УДК 519.21

М.В.ЕНДЖИРГЛИ, асп., Київ. ун-т

ПРО ОЦІНКУ ЙМОВІРНОСТІ ПЕРЕВИЩЕННЯ РІВНЯ ДЕЯКИМИ ВИПАДКОВИМИ РЯДАМИ

Наведені оцінки ймовірності перевищення рівня випадковими процесами, зображуваними у вигляді випадкових рядів

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\xi_k,$$

де випадкові величини ξ_k належать у сукупності простору $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$, при умовах, що забезпечують рівномірну збіжність рядів.

Ця праця є узагальненням роботи [1] для процесів, зображуваних у вигляді випадкових рядів $\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\xi_k$, де випадкові величини ξ_k належать у сукупності простору $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$.

Розглянемо $C(R^1)$ — простір неперервних, обмежених на R^1 функцій з нормою $\|f(t)\|=\sup_{t\in R^1}|f(t)|$.

Казатимемо, що послідовність функцій $\{f_k(t)\}$ з $C(R^1)$ належить класу B, якщо існує така неперервна функція $c(t)$, $|c(t)|<1$, $\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|dt<\infty$, що для будь-яких n, числової послідовності $\{r_k\}$ та $0<\Theta<1$ існує інтервал довжини $\delta_n(\Theta)<1$, $\delta_n(\Theta)\downarrow 0$, $n\to\infty$, на якому виконується нерівність

$$|c(t)\sum_{k=1}^{n} r_k f_k(t)|\ge(1-\Theta)\,\|c(t)\sum_{k=1}^{n} r_k f_k(t)\|.$$

Клас B був упроваджений в статті [2].

Нехай $\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\xi_k$ — випадковий процес, $M\xi(t)=0$, послідовність $\{f_k(t)\}$ належить класу B; $\{\xi_k\}$ — послідовність випадкових величин, що належить у сукупності простору $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$, тобто $M\xi_k=0$, $k\ge 1$, і для будь-яких $\lambda_1,\dots\lambda_n$

$$M\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\right\}\le\exp\left\{\varphi\left(\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j M\,\xi_i\xi_j\right)^{1/2}\right)\right\},$$

де $\varphi(\cdot)$ — N-функція Орлича [3, с. 16], $\varphi(x)=x^2/2$, $|x|\le x_0$. Простір $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$ був уведений у роботі [4]; у статті [5] був досліджений простір субгауссових ($\varphi(x)=x^2/2$) випадкових векторів і процесів.

Позначимо

$$S_m^n(t)=c(t)\sum_{k=m}^{n} f_k(t)\xi_k, \qquad R_m^n(t)=c(t)\sum_{k=m}^{n} b_k f_k(t)\xi_k,$$

$$Z_m^n(t)=\sum_{k=m}^{n} b_k f_k(t)\xi_k, \qquad (\Delta_m^n)^2= \| M\,(Z_m^n(t))^2 \|,$$

де $\{b_k\}$ — числова послідовність така, що $b_k>0$, $k\ge 1$, $b_k\uparrow\infty$, $k\to\infty$.

Лема 1. Для будь—яких $\nu\ge 0$, $0<\Theta<1$ має місце нерівність

$$M\exp\{\nu\,\|R_m^n(t)\|\}\le 2/\delta_n\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,dt\,\exp\{\varphi(\nu/(1-\Theta))\cdot\Delta_m^n\}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки можна вважати, що $\delta_n\le\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,dt$, і з імовірністю одиниця виконується нерівність [1]

$$\exp\{\nu\,\|R_m^n(t)\|\}\le 1/\delta_n\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,(\exp\{\nu/(1-\Theta)\cdot|Z_m^n(t)|\}-1)\,dt+1,$$

то

$$M\exp\{\nu\,\|R_m^n(t)\|\}\le 1/\delta_n\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,(M\exp\{\nu/(1-\Theta)\cdot|Z_m^n(t)|\}-1)\,dt+$$

$$+1\le 1/\delta_n\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,dt\,(2\exp\{\varphi(\nu/(1-\Theta))\,(\|M\,(Z_m^n(t))^2\|)^{1/2})\}-1)+1,$$

звідки з урахуванням попередніх позначень випливає твердження леми.

