процессы // Там же. 1987. Вып. 36. С. 10—22. 6. *Козаченко Ю.В.* Условия равномерной сходимости гауссовских и близких к ним тригонометрических рядов в норме Люксембурга // Там же. 1983. Вып. 28. С. 59—70.

Надійшла до редколегії 29.04.91

Получены оценки вероятности превышения уровня случайными процессами, представимыми в виде случайных рядов

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\xi_k\,,$$

где случайные величины ξ_k принадлежат в совокупности пространству $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$, при условиях, обеспечивающих равномерную сходимость рядов.

УДК 519.21

Н.М.ЗІНЧЕНКО,
канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
Київ. ун-т

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ОБЛАСТІ ПРИТЯГАННЯ СТІЙКОГО ЗАКОНУ З ПАРАМЕТРОМ $\alpha=1$

Для незалежних однаково розподілених випадкових величин (ξ_i) з області нормального притягання стійкого закону з параметром $\alpha=1$ при деяких додаткових умовах на характеристичну функцію доведена можливість побудови стійкого процесу

$Y(t)=Y_\alpha(t)$, $t\geq 0$ з параметром $\alpha=1$ такого, що $|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-Y_{(n)}|=0(n^{1-\rho})$, $\rho>0$ майже напевне.

Нехай $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, де ξ_i, $i\geq 1$ незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.) з функцією розподілу (ф.р.) $F(x)$ і характеристичною функцією (х.ф.) $f(u)$, що належать до області нормального притягання стійкого закону з параметрами $\alpha\in(0,2)$, $|\beta|\leq 1$. Позначимо через $g_{\alpha\beta}(u)=\exp\{-|u|^{\alpha}(1-i\beta\,\mathrm{sign}\,(u)\omega(\alpha,u)\}$, де $\omega(\alpha,u)=\mathrm{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$ при $\alpha\neq 1$ і $\omega(\alpha,u)=-\frac{2}{\pi}\log|u|$ при $\alpha=1$, х.ф. та $G_{\alpha\beta}(\cdot)$ – ф.р. стійкого закону (якщо значення параметра β несуттєве індекс β не вживаємо).

Приналежність $\{\xi_j\}$ до області нормального притягання $G_{\alpha,\beta}$ означає, що нормовані суми

$$S_n^{*}=n^{-\alpha}(S_n-A_n)=n^{-\alpha}(\sum_{i\leq n}\xi_i-A_n).$$

збігаються за розподілом до $G_{\alpha\beta}$. Тут $A_n=0$ для $0<a<1$, $A_n=n\,E\,\xi_1$ для $1<\alpha<2$, $A_n=(2/\pi)\,\beta\,n\log n$ для $\alpha=1$.

У роботах останніх років [1—7] вивчалась можливість майже напевне (м.н.) наблизити S_n сумами стійких випадкових величин η_i з розподілом $G(\alpha,\beta)$. Точніше, вивчалися умови на $F(x)$ чи $f(u)$, за яких на одному імовірнісному просторі можна визначити послідовності $\{\xi_i\}$ і

$\{\eta_i\}$ так, щоб

$$\Big|\sum_{i\le n}\xi_i-\sum_{i\le n}\eta_i\Big|=0(\varphi(n))\text{ м.н.} \tag{1}$$

та конкретизувався вигляд похибки $\varphi(n)$.

Аналогічне питання ставилося стосовно апроксимації S_n за допомогою стійкого процесу $Y_{\alpha\beta}(t)$. Так, у роботах [4—6] розглядався випадок, коли існують і скінченні псевдомоменти порядку $r>\alpha$. У цьому разі $\varphi(n)=n^{1/\alpha-\rho}$, $\rho>0$. Треба підкреслити, що майже у всіх роботах [1—4, 7] автори мали справу лише з симетричними випадковими величинами (тобто $\beta=0$), у статтях [5, 6] розглядався випадок, коли $\beta\ne0$, $\alpha\ne1$. Таким чином, притягання до стійкого закону з параметром $\alpha=1$ залишалося поза увагою. У цій статті досліджується саме такий випадок, коли $\alpha=1$.

Скрізь далі $\{\xi_i, i\ge1\}$ — н.о.р.в.в. з ф.р. $F(x)$ і х.ф. $f(u)$, що належать області притягання G_1. Припустимо, що існують такі $a_1,a_2>0$ і $l>\alpha$, що при $|u|<a_1$

$$|f(u)-g_1(u)|\le a_2|u|^{l}. \tag{2}$$

Відомі два методи доведення апроксимаційних тверджень типу (1) так званий «квантильний метод» [1—3] і метод, що базується на загальних апроксимаційних теоремах [8]. Ми використаємо другий метод і, таким чином, доповнимо результати робіт [4—6].

