Наслідок 2. Нехай $(p,\alpha)\in K_1$ і $\Delta(h) \le c^{(2)}h^{\delta}$, де $\alpha\,\delta > q$. Тоді поле $\{\xi(t)\,,\, t\in T\}$ вибірково неперервне і $\| \sup\limits_{|t-s|\le\varepsilon} |\xi(t)-\xi(s)| \|_p = O(\varepsilon^{(\alpha\,\delta-q)/p})$ при $\varepsilon\to 0$.

При $q=1$ вибіркову неперервність випадкового процесу $\{\xi(t)\,,\, t\in[0,1]\}$ можна дістати, використовуючи умову А.М.Колмогорова [8, с.216] неперервності випадкового процесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Булдыгин В.В* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. К, 1980. 240 с. 2. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958. 270 с. 3. *Лукач Е.* Характеристические функции. М., 1979. 424 с. 4. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981. 800 с. 5. *Абжанов Е.А., Козаченко Ю.В.* Случайные процессы в квазибанаховых K_σ – пространствах случайных величин // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. К., 1986. с.3–11. 6. *Козаченко Ю.В.* Случайные процессы в пространствах Орлича. I // Теория вероятностей и мат. статистика. 1984. Вып.30. с.92–107. 7. *Он же.* Случайные процессы в пространствах Орлича. II // Там же. Вып.31. с.44–50. 8. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк, Н.И.Портенко, А.В.Скороход, А.Ф.Турбин. М., 1985. 640 с.

Надійшла до редколегії 01.03.91

Рассматриваются квазинормы $\|\xi\|_p = (M(|\xi|^p/1+|\xi|^p)^{1/p})$, $p>1$ для устойчивых случайных величин (с.в.) с параметром устойчивости α, $0<\alpha<2$. При разных соотношениях между α и p получены оценки $\|\xi\|_p$ через параметр масштаба устойчивого распределения. Эти оценки используются для формулировки утверждений о непрерывности случайных полей с устойчивыми приращениями.

УДК 519.21

В.Л.ГІРКО, д-р фіз.-мат. наук, проф., Київ. ун-т

ПРО ОДИН КЛАС ОЦІНОК S_1

Знайдено множину оцінок S_1 розв'язків систем лінійних рівнянь з випадковими параметрами. Доведено, що максимальне власне число в критерії якості оцінки в загальному випадку є кратним.

Деякі задачі оцінювання параметрів систем рівнянь зводяться до пошуку мінімального значення максимальних власних чисел на певній множині чисел. Опубліковано чимало робіт, де розв'язуються задачі оцінювання [1-7] за допомогою спектральної теорії лінійних операторів, тому такі оцінки називатимемо спектральними, або S-оцінками. У цій статті запропоновані S-оцінки параметрів лінійних систем, які будемо позначати символом S_1.

Припустимо, що m-вимірний вектор c задовольняє систему рівнянь $y=Xc+\varepsilon$, де y — n-мірний вектор спостережень, $X=(x_{ij})$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$, $n\ge m$ — матриця, ε — n-мірний випадковий вектор такий, що $M\varepsilon=0$, $M\varepsilon\varepsilon'=R$. Будемо вважати, що вектори — це вектор-стовпчики, транспонований вектор — це вектор-рядок, усі матриці й вектори дійсні. Іноді для визначеності будемо показувати розміри матриць: $X_{n\times m}$, вектора y_n.

Нехай вектор c задовольняє нерівність $c'D_{m\times m}c \le a$, де D — додатно визначена матриця. За допомогою лінійного перетворення вектора y: $T_{m\times n}y + t_m$ знайдемо матрицю $\hat{T}_{m\times n}$ і вектор $\hat{t}_m$ такі, щоб вираз $\max_{c: c'Dc \le a} M(Ty+t-c)'V(Ty+t-c)$, де $V_{m\times m}$ — невід'ємно визначена симетрична матриця, набував мінімального значення. Вектор $c = Ty + t$ будемо називати S-оцінкою вектора c. У нашій задачі на відміну від відомих аналогічних матриця V фіксована, а не довільна. Позначимо множини матриць і векторів: L_1 — розмірів $m\times n$, L_3 — розмірів $m\times m$, L_4 — розмірів $s\times m$, L_5 — розмірів $(m-s)\times n$, L_2 — m-вимірних векторів. Крім того, введемо $Y = R^{-1/2}X$, $B = D^{-1/2}VD^{-1/2} = U\Gamma U$, де $U_{m\times m}$ — ортогональна матриця власних векторів, а $\Gamma_{m\times m} = (\gamma_i\delta_{ij})$ — діагональна матриця власних чисел; $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \ldots \ge \gamma_s > 0$ — ненульові власні числа матриці B, де s деяке число, $Z = YD^{-1/2}U$, $H = Z(Z'Z)^{-1/2}$. Рівність за означенням будемо позначати символом $:=$.

Теорема 1. Якщо матриці D, $X'X$, R невироджені, то

$$\min_{T\in L_1, t\in L_2}\max_{c\in L_2: c'Dc\le a} M(c-Ty-t)V(c-Ty-t) =$$
$$= \min_{\hat{T}\in L_1}\left\{a\lambda_{\max}\left[D^{-1/2}(I-\hat{T}x')V(I-\hat{T}x)D^{-1/2}\right] + \mathrm{Sp}\,\hat{T}'V\hat{T}R\right\} =$$
$$= \min_{A\in L_4}\left\{a\lambda_{\max}(A'A) + \mathrm{Sp}\,W^{-2}(A + (\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'(A + (\sqrt{\Gamma})_{s\times m})\right\},$$

де $\sqrt{V}\,\hat{t} = 0$, $\lambda_{\max}$ — максимальне власне число матриці, $I_{m\times m}$ — одинична матриця,

$$\hat{T} = D^{-1/2}U\begin{bmatrix} A_{s\times m}(\sqrt{\Gamma})_{s\times m} + I_{s\times m})U'D^{1/2}(X'R^{-1}X)D^{1/2}UZR^{-1/2} \\ A_{(m-s)\times n} \end{bmatrix},$$

$A_{(m-s)\times n}$ — довільна матриця з множини L_5.

Доведення. Перетворимо критерій якості оцінки, підставляючи значення вектора y і обчислюючи математичне сподівання

$$\varphi := \max_{c\in L_2, c'Dc\le a}\left\{c'(TX-I)'V(TX-I)c + 2\,|t'V(TX-I)c|\right\} + t'Vt + \mathrm{Sp}\,\sqrt{R}T'VT\sqrt{R}.$$

Шукане $\hat{t}$ задовольняє рівняння $\sqrt{V}\,\hat{t} = 0$. Зробимо у виразі φ заміни змінних $T = \tilde{T}R^{-1/2}$, $\tilde{T}\in L_1$, $c = D^{-1/2}\tilde{c}$, $\tilde{c}\in L_2$. Тоді за формулою Релея

$$\varphi = a\lambda_{\max}[D^{-1/2}(\tilde{T}Y-I)'V(\tilde{T}Y-I)D^{-1/2}] + \mathrm{Sp}\,\tilde{T}'V\tilde{T} =$$
$$= a\lambda_{\max}[(D^{1/2}\tilde{T}YD^{-1/2}-I)'B(D^{1/2}\tilde{T}YD^{-1/2}-I)] + \mathrm{Sp}\,\tilde{T}'D^{1/2}BD^{1/2}\tilde{T}.$$

Застосовуючи перетворення $B = U\Gamma U'$, отримуємо

$$\varphi = a\lambda_{\max}[(T_1Z-I)'\Gamma(T_1Z-I)] + \mathrm{Sp}\,T_1'\Gamma T_1, \qquad (1)$$

де $T_1 = U'D^{1/2}\tilde{T}$. Оскільки матрицю Z завжди можна подати у вигляді $Z = HW$, зробимо такі перетворення:

$$\varphi = a\lambda_{\max}[(T_1\tilde{H}\tilde{W}-I_{m\times n})'\Gamma(T_1\tilde{H}\tilde{W}-I_{m\times n})] + \mathrm{Sp}\,T_1'\Gamma T_1, \quad (2)$$

де $\tilde{H}_{n\times n} = [H, Q]$ і дійсна матриця Q вибрана таким чином, щоб матриця $\tilde{H}$ була квадратною ортогональною; $\tilde{W}_{n\times n} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тут матриця W доповнена нульовими елементами так, щоб її розміри стали $n\times n$

Легко перевірити, перемножуючи матриці, що вирази (1) і (2) збігаються. Тепер у виразі (2) можемо зробити заміну змінних

$T_1 = T_2\widetilde{H}'$, де $T_2 \in L_1$, і ця заміна буде взаємно однозначною, оскільки $\widetilde{H}$ — ортогональна квадратна матриця. Після такої заміни змінних вираз (2) набуде вигляду

$$\varphi = a\lambda_{\max}[(T_2\widetilde{W} - I_{m\times n})'\,\Gamma(T_2\widetilde{W} - I_{m\times n})] + \mathrm{Sp}T_2'\Gamma T_2. \quad (3)$$

Зважаючи на те, що матриця $T_2\widetilde{W}$ не залежить від стовпчиків матриці T_2, починаючи з $m+1$-го, а також на те, що $T_2 = T_{2(m\times m)} + T_{2(m\times(n-m))}$, для виразу (3) дістаємо

$$\varphi = a\lambda_{\max}[(T_{2(m\times m)}W - I_{m\times m})'\,\Gamma(T_{2(m\times m)}W - I_{m\times m})] +$$

$$+\mathrm{Sp}(T_{2(m\times m)} + T_{2(m\times(n-m))})'\,\Gamma(T_{2(m\times m)} + T_{2(m\times(n-m))})\,. \quad (4)$$

Тепер ми можемо, перед тим як шукати мінімум по всіх матрицях $T_{2(m\times m)}$, знайти мінімум по всіх матрицях $T_{2(m\times(n-m))}$. Очевидно, що шукана матриця є розв'язком рівняння

$$\sqrt{\Gamma}\,\widehat{T}_{2(m\times(n-m))} = 0_{m\times(n-m)}, \quad (5)$$

або, що те ж саме, $\Gamma T_{2(m\times(n-m))} = 0_{m\times(n-m)}$.

Повертаючись до виразу (4) з урахуванням рівняння (5), дістаємо

$$\min_{T_2\in L_1}\varphi = \min_{T_2\in L_3}\{a\lambda_{\max}[(T_2W - I)'\Gamma(T_2W - I)\,] + \mathrm{Sp}T_2'\,\Gamma T_2\}. \quad (6)$$

У виразі (6) зробимо заміну змінних $T_{2(m\times m)}W - I_{m\times m} = A_{m\times m}$:

$$\min_{T_2\in L_1}\varphi = \min_{A\in L_3}\{a\lambda_{\max}(A'\Gamma A) + \mathrm{Sp}W^{-2}(A' + I)\Gamma(A + I)\} =$$

$$= \min_{A\in L_3}\{a\lambda_{\max}(\widetilde{A}'_{s\times m}\,\widetilde{A}_{s\times m}) +$$

$$+ \mathrm{Sp}W^{-2}(\widetilde{A}_{s\times m} + (\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'\,(\widetilde{A}_s{\times}m) + (\sqrt{\Gamma})_{s\times m})', \quad (7)$$

де $\widetilde{A}_{s\times m} = A_{s\times m}\sqrt{\Gamma_{s\times s}}$.

Отже, для повного доведення теореми 1 залишилось знайти матрицю $\widehat{T}$. Випишемо послідовно всі перетворення цієї матриці:

$$T = \widetilde{T}R^{-1/2},\; T_1 = U'D^{1/2}\widetilde{T},$$

$$T_1 = T_{2(m\times m)}H' + T_{2(m\times(n-m))}Q',$$

$$\Gamma T_{2(m\times(n-m))} = O_{m\times(n-m)},$$

$$T_{2(m\times m)} = \left[\begin{matrix}\widetilde{A}_{s\times m}\,\Gamma_{s\times s} \\ \widetilde{A}_{(m-s)\times m}\end{matrix} + I\right] W^{-1}.$$

Користуючись тим, що $T_2\widetilde{H}' = T_{2(m\times m)}H' + T_{2(m\times(n-m))}Q'$, отримуємо

$$T_{n\times m} = D^{-1/2}U\left\{\left[\begin{matrix}\widetilde{A}_{s\times m}\,\Gamma^{-1/2}_{s\times s} \\ A_{(m-s)\times m}\end{matrix} + I\right] W^{-1}H' + T_{2(m\times(n-m))}Q'\right\} R^{-1/2}.$$

Звідси легко знаходимо вираз для матриці $\widehat{T}$, яка означена у теоремі 1. Це й закінчує її доведення.

Таким чином, ми дещо спростили нашу задачу відшукання оцінок вектора c, а саме, досить дістати

$$\min_{A \in L_4}\{a\lambda_{\max}(A'A)+\mathrm{Sp}W^{-2}(A+\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'(A+\sqrt{\Gamma})_{s\times m})\}. \quad (8)$$

Легко перевірити, що $\lambda_{\max}(A'A)=\lambda_{\max}(AA')$, тому надалі будемо вважати, що у виразі (8) замість $\lambda_{\max}(A'A)$ стоїть $\lambda_{\max}(AA')$. Ось тут при пошуку мінімуму виразу (8) нас і чекають найголовніші труднощі. Справа в тому, що шукана матриця $\widehat{A}$ може бути такою, що власне число $\lambda_{\max}(\widehat{A}\widehat{A}')$ буде кратним, і ми не зможемо скористатися відомими формулами збурень для однократних власних чисел. У цій статті для пошуку мінімуму виразу (8) використовується метод, який був запропонований у роботі [1]. Розглянемо функцію

$$\varphi_\varepsilon(A) := aM\,\lambda_{\max}(AA' + \varepsilon\,\Xi) + \mathrm{Sp}W^{-2}((\sqrt{\Gamma})_{s\times m}+A)'(A+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m}),$$

де $\Xi_{s\times s}=(\xi_{ij})$ — симетрична випадкова матриця розміру $s\times s$, елементи якої ξ_{ij}, $i\geq j$, $i,j=\overline{1,s}$ незалежні і розподілені за нормальним законом $N(0,(1+\delta_{ij})/2)$ ($\varepsilon\neq 0$ — дійсне число). Оскільки власні числа довільної квадратної матриці є неперервними функціями від коефіцієнтів характеристичного рівняння, то для всіх матриць $A \in L_4$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{A \in L_4}|\varphi(A)-\varphi_\varepsilon(A)| = 0. \quad (9)$$

Доведемо, що функція φ буде строго опуклою. Для цього так само, як і в роботі [4], користуючись нерівністю Коші—Буняковського, дістаємо для всіх A, $B \in L_4$, $0\leq \alpha, \beta$, $\alpha+\beta=1$

$$\begin{aligned}\varphi &= a\max_{c\in L_2:c'c\leq 1} c'(\alpha A+\beta B)'(\alpha A+\beta B)c+\\ &+\mathrm{Sp}W^{-2}(\alpha A+\beta B+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'(\alpha A+\beta B+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m}) <\\ &< a\alpha\lambda_{\max}(A'A)+a\beta\lambda_{\max}(B'B)+\\ &+\alpha\,\mathrm{Sp}W^{-2}(A+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'(A+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m})+\beta\,\mathrm{Sp}W^{-2}\times\\ &\times(B+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'(B+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m}).\end{aligned}$$

Аналогічно доводимо, що функція $\varphi_\varepsilon(A)$ теж строго опукла. Отже [4], функції φ і φ_ε мають єдині точки мінімумів $\widehat{A}$ і $\widehat{A}_\varepsilon$. Але тоді з границі (9) випливає, що $\widehat{A}_\varepsilon \to \widehat{A}$. при $\varepsilon\to 0$.

Подамо матрицю $\widehat{A}$ у вигляді $\widehat{A}=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k u_k v_k'$, де $\lambda_1=\lambda_2= =\ldots=\lambda_j>\lambda_{j+1}\geq\ldots\geq\lambda_s>0$; U_k, $k=\overline{1,s}$ – s-мірні ортогональні вектори, v_k, $k=\overline{1,s}$ – m-мірні ортогональні вектори, j — деяке число таке, що $1\leq j\leq s$.

Теорема 2. Числа λ_k і вектори u_k, v_k задовольняють S-рівняння

$$\alpha\lambda_1 W^2\sum_{k=1}^{j} v_k u_k' p_k+\lambda_1\sum_{k=1}^{j} v_k u_k'+\sum_{k=j+1}^{s}\lambda_k v_k u_k'+(\sqrt{\Gamma})'_{s\times m}=0, \qquad (10)$$

де $p_k\geq 0$, $\sum_{k=1}^{j} p_k=1$.

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо, що існує похідна $(\partial/\partial\gamma)\varphi_\varepsilon(A+\gamma\Theta)|_{\gamma=0}$, $\Theta\in L_\varepsilon$. Для цього розглянемо вираз

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\gamma^{-1}[\varphi_\varepsilon(A+\gamma\Theta)-\varphi_\varepsilon(A)]=\lim_{\gamma\downarrow 0}\gamma^{-1}M[\lambda_{\max}((A+\gamma\Theta)\times(A+\gamma\Theta)'+\varepsilon\Xi)-\lambda_{\max}(AA'+\varepsilon\Xi)](\chi(B)+\chi(\bar B))+ + 2\mathrm{Sp}W^{-2}(A+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'\Theta, \qquad (11)$$

де B — випадкова подія:

$$B=\{\omega: |\lambda_{\max}(AA'+\varepsilon\Xi)-\lambda_i(AA'+\varepsilon\Xi)|>\delta,\ i\geq 2\},\ \delta>0,$$

$\chi(B)$ — індикатор події B, $\lambda_{\max}:=\lambda_1$.

У матриці $(A+\gamma\Theta)(A+\gamma\Theta)'$ існує густина розподілу власних чисел $\nu_1\geq\nu_2\geq\ldots\geq\nu_s$

$$p(y_1,\ldots,y_s):=c_s\int\exp\{-6(2\varepsilon^2)^{-1}\mathrm{Sp}((A+\gamma\Theta)(A+\gamma\Theta)'-HYH')^2\}\times \times\mu(dH)\Pi_{i>j}|y_i-y_j|, \qquad (12)$$

де H — ортогональна матриця s-го порядку, μ — міра Хаара на групі ортогональних матриць $H=(h_{ij})$, c_s — нормуюча констг"*та, $y_1>y_2>\ldots>y_s$. Використовуючи цю густину розподілу та нерівність Шварца, отримуєм

$$M|\lambda_1((A+\gamma\Theta)(A+\gamma\Theta)'+\varepsilon\Xi)-\lambda_1(AA'+\varepsilon\Xi)|\chi(\bar B)\leq \leq[M\lambda_1^2((A+\gamma\Theta)(A+\gamma\Theta)'+\varepsilon\Xi)+M\lambda_1^2(AA'+\varepsilon\Xi)]^{1/2}\times \times M\chi(\bar B)\leq c\sum_{l=2}^{s}P\{|\nu_1-\nu_l|\leq\delta\}\leq c_1\sum_{l=2}^{s}\int_{|u|\leq\delta}p(u_l+u,y_2,\ldots,y_s)\times \times\Pi_{k=2}^{s}dy_k\,du\leq c_2\int_{|u|\leq\delta}|u|du\leq c_3\delta^2, \qquad (13)$$

де c_i — константи.

За формулами збурень [9] для однокр... ...засних чисел (. , ,(13)

$$(\partial/\partial\gamma)\varphi_\varepsilon(A+\gamma\Theta)|_{\gamma=0}=\lim_{\gamma\downarrow\ldots} M\{\psi_{1\varepsilon}'[(A+\gamma\Theta)\times(A+\gamma\Theta)'-AA']\psi_{1\varepsilon}+\nu(\delta)\}+2\mathrm{Sp}W^{-2}(A+(\sqrt{\Gamma})_{s\times m})'\Theta.$$

Звідси, вибираючи δ так. ... $\lim_{\gamma\downarrow 0}[\gamma^{-1}\delta^2+\delta^{-1}\gamma]=0$, дістаємо

$$(\partial/\partial\gamma)\varphi_\varepsilon\ldots)|_{\gamma=0}=2M\psi_{1\varepsilon}'\Theta A'\psi_{1\varepsilon}+ +2\mathrm{Sp}W^{-2}(A+\sqrt{\Gamma}_{s\times m})'\Theta, \qquad (14)$$

де $\psi_{1\varepsilon}$ — власний вектор матриці $AA'+$ ... відповідає власному числу ν_1, $|\nu(\delta)|\leq c_1[\delta^2+\delta^{-1}\|(A+\gamma\Theta)(A+\gamma\Theta)'-AA'\|^2(1-\delta^{-1})\|(A+\gamma\Theta)(A+\gamma\Theta)'-AA'\|]$. Оскільки функція $\varphi_\varepsilon(A)$ має єдину точку мінімуму $\hat{A}_\varepsilon$ і строго опукла, то для всіх $\Theta \in L_4(\sqrt[4]{\gamma})\varphi_\varepsilon$ $(\hat{A}_\varepsilon + \gamma\Theta)|_{\gamma=0} = 0$. З цієї рівності і (14) внаслідок того, що Θ є довільною матрицею з множини L_4, дістаємо рівняння для невідомої матриці

$$M\hat{A}'_\varepsilon\psi_{1\varepsilon}\psi'_{1\varepsilon} + W^{-2}(\hat{A}'_\varepsilon + (\sqrt{\Gamma})'_{s\times m}) = 0 \qquad (15)$$

яке завжди має єдиний розв'язок. Оскільки $\hat{A}'_\varepsilon = H_\varepsilon(\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon)^{1/2}$, де $H_\varepsilon = \hat{A}'_\varepsilon(\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon)^{-1/2}$ — ортогональна матриця, то рівняння (15) еквівалентне

$$M\{H_\varepsilon\sqrt{\nu_1}\psi_{1\varepsilon}\psi'_{1\varepsilon} + H_\varepsilon(\sqrt{\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon} - \sqrt{\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon + \varepsilon\Xi})\psi_{1\varepsilon}\psi'_{1\varepsilon} +$$
$$+ W^{-2}(\hat{A}'_\varepsilon + (\sqrt{\Gamma})'_{s\times m})\}\chi(\nu_i \geq 0,\ i = \overline{1,s}) = 0. \qquad (16)$$

Доведемо допоміжне твердження.

Лема. Для деякої послідовності $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} M\sqrt{\nu_1}H_\varepsilon\psi_{1\varepsilon}\psi'_{1\varepsilon} = \lambda_1\sum_{k=1}^{j} p_k\nu_k u'_k, \qquad (17)$$

де $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{j} p_k = 1$.

Доведення. Згідно з формулою (12)

$$M\psi_{1\varepsilon}\psi'_{1\varepsilon} = c_\varepsilon\int h_1 h'_1 \exp\{-(2\varepsilon^2)^{-1}\mathrm{Sp}(\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon -$$
$$- HYH')^2\}\mu(dH)\prod_{i>j}|y_i - y_j|\prod_{k=1}^{s} dy_k, \qquad (18)$$

де h_1 – перший вектор-стовпчик матриці H. Оскільки завжди матрицю $\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon$ можна подати у вигляді $\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon = U_\varepsilon\Lambda_\varepsilon U_\varepsilon$, де U_ε — ортогональна матриця власних векторів, а $\Lambda_\varepsilon = (\lambda_{i\varepsilon}\delta_{ij})$ — діагональна матриця власних чисел матриці $\hat{A}_\varepsilon\hat{A}'_\varepsilon$, $\lambda_{1\varepsilon} \geq \lambda_{2\varepsilon} \geq \ldots \geq \lambda_{s\varepsilon}$, то, роблячи заміну змінних $H = U_\varepsilon\tilde{H}$, $\tilde{H} \in G$ і користуючись інваріантністю міри Хаара μ, з формул (17) і (18) дістаємо

$$M\psi_{1\varepsilon}\psi'_{1\varepsilon} = c_\varepsilon u_\varepsilon\int \tilde{h}_1\tilde{h}'_1 \exp\{-(2\varepsilon^2)^{-1}\mathrm{Sp}(\Lambda_\varepsilon - \tilde{H}Y\tilde{H}')^2\}\mu(d\tilde{H}) \times$$
$$\times \prod_{i>j}|y_i - y_j|\prod_{k=1}^{s} dy_k = c_\varepsilon U_\varepsilon\{M\psi^2_{1i}(\Lambda_\varepsilon + \varepsilon\Xi)\delta_{ij}\}_{i,j>1}^{s} U'_\varepsilon, \qquad (19)$$

де $\psi_1(\Lambda_\varepsilon + \varepsilon\Xi)$ — власний вектор матриці $\Lambda_\varepsilon + \varepsilon\Xi$, який відповідає її максимальному власному числу.

З формул збурень для власних чисел [9] випливає, що при $\varepsilon \to 0$

$$\lambda_{k\varepsilon} \to \lambda_1,\ k = \overline{1,j},\ \lambda_{q\varepsilon} \to \lambda_q,\ q = \overline{j+1,s}. \qquad (20)$$

Оскільки $\lambda_q \neq \lambda_1$, $q = \overline{j+1,s}$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{q=j+1}^{s}\psi_{q\varepsilon}\psi'_{q\varepsilon} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

де I — одинична матриця розміру $(s-j-1)\times(s-j-1)$. Але тоді $\psi^2_{1i}(\Lambda_\varepsilon + \varepsilon\Theta) \to 0$ для всіх $i = \overline{j+1,s}$, бо в протилежному випадку буде $\sum_{i=1}^{s}\psi_{1i}\psi'_{1i} \neq I_{s\times s}$. Отже, позначаючи $p_{i\varepsilon} = M\psi^2_{1i}(\Lambda_\varepsilon + \varepsilon\Xi)$, використовуючи (20), з формули (19) для деякої послідовності $\varepsilon' \to 0$ отримуємо

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} M\sqrt{v_1}H_\varepsilon\psi_{1\varepsilon}\psi'_{1\varepsilon}=\lambda_1\lim_{\varepsilon\downarrow 0}H_\varepsilon U_\varepsilon\{P_k\delta_{ij}\}^s_{i,j=1}u_\varepsilon'=\lambda_1\sum_{k=1}^{j}p_k v_k u_k'.$$

Лему доведено.

З неї випливає, що при $\varepsilon'\to 0$ $A_\varepsilon\to\sum_{k=1}^{s}\lambda_k u_k v_k'$. Отже, переходячи до границі при $\varepsilon'\to 0$ в рівності (16), використовуючи (17), дістаємо

$$a\lambda_1\sum_{k=1}^{j}p_k v_k u_k'+W^{-2}\left(\lambda_1\sum_{k=1}^{j}v_k u_k'+\sum_{k=j+1}^{s}\lambda_k v_k u_k'+(\sqrt{\Gamma})'_{s\times m}\right)=0. \quad (21)$$

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що єдиність розв'язку S-рівняння (21) поки що не доведена.

Наслідок 1. Якщо $s=m$, $\Gamma=I$, то $j=m$ і існує єдиний розв'язок рівняння (10)

$$\hat{A}=I_{m\times m}\mathrm{Sp}W^{-1}[a+\mathrm{Sp}W^{-2}]^{-1}.$$

Доведення. Рівняння (10) має вигляд

$$a\lambda_1 W^2\sum_{k=1}^{j}v_k u_k' p_k+\lambda_1\sum_{k=1}^{j}v_k u_k'+\sum_{k=j+1}^{s}\lambda_k v_k u_k'+I=0.$$

Множачи це рівняння справа на u_k, дістаємо систему рівнянь

$$\lambda_1(aW^2p_k+I)v_k=-u_k,\ k=\overline{1,j},\quad \lambda_q v_q=-u_q,\ q=\overline{j+1,m}.$$

Звідси $\lambda_k\equiv 1$, $k=\overline{j+1,s}$, бо $v_k'v_k=u_k'u_k=1$. Отже, $\lambda_k\geq 1$. Але з перших j рівностей випливає $\lambda_1^2\leq\lambda_1^2 v_k'(aw^2p_k+I)^2v_k=1$. Таким чином, можливий тільки один випадок, коли $j=m$. Тоді

$$a\lambda_1 W^2\sum_{k=1}^{m}p_k v_k u_k' + \lambda_1\sum_{k=1}^{m}v_k u_k'=-I. \quad (22)$$

Матрицю W^2 можна подати у вигляді $W^2=HKH'$ де H — ортогональна, а $K=(b_i\delta_{ij})$ — діагональна матриця. Тоді згідно з рівністю (22)

$$\lambda_1(aKp_k+I)\tilde{v}_k=-\tilde{u}_k,\tilde{v}_k=H'v_k\ ,\tilde{u}_k=H'u_k\ .$$

Звідси, позначаючи $\tilde{V}=(\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_m)$, $\tilde{U}=(\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_m)$, $P=(p_k\delta_{ks})_{k,s=1}^{m}$, дістаємо рівняння $(aK\tilde{V}p+\tilde{V})\tilde{U}'=-\lambda_1^{-1}I$, за яким $a^2KB^2K+aKB+aBK+I=\lambda_1^{-2}I$, де $B=\tilde{V}P\tilde{V}$. Звідси $(aB+K^{-1})^2=\lambda_1^{-2}K^{-1}$. Отже, $\lambda_1=\mathrm{Sp}W^{-1}(a+\mathrm{Sp}W^{-2})^{-1}$. Наслідок 1 доведено.

Наслідок 2. Якщо $s=m$, $W=I$, то існує єдиний розв'язок рівняння (10) $A=(\lambda_i\delta_{ij})$, $\lambda_1=(a+j)^{-1}\sum_{k=1}^{j}\sqrt{\gamma_k}$, $\lambda_q=\sqrt{\gamma_q}$, $q=j+\overline{1,m}$, де j таке найбільше число, що $(a+j)^{-1}\sum_{k=1}^{j}\sqrt{\gamma_k}>\sqrt{\gamma_{j+1}}$.

Доведення. Цього разу рівняння (10) має вигляд

$$a\lambda_1\sum_{k=1}^{j} u_k v'_k p_k+\lambda_1\sum_{k=1}^{j} u_k v'_k+\sum_{k=j+1}^{m}\lambda_k u_k v'_k=-\sqrt{\Gamma}$$

або після трансгонування

$$a\lambda_1\sum_{k=1}^{j} u_k v'_k p_k+\lambda_1\sum_{k=1}^{j} u_k v'_k+\sum_{k=j+1}^{m}\lambda_k u_k v'_k=-\sqrt{\Gamma}.$$

З цих рівнянь дістаємо такі системи рівнянь:

$$a\lambda_1 v_k p_k+\lambda_1 v_k=-\sqrt{\Gamma}u_k,\quad k=\overline{1,j};$$

$$a\lambda_1 u_k p_k+\lambda_1 u_k=-\sqrt{\Gamma}v_k,\quad k=\overline{1,j};$$

$$\lambda_q v_q=-\sqrt{\Gamma}u_q,\quad q=\overline{j+1,m};\qquad \lambda_k u_q=-\sqrt{\Gamma}v_q,\quad q=\overline{j+1,m},$$

за якими

$$\lambda_q^2 v_q=\Gamma v_q,\quad q=\overline{j+1,s},$$

$$(a\lambda_1 p_k+\lambda_1)^2 v_k=\Gamma v_k,\quad k=\overline{1,j}.$$

Звідси

$$a\lambda_1 p_k+\lambda_1=\sqrt{\gamma_k},\quad k=\overline{1,j};\qquad \lambda_q=\sqrt{\gamma_q},\quad q=\overline{j+1,s},,$$

v_q — одиничні вектори. Отже,

$$\lambda_1=(a+j)^{-1}\sum_{k=1}^{j}\sqrt{\gamma_k},$$

де j таке найбільше число, що

$$(a+j)^{-1}\sum_{k=1}^{j}\sqrt{\gamma_k}\geq\sqrt{\gamma_{j+1}}.$$

Цього разу максимальне власне число буде кратним.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гирко В.Л.* S – Оценки // Вычисл. и прикл. математика. 1990. Вып. 71. С.90—97. 2. *Он же.* Многомерный статистический анализ. К., 1988. 320 с. 3. *Он же.* Спектральные уравнения для минимаксных оценок параметров линейных систем // Вычисл. и прикл. математика. 1987 Вып 63. С. 114—115. 4. *Drygas H.* Minimax estimation in linear models. Kassel, 1990. 9 p. 5. *Läuter H.* A minimax linear estimator for linear parameters under restrictions in form of inequalities // Math. Operationsf. u. Statistick, 1975. № 6. S. 689—695. 6. *Hoffman K.* Characterization of minimax linear estimators in linear regression // Ibid. № 10. S. 19—26. 7. *Кукс Я., Ольман В.* Минимаксная линейная оценка коэффициентов регрессии // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.—мат. 1972. № 21. С. 66—72. 8. *Гирко В.Л.* Спектральная теория случайных матриц. М., 1988. 376 с. 9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. 740 с.

Надійшла до редколегії 27.11.89

Найдено множество оценок S_1 решений систем линейных уравнений со случайными параметрами. Доказано, что максимальное собственное число в критерии качества оценки в общем случае кратное.