Теорема 1. Нехай існує така послідовність $\{b_k\}$, $b_k>0$, $k\ge 1$, $b_k\uparrow\infty$, $k\to\infty$, що виконуються умови

$$\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\,\Delta_m^k\ln\delta_k^{-1}/\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1})<\infty; \tag{1}$$

$$\Delta_m^n b_n^{-1}\ln\delta_n^{-1}/\varphi^{-1}(\ln\delta_n^{-1})\to 0,\quad n\to\infty. \tag{2}$$

Тоді для будь - яких $0<\Theta<1$ і $x\ge 0$ має місце нерівність

$$P\{\|S_m^\infty(t)\|>x\}\le D\exp\{-\varphi^s((1-\Theta)x/A_1)+2A_2/A_1\,q((1-\Theta)x/A_1)\}, \tag{3}$$

де

$$D=\max(1,\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,dt), \qquad A_1=\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k,$$

$$A_2=\sum_{k=m}^{\infty}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})\Delta_m^k\ln\delta_k^{-1}/\varphi^{-1}(\ln\delta_k^{-1}),$$

$\varphi^s(\cdot)$ — N-функція, доповняльна до N-функції $\varphi(\cdot)$, $q(\cdot)$, — неперервна справа функція така, що $q(0)=0$, $q(x)>0$, $x>0$, $q(x)\uparrow\infty$, $x\to\infty$, $\varphi^s(x)=\int\limits_0^{|x|}q(t)dt$ [3, с. 22].

Доведення. Має місце формула (перетворення Абеля):

$$S_m^n(t)=\sum_{k=m}^{n-1}(b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1})R_m^n(t)+b_n^{-1}R_m^n(t)=\sum_{k=m}^{n}c_kR_m^k,$$

де $c_k=b_k^{-1}-b_{k+1}^{-1}$, $k=\overline{m,n-1}$ і $c_n=b_n^{-1}$. Отже, за нерівністю Гельдера для $\alpha_k\geq 1$ таких, що $\sum\limits_{k=m}^{n}\alpha_k^{-1}\leq 1$ і $\nu\geq 0$, маємо

$$M\exp\{\nu\,\|S_m^n(t)\|\}\leq\prod_{k=m}^{n}(M\exp\{\alpha_kc_k\nu\,\|R_m^k(t)\|\})^{1/\alpha_k}\leq$$

$$\leq\prod_{k=m}^{n}(2/\delta_k\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,dt\exp\{\varphi(\nu/(1-\Theta)\cdot\alpha_kc_k\Delta_m^k)\})^{1/\alpha_k}\leq$$

$$\leq\max(1,2\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,dt\exp\{\sum_{k=m}^{n}1/\alpha_k\cdot[\varphi(\nu/(1-\Theta)\times$$

$$\times\alpha_kc_k\Delta_m^k)+\ln\delta_k^{-1}]\}.$$

Позначимо $D=\max(1,2\int\limits_{-\infty}^{\infty}|c(t)|\,dt)$, $H_k=\nu/(1-\Theta)\cdot c_k\Delta_m^k$, $\mu=\varphi(\sum\limits_{k=m}^{n}H_k)$ і візьмемо $\alpha_k=\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1}+\mu)H_k^{-1}$.
Тоді виконується нерівність

$$M\exp\{\nu\,\|S_m^n(t)\|\}\leq D\exp\{\sum_{k=m}^{n}[\mu\cdot H_k/\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1}+\mu)+$$

$$+2\ln\delta_k^{-1}/\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1}+\mu)]\}\leq D\exp\{\mu+\sum_{k=m}^{n}H_k\ln\delta_k^{-1}/\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1})\}=$$

$$=D\exp\{\varphi(\nu/(1-\Theta)\cdot\sum_{k=m}^{n}c_k\Delta_m^k)+$$

$$+2\nu/(1-\Theta)\cdot\sum_{k=m}^{n}c_k\Delta_m^k\ln\delta_k^{-1}/\varphi^{(-1)}\ln\delta_k^{-1})\}. \qquad (4)$$

Нехай

$$A_1=\sum_{k=m}^{n}c_k\Delta_m^k,\qquad A_2=\sum_{k=m}^{n}c_k\Delta_m^k\ln\delta_k^{-1}/\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1}).$$

З (4) за нерівністю Чебишова випливає, що

$$P\{\|S_m^n(t)\|>x\}\leq M\exp\{\nu\,\|S_m^n(t)\|\}\exp\{-\nu x\}\leq$$

$$\leq D\exp\{-[vx-\varphi(v/(1-\Theta)\cdot\sum_{k=m}^{n}c_k\Delta_m^k)]+2v(1-\Theta)\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{n}c_k\Delta_m^k \ln\delta_k^{-1}/\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1})\},\ x\geq 0.$$

або з урахуванням наведених позначень

$$P\{\|S_m^n(t)\|>x\}\leq D\exp\{-[vx-\varphi(A_1v/(1-\Theta))]+2A_2v/(1-\Theta)\},$$

звідки

$$P\{\|S_m^n(t)\|>x\}\leq D\exp\{-\varphi^s((1-\Theta)x/A_1)+2A_2v^*/(1-\Theta)\},$$ де

$\varphi_s(x)=\sup\limits_{v>0}(vx-\varphi(v))$ – перетворення Юнга-Фенхеля функції $\varphi(v)$ (функція, доповняльна до функції $\varphi(v)$), а v^* є значення, при якому досягається $\sup\limits_{v>0}(vx-\varphi(A_1v/(1-\Theta)))$. Його знаходимо з рівняння

$A_1V^*/(1-\Theta)=q((1-\Theta)x/A_1)$ [3, с. 24]. Отже,

$$P\{\|S_m^n(t)\|>x\}\leq D\exp\{-\varphi^s((1-\Theta)x/A_1)+2A_2/A_1\cdot q((1-\Theta)x/A_1)\}.$$

При достатньо великому m $A_1\leq A_2$, оскільки за властивостями N-функцій $x/\varphi^{-1}(x)\to\infty,\ x\to\infty$, отже, $\ln\delta_k^{-1}/\varphi^{(-1)}(\ln\delta_k^{-1})\to\infty,\ k\to\infty$ [3, с. 18].

Тому при виконанні умов (1), (2) твердження теореми випливає з останньої нерівності, коли n прямує до нескінченності. Теорему доведено.

Наслідок. При $x>A_1$ має місце нерівність

$$P\{\|S_m^{\infty}(t)\|>x\}\leq D\exp\{-\varphi^s(x/A_1-1)-2A_2/A_1\cdot q(x/A_1-1)\}.$$

Для доведення досить взяти в (3) $\Theta=A_1/x,\ \ x>A_1$.

Розглянемо $\xi(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\cos\lambda_k t\cdot\xi_k+\sin\lambda_k t\cdot\eta_k)$ - стаціонарний процес з дискретним спектром, $M\,\xi(t)=0$. Припустимо, що $\{\xi_k,\eta_k\}$ — ортогональні випадкові величини, які належать у сукупності простору $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$, і $M\,\xi_k^2=M\,\eta_k^2=\delta_k^2$. Зауважимо, що $\{\cos\lambda_k t,\ \sin\lambda_k t\}$ є послідовність з класу B, причому $\delta_k(\Theta)=2\Theta(\lambda_k+2\varepsilon)^{-1}$ [6].

Візьмемо $c(t)=\sin\varepsilon t/\varepsilon t)^2,\ 0<\varepsilon\leq 1/2$.

Лема 2. Нехай виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^2\Big(\sum_{s=k}^{\infty}\delta_s^2\Big)^{-1/2}\ln(\lambda_k+1)/\varphi^{(-1)}(\ln(\lambda_k+1))<\infty. \tag{5}$$

Тоді для будь—яких $0<\varepsilon\leq 1/2,\ 0<\Theta<1,\ v\geq v_0$ такого, що $p(v_0)\geq 1$, де $p(v)$ — додатна при $v>0$, неперервна справа при $v\geq 0$ функція,

$p(0)=0$, $p(v)\uparrow\infty$, $v\to\infty$, і $\varphi(x)=\int\limits_0^{|x|} p(v)\,dv$ [3, с.16], має місце нерівність

$$M\exp\{\,v\,(\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2)^{-1/2}\|S_m^\infty(t)\|\,\}\le \pi/\Theta_\varepsilon\cdot\exp\{K(v)\},\tag{6}$$

$$S_m^\infty(t)=c(t)\sum_{k=m}^{\infty}(\cos\lambda_k t\cdot\xi_k+\sin\lambda_k t\cdot\eta_k),$$

$$K(v)=\varphi(v/(1-\Theta)\cdot[1+2^{1/2}\pi p^{1/2}(v)])+2C_m v/(1-\Theta)\cdot[2^{1/2}+p^{1/2}(v)],$$

$$C_m=\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2\,(\sum_{s=k}^{\infty}\delta_s^2)^{-1/2}\ln(\lambda_k+1)/\varphi^{(-1)}(\ln(\lambda_k+1)).$$

Д о в е д е н н я. Можна показати, що для досліджуваного процесу результат леми 1 має вигляд

$$M\exp\{\,v\,\|S_m^n(t)\|\,\}\le\pi(\lambda_n+1)/\Theta_\varepsilon\cdot\exp\{\varphi(v/(1-\Theta)\cdot\Delta_m^n)\},$$

де $(\Delta_m^n)^2=\sum\limits_{k=m}^{n}b_k^2\delta_k^2$.

Далі неважко переконатися, що

$$M\exp\{v\,\|S_m^\infty(t)\|\}\le\pi/\Theta_\varepsilon\cdot\exp\{\varphi(v/(1-\Theta)\cdot\sum_{k=m}^{\infty}c_k\Delta_m^k)+$$
$$+\,2v/(1-\Theta)\cdot\sum_{k=m}^{\infty}c_k\Delta_m^k\ln(\lambda_k+1)/\varphi^{(-1)}(\ln(\lambda_k+1))\}.\tag{7}$$

Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\sum\limits_{k=m}^{\infty}\delta_k^2\le 1$. Візьмемо

$$b_k=1+V/r(v)\cdot((\sum_{s=k}^{\infty}\delta_k^2)^{-1}-1)$$

при $v\ge v_0$ такого, що $r(v_0)\ge 1$, де $r(v)$ — неперервна справа функція, $r(v)>0$, $V>0$, $r(v)\uparrow\infty$, $v\to\infty$.

Як і в доведенні теореми 2 [1] можна дістати такі оцінки:

$$\sum_{k=m}^{\infty}c_k\Delta_m^k\le 1+2^{1/2}\pi r^{-1/2}(v);\tag{8}$$

$$\sum_{k=m}^{\infty}c_k\Delta_m^k\ln(\lambda_k+1)/\varphi^{(-1)}(\ln(\lambda_k+1))\le$$
$$\le(2^{1/2}+r^{1/2}(v))\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2(\sum_{s=k}^{\infty}\delta_s^2)^{-1/2}\ln(\lambda_k+1)/\varphi^{(-1)}(\ln(\lambda_k+1)).\tag{9}$$

Нехай $r(v)=p(v)$, де $p(v)$ — визначена вище функція. Тоді з нерівностей (7)—(9) випливає твердження леми 2.

Теорема 2. Якщо виконується умова (5), то при $x \geq \max\{2, 1+(1+h)p(2(1+h)q(2\pi^2/h^2))\}$, де $0<h<1$ — деяке фіксоване число, має місце нерівність

$$P\{(\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2)^{-1/2}\|S_m^{\infty}(t)\|>x\} \leq \pi/_{\varepsilon}\, x \exp\{-\varphi^s((x-1)/(1+h)) +$$
$$+ 2C_m(1+h)^{-1}q((x-1)/(1+h))[2^{1/2}+((x-1)/(1+h))^{1/2}]\}.$$

Доведення. З (6) і нерівності Чебишова випливає, що при ν, для яких $p(\nu)>=1$,

$$P\{(\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2)^{-1/2}\|S_m^{\infty}(t)\|>x\} \leq \pi/\Theta_{\varepsilon}\cdot\exp\{-[\nu x-$$
$$-\varphi\left(\nu/(1-\Theta)\cdot(1+2^{1/2}\pi p^{-1/2}(\nu))\right)]+2C_m\nu/(1-\Theta)\cdot(2^{1/2}+p^{1/2}(\nu))\}.$$

Розглянемо $\nu \geq q(2\pi^2/h^2)$, де h — деяке фіксоване число, $0<h<1$. Оскільки при цьому $p(\nu)\geq p(q(2\pi^2/h^2))\geq 2\pi^2/h^2$, то $2^{1/2}\pi p^{-1/2}(\nu)\leq h$ і

$$P\{(\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2)^{-1/2}\|S_m^{\infty}(t)\|>x\} \leq \pi/\Theta_{\varepsilon}\cdot\exp\{-[\nu x-$$
$$-\varphi((1+h)\nu/(1-\Theta))]+2C_m\nu/(1-\Theta)(2^{1/2}+p^{1/2}(\nu))\}. \quad (10)$$

Нехай ν^* є значення, при якому вираз $\nu x-\varphi((1+h)\nu/(1-\Theta))$ досягає супремума. Зауважимо, що $\nu^*=(1-\Theta)/(1+h)\cdot q((1-\Theta)x/(1+h))$. При таких значеннях x, що $\nu^*\geq q(2\pi^2/h^2)$, з (10) випливає нерівність

$$P\{(\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2)^{-1/2}\|S_m^{\infty}(t)\|>x\} \leq \pi/\Theta_{\varepsilon}\cdot\exp\{-\varphi^s((1-\Theta)x/(1+h)) +$$
$$+ 2C_m\nu^*/(1-\Theta)\cdot(2^{1/2}+p^{1/2}(\nu^*)))= \pi/\Theta_{\varepsilon}\cdot\exp\{-\varphi^s((1-\Theta)x/(1+h))+$$
$$+ 2C_m(1+h)^{-1}q((1-\Theta)x/(1+h))(2^{1/2}+p^{1/2}((1-\Theta/(1+h)\times$$
$$\times q((1-\Theta)x/(1+h)))\} \leq \pi/\Theta_{\varepsilon}\cdot\exp\{-\varphi^s((1-\Theta)x/(1+h)+$$
$$+ 2C_m(1+h)^{-1}q((1-\Theta)x/(1+h))(2^{1/2}+((1-\Theta)x/(1+h))^{1/2})\}.$$

Візьмемо $\Theta=1/x$, причому $x\geq\max\{2, 1+(1+h)p(2(1+h)q(2\pi^2/h^2))\}$, що забезпечує виконання умови $\nu^*\geq q(2\pi^2/h^2)$. Таким чином, остаточно маємо

$$P\left\{\left(\sum_{k=m}^{\infty}\delta_k^2\right)^{-1/2}\|S_m^{\infty}(t)\|>x\right\}\leq \pi/_{\varepsilon}\cdot x\exp\{-\varphi^s((x-1)/(1+h)) +$$
$$+ 2C_m(1+h)^{-1}q((x-1)/(1+h))\left(2^{1/2}+((x-1)/(1+h))^{1/2}\right)\Big\}.$$

Теорему доведено.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пашко А.А.* Об оценке вероятности превышения уровня гауссовскими случайными рядами // Теория вероятностей и мат. статистика. 1989. Вып. 41. С. 80—88. 2. *Бейсенбаев Е., Козаченко Ю.В.* Равномерная сходимость случайных рядов в нормах пространства Орлича // Некоторые вопросы теории случайных процессов. К., 1984. С. 10—16. 3. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958. 272 с. 4. *Козаченко Ю.В., Островский Е.И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятностей и мат. статистика. 1985. Вып. 32. С. 42—53. 5. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* Субгауссовские случайные векторы и

процессы // Там же. 1987. Вып. 36. С. 10—22. 6. *Козаченко Ю.В.* Условия равномерной сходимости гауссовских и близких к ним тригонометрических рядов в норме Люксембурга // Там же. 1983. Вып. 28. С. 59—70.

Надійшла до редколегії 29.04.91

Получены оценки вероятности превышения уровня случайными процессами, представимыми в виде случайных рядов

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\xi_k ,$$

где случайные величины ξ_k принадлежат в совокупности пространству $\overline{\mathrm{sub}}_\varphi(\Omega)$, при условиях, обеспечивающих равномерную сходимость рядов.

УДК 519.21

Н.М.ЗІНЧЕНКО,
канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
Київ. ун-т

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ОБЛАСТІ ПРИТЯГАННЯ СТІЙКОГО ЗАКОНУ З ПАРАМЕТРОМ $\alpha=1$

Для незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\xi_i\}$ з області нормального притягання стійкого закону з параметром $\alpha=1$ при деяких додаткових умовах на характеристичну функцію доведена можливість побудови стійкого процесу

$Y(t)=Y_\alpha(t)$, $t\geq 0$ з параметром $\alpha=1$ такого, що $|\sum_{i=1}^{n} \xi_i - Y_{(n)}| = 0(n^{1-\rho})$, $\rho>0$ майже напевне .

Нехай $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, де ξ_i, $i\geq 1$ незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.) з функцією розподілу (ф.р.) $F(x)$ і характеристичною функцією (х.ф.) $f(u)$, що належать до області нормального притягання стійкого закону з параметрами $\alpha\in(0,2)$, $|\beta|\leq 1$. Позначимо через $g_{\alpha\beta}(u)=\exp\{-|u|^\alpha(1-i\beta\,\mathrm{sign}\,(u)\omega(\alpha,u)\}$, де $\omega(\alpha,u)=\mathrm{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$ при $\alpha\neq 1$ і $\omega(\alpha,u)=-\frac{2}{\pi}\log|u|$ при $\alpha=1$, х.ф. та $G_{\alpha\beta}(\cdot)$ – ф.р. стійкого закону (якщо значення параметра β несуттєве індекс β не вживаємо).

Приналежність $\{\xi_j\}$ до області нормального притягання $G_{\alpha,\beta}$ означає, що нормовані суми

$$S_n^* = n^{-\alpha}(S_n - A_n) = n^{-\alpha}(\sum_{i\leq n}\xi_i - A_n).$$

збігаються за розподілом до $G_{\alpha\beta}$. Тут $A_n=0$ для $0<a<1$, $A_n = n\,E\,\xi_1$ для $1<\alpha<2$, $A_n=(2/\pi)\,\beta\,n\log n$ для $\alpha=1$.

У роботах останніх років [1—7] вивчалась можливість майже напевне (м.н.) наблизити S_n сумами стійких випадкових величин η_i з розподілом $G(\alpha,\beta)$. Точніше, вивчалися умови на $F(x)$ чи $f(u)$, за яких на одному імовірнісному просторі можна визначити послідовності $\{\xi_i\}$ і