Лема 1. Якщо виконується (2), то для будь—якого n і $|u|<c_1n$

$$\left|f_n(u)-g_1(u)\right|\le c_2|u|^{l}n^{-(l-1)}\exp\{-c_3|u|\},$$

де $f_n(.)$ —х.ф. нормованої суми $S_n^*=n^{(-1)}S_n-(2/\pi)\beta\log n$, а константи $c_1,c_2,c_3>0$ залежать тільки від l, a_1, a_2.

Д о в е д е н н я. Випадок $\alpha\ne1$ розглянуто у роботі [9], де вивчались умови і швидкість збіжності сум н.о.р.в.в. до стійкого закону з параметром $\alpha\ne1$. Та незначна модифікація доведення [9] показує, що можна розглядати і випадок $\alpha=1$. Дійсно, $f_n(u)=f^n(u/n)\exp\{-(2/\pi)\beta\, i\, u\log n\}$, а $g_1(u)=g_1^n(u/n)\times$ $\times\exp\{-(2/\pi)\beta i u\log n\}$. Тоді

$$|f_n(u)-g_1(u)|=$$

$$=|\exp(-(2/\pi)\beta iu\log n)||g_1^n(u/n)||\gamma^n-1|=$$

$$|g_1(u)||\gamma^n-1|=e^{-|u|}|\gamma^n-1|\,e^{-|u|}|\gamma-1|\,|\sum_{j=0}^{n-1}\gamma^j|,$$

де $\gamma=f\left(\frac{u}{n}\right)/g_1\left(\frac{u}{n}\right)$.

Далі, як і в статті [9], для $u<c_1n$ дістаємо $\left|f\left(\frac{u}{n}\right)-g_1\left(\frac{u}{n}\right)\right|<a_2n^{-l}|u|^{l}$, $\left|g_1\left(\frac{u}{n}\right)\right|>e^{-|u/n|}>e^{-c_1}$, $|\gamma-1|\le c_2n^{-l}|u|^{l}$, $|\gamma|\le\exp\{|\gamma-1|\}\le\exp\{c_2n^{-l}|u|^{l}\}$ і для усіх

$j=1,\ldots,n-1$ $|y|^l\le \exp\{c_4n\}$. Отже, $\left|f_n(u)-g_1(u)\right|\le$ $\le c_2|u|^l n^{1-l}\exp(-c_3|u|)$, що і треба було довести.

Нехай $\xi\overset{d}{=}\eta$ означає, що розподіл випадкових величин (векторів) ξ і η однаковий, а $\{\xi_i, i\ge 1\}\overset{d}{=}\{\eta_i, i\ge 1\}$ чи $\{\xi(t), t\in R\}\overset{d}{=}\{\eta(t), t\in R\}$ вказує на рівність скінченно-вимірних розподілів; запис $f_1(t)\ll f_2(t)$ означає, що $f_1(t)=O(f_2(t))$.

Нехай $A=\max\{[10/(l-1)]+1,3\}$. Позначимо $r_m=\sum_{k=1}^{m}k^A$; $h_1=1$, $h_m=r_{m-1}+1$, $m\ge 2$; $H_m=\{i$ — ціле: $h_m\le i\le r_m\}$, $m\ge 1$. Зауважимо, що $\operatorname{card} H_m=m^A$, $h_{m+1}-h_m=m^A$, і $\forall n\in H_m$ має місце $m^{1+A}\ll h_m\le n\ll m^{1+A}$.

Розглянемо випадкові величини

$$X_k=k^{-A}\sum_{i\in H_k}\xi_i-\frac{2}{\pi}\beta\log k^A \qquad (3)$$

З одного боку, x_k — незалежні випадкові величини, з другого — x_k при $k\to\infty$ збігаються до стійкого закону $G_1(\cdot)$.

Лема 2. При виконанні умови (2) на одному імовірнісному просторі можна визначити послідовність н.о.р.в.в. $\{Y_k, k\ge 1\}$, що мають стійкий розподіл $G_1(\cdot)$, і послідовність н.о.р.в.в. $\{x'_k, k\ge 1\}$ так, щоб:

(a) $X_k\overset{d}{=}X'_k$, $k=1,2,3\ldots$,

(б) $|X'_k-Y_k|\ll k^{-2}$ м.н.

Д о в е д е н н я. Якщо існують такі $\lambda_k,\delta_k>0$ і $T_k>10^8\delta_k$ що $|E\exp(iuX_k)-g_1(u)|\le\lambda_k$ для $|u|<T_k$, то згідно з теоремою 1 [8] на одному імовірнісному просторі можна визначити послідовності незалежних випадкових величин $\{X'_k, k\ge 1\}$ і $\{Y_k, k\ge 1\}$ так, щоб $X'_k\overset{d}{=}X_k$, Y_k мали загальний розподіл $G_1(\cdot)$ і $P\{|X'_k-Y_k|\ge\Psi_k\}\le\Psi_k$, де $\Psi_1=1$, $\Psi_k=16T_k^{-1}\log T_k+4\lambda_k^{1/2}T_k+\delta_k$, $\delta_k=P(|Y_1|>T_k/4)$. Необхідні λ_k і T_k знаходимо за лемою 1. Дійсно, вибираючи $\lambda_k=ck^{-A(l-1)/2}$, $T_k=ck^3\ll k^A$, дістаємо $\delta_k\ll k^{-2}$ і $\Psi_k\ll k^{-2}$. Отже, за лемою Бореля — Кантеллі м.н. $|X'_k-Y_k|\ll k^{-2}$.

Лема 3. При виконанні (2) на одному імовірнісному просторі можна побудувати послідовність незалежних стійких величин $\{\eta_i, i\ge 1\}$ з ф.р. $G_1(\cdot)$ і н.о.р.в.в. $\{\xi_i, i\ge 1\}$ з ф.р. $F(x)$ так, щоб

$$\left|\sum_{i=1}^{r_m}\xi_i-\sum_{i=1}^{r_m}\eta_i\right|\ll r_m^{1-\rho^*},\quad \rho^*=2/(A+1). \qquad (4)$$

Д о в е д е н н я. Нехай випадкові величини x_k, $k=1,2,\ldots$ задаються співвідношенням (3), а Y_k, $k=1,2,\ldots$ побудовані в лемі 2. Тоді

$$S_{r_m}=\sum_{i=1}^{r_m}\xi_i=\sum_{k=1}^{m}k^A X_k+\frac{2}{\pi}\beta\sum_{k=1}^{m}k^A\log k^A.$$

Якщо η_i, $i\geq 1$ — незалежні випадкові величини з загальним розподілом $G_{1,\beta}(\cdot)$, то

$$\sum_{i=1}^{k^A}\eta_i\overset{d}{=}k^A Y_k+(2/\pi)\beta k^A\log k^A,$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^{r_m}\eta_i=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k^A}\eta_i\overset{d}{=}\sum_{k=1}^{m}k^A Y_k+\frac{2}{\pi}\beta\sum_{k=1}^{m}k^A\log k^A.$$

Отже, на одному досить багатому імовірнісному просторі (Ω,F,P) можна, не змінюючи їхній сумісний розподіл, перевизначити $\{\xi_i\}$ і $\{Y_k\}$ так, щоб на (Ω,F,P) існувала також послідовність н.о.р.в.в. $\{\eta_i\}$ з розподілом $G_{1,\beta}(\cdot)$, для якої виконується

$$\sum_{i=1}^{r_m}\eta_i=\sum_{k=1}^{r_m}k^A Y_k+(2/\pi)\beta\sum_{k=1}^{m}k^A\log k^A.$$

Згідно з лемою 2 отримаємо шукане

$$\left|S_{r_m}-\sum_{i=1}^{r_m}\eta_i\right|=\sum_{k=1}^{m}k^A(x_k-Y_k)\leq\sum_{k=1}^{m}k^A k^{-2}<<m^{A-1}<<h_m^{(A-1)/(A+1)}=h_m^{1-2/(A+1)}.$$

Зауваження. Скрізь далі однаково позначаємо як випадкові величини, так і їхні версії на більш багатому імовірнісному просторі.

Лема 4 [6]. З імовірністю 1 для всякого $\rho\in(0,1/(A+1))$

$$M_m^{(1)}=\left|\sum_{i=h_m}^{n}\xi_i\right|=0(h_m^{1-\rho});\tag{5}$$

$$M_m^{(2)}=\left|\sum_{i=h_m}^{n}\eta_i\right|=0(h_m^{1-\rho});\tag{6}$$

$$M_m^{(3)}=\sup_{h_m\leq y\leq h_{m+1}}\left|Y(t)-Y(h_m)\right|=0(h_m^{1-\rho});\tag{7}$$

Теорема 1. Нехай $F(x)$ задовольняє (2). Тоді на одному імовірнісному просторі можна визначити послідовності н.о.р.в.в. $\{\xi_i,i\geq 1\}$ з ф.р. $F(x)$ і н.о.р.в.в. $\{\eta_i,i\geq 1\}$ із стійким розподілом $G_1(\cdot)$ так, щоб

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right|=0(n^{1-\rho}),0<\rho<1/(A+1).$$

Твердження теореми легко випливає з оцінок (4)-(7).

Теорема 2. При виконанні умови (2) на одному імовірнісному просторі можна побудувати стійкий процес $Y(t)=Y_{1\beta}(t)$, $t\geq 0$ і послідовність н.о.р.в.в. $\{\xi_i,\ i\geq 1\}$ з ф.р. $F(x)$ так, щоб м.н. $|S_{[t]}-Y_{1\beta}(t)|=0(t^{1-\rho})$, $\rho<1/(A+1)$.

Доведення. Нехай $\{\xi_i, i\ge 1\}$ - н.о.р.в.в. з ф.р.. $F(x)$, $\{\eta_i, i\ge 1\}$ та $\{Y_k, k\ge 1\}$ - незалежні випадкові величини з розподілом $G_{1\beta}$, побудовані в лемі 3 так, щоб виконувалося (4). Розглянемо нормовані прирости стійкого процесу $Y_k^* = k^{-A}(Y(h_{k+1}) - Y(h_k) - (2/\pi)\beta k^A \log k^A)$.

Вони незалежні і однаково розподілені за законом $G_{1\beta}$, тобто $\{Y_k^*, k\ge 1\} \overset{d}{=} \{Y_k, k\ge 1\}$. Отже, згідно з теоремою Колмогорова на одному досить багатому імовірнісному просторі можна перевизначити послідовності $\{\xi_i\}$ та $\{\eta_i\}$, зберігаючи їхній сумісний розподіл так, щоб на цьому ж просторі (Ω, F, P) існував стійкий процес, для якого $Y_k^* = Y_k$, $k=1,2\ldots$

Нехай $n = [t]$ і $n \in H_m$. Тоді

$$Y(t) = \sum_{k<m} k^A Y_k + (2/\pi)\beta \sum_{k<m} k^A \log k^A + Y(t) - Y(h_m),$$

$$S_n = \sum_{k<m} k^A X_k + (2/\pi)\beta \sum_{k<m} k^A \log k^A + \sum_{i=h_m}^{n} \xi_i .$$

Таким чином,

$$|S_n - Y(t)| \le \sum_{k=1}^{m-1} k^A |X_k - Y_k| + \max_{n\in H_m} \left|\sum_{i=h_m}^{n} \xi_i\right| +$$

$$+\sup_{h_m\le t\le h_{m+1}} |Y(t) - Y(h_m)| = B_1 + B_2 + B_3 .$$

Як і при доведенні леми 3 м.н.

$$B_1 << \sum_{l=1}^{m-1} k^{A-2} << h_m^{1-\rho^*} << n^{1-2/(A+1)},$$

а з леми 4 випливає, що $B_1, B_2 = o(n^{1-\rho}), \rho < \dfrac{1}{A+1}$. Отже, $|S_n - Y(t)| = o(n^{1-\rho}) = o(t^{1-\rho})$ м.н., що і треба було довести.

Позначимо через $\mu(m) = \int x^m d(F(x) - G_{1\beta}(x))$ - m-й псевдоелемент, $\nu(m) = \int x^m d(F(x) - G_{1\beta}(x))$ - m-й абсолютний псевдоелемент.

Наслідок. Твердження теорем 1 і 2 залишаються вірними, якщо для деякого $l > \alpha = 1$

$$\nu(l) < \infty, \quad \mu(0) = \mu(1) = 0 . \tag{8}$$

Доведення легко випливає з того факту, що (8) водить до нерівності $|f(u) - g_{1\beta}(u)| \le c\nu(l)u^l$. Таким чином, виконується умова (3).

Зворотне твердження, як показує приклад [9] н.о.р.в.в. із щільністю $p(x) = \dfrac{1-\cos x}{\pi x^2}$ і х.ф. $f(u) = \begin{cases} 1 - |u|, & |u| \le 1, \\ 0, & |u| > 1, \end{cases}$ взагалі кажучи, