k=1,\ldots,q\}$ – одиничний куб у q– вимірному евклідовому просторі R^q. Розглянемо сепарабельне випадкове поле $\{\xi(t),\ t\in T\}$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Припустимо, що для довільних $t,\ s\in T$ прирости поля $\xi(t)-\xi(s)$ мають стійкий розподіл із щільністю $\Delta^{-1}(|t-s|)f(x\Delta^{-1}(|t-s|);\alpha)$, де $\alpha\in(0,2)$ фіксоване, а функція $\Delta(u)$, $u>0$ має такі властивості : 1) $\Delta(u)>0$ і строго монотонно зростає; 2) $\Delta(u)\to 0$ при $u\to 0$. Можемо вважати, що $\xi(t)\in X_p$, $t\in T$. Введемо на T метрику $m_p(t,s) = \|\xi(t)-\xi(s)\|_p$ і позначимо $\sigma_x(h) = \sup\limits_{|t-s|\le h} m_p(t,s)$, $h>0$. Нехай $\sigma_x(h)$ строго монотонно зростає. Припустимо, що простір $\{T, m_p\}$ є компактом. Із твердження 2 для поля $\{\xi(t),\ t\in T\}$ дістаємо такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай $(p,\alpha)\in K$. Тоді для $h>0$

$$\sigma_p(h) \le \begin{cases} c_1(p,\alpha)\Delta^{\alpha/p}(h), & (p,\alpha)\in K_1;\\ c_2(p,\alpha)\Delta(h), & (p,\alpha)\in K_2;\\ c_3(p)\Delta(h)|\ln\Delta(h)|^{1/p}, & (p,\alpha)\in K_3; \end{cases}$$

Таким чином, $\sigma_p(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Позначимо $x^*(h)=h^p$, $h>0$ функцію, обернену $x(h)$ ($x(h)$ – характеристика квазібанахового простору X_p, продовжена на нецілі значення аргументу). Використовуючи результати робіт [5-7], можна сформулювати таке твердження.

Твердження 5. Нехай для деякого $R>0$

$$\int_R^\infty \sigma_p(x^*(h)^{-1/q})dh = \int_R^\infty \sigma_p(h^{-p/q})dh < \infty .$$

Тоді поле $\{\xi(t),\ t\in T\}$ вибірково неперервне і для довільного $\varepsilon>0$

$$\Big\|\sup_{|t-s|\le\varepsilon} |\xi(t)-\xi(s)|\Big\|_p = c^{(1)}\Big(\big(((2\varepsilon)^{-1}+1)^{q/p}\sigma_p(\varepsilon) + \int_{((2\varepsilon)^{-1}+1)^{q/p}}^{\infty} \sigma_p\Big(\big((2(h^{p/q}-1))^{-1}\big)dh\Big), \qquad (7)$$

$c^{(1)}$– деяка константа.

За допомогою наслідку 1 та твердження 5 дістаємо, наприклад, такий результат для $(p,\alpha)\in K_1$ (множини K_2 і K_3 розглядаються аналогічно).

Твердження 6. Нехай для деякого $R>0$ і $(p,\alpha)\in K_1$, $\int_R^\infty \Delta^{\alpha/p}(h^{-p/q})\,dh<\infty$. Тоді поле $\{\xi(t),\ t\in T\}$ вибірково неперервне і для довільного $\varepsilon>0$ виконується нерівність (7) з константою $c^{(1)}c_1(p,\alpha)$ після заміни σ_p на $\Delta^{\alpha/p}$.

Наслідок 2. Нехай $(p,\alpha)\in K_1$ і $\Delta(h) \le c^{(2)}h^{\delta}$, де $\alpha\,\delta > q$. Тоді поле $\{\xi(t)\,,\, t \in T\}$ вибірково неперервне і $\| \sup\limits_{|t-s|\le\varepsilon} |\xi(t)-\xi(s)|\, \|_p = O(\varepsilon^{(\alpha\,\delta-q)/p})$ при $\varepsilon\to 0$.

При $q=1$ вибіркову неперервність випадкового процесу $\{\xi(t)\,,\, t \in [0,1]\}$ можна дістати, використовуючи умову А.М.Колмогорова [8, с.216] неперервності випадкового процесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Булдыгин В.В* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. К, 1980. 240 с. 2. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958. 270 с. 3. *Лукач Е.* Характеристические функции. М., 1979. 424 с. 4. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981. 800 с. 5. *Абжанов Е.А., Козаченко Ю.В.* Случайные процессы в квазибанаховых K_σ – пространствах случайных величин // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. К., 1986. с.3–11. 6. *Козаченко Ю.В.* Случайные процессы в пространствах Орлича. I // Теория вероятностей и мат. статистика. 1984. Вып.30. с.92–107. 7. *Он же.* Случайные процессы в пространствах Орлича. II // Там же. Вып.31. с.44–50. 8. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк, Н.И.Портенко, А.В.Скороход, А.Ф.Турбин. М., 1985. 640 с.

Надійшла до редколегії 01.03.91

Рассматриваются квазинормы $\|\xi\|_p = (M(|\xi|^p/1+|\xi|^p)^{1/p})$, $p > 1$ для устойчивых случайных величин (с.в.) с параметром устойчивости α, $0<\alpha<2$. При разных соотношениях между α и p получены оценки $\|\xi\|_p$ через параметр масштаба устойчивого распределения. Эти оценки используются для формулировки утверждений о непрерывности случайных полей с устойчивыми приращениями.

УДК 519.21

В.Л.ГІРКО, д-р фіз.-мат. наук, проф., Київ. ун-т

ПРО ОДИН КЛАС ОЦІНОК S_1

Знайдено множину оцінок S_1 розв'язків систем лінійних рівнянь з випадковими параметрами. Доведено, що максимальне власне число в критерії якості оцінки в загальному випадку є кратним.

Деякі задачі оцінювання параметрів систем рівнянь зводяться до пошуку мінімального значення максимальних власних чисел на певній множині чисел. Опубліковано чимало робіт, де розв'язуються задачі оцінювання [1-7] за допомогою спектральної теорії лінійних операторів, тому такі оцінки називатимемо спектральними, або S-оцінками. У цій статті запропоновані S-оцінки параметрів лінійних систем, які будемо позначати символом S_1.

Припустимо, що m-вимірний вектор c задовольняє систему рівнянь $y=Xc+\varepsilon$, де y — n-мірний вектор спостережень, $X=(x_{ij})$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$, $n \ge m$ — матриця, ε — n-мірний випадковий вектор такий, що $M\varepsilon=0$, $M\varepsilon\varepsilon'=R$. Будемо вважати, що вектори — це вектор-стовпчики, транспонований вектор — це вектор-рядок, усі матриці й вектори дійсні. Іноді для визначеності будемо показувати розміри матриць: $X_{n\times m}$, вектора y_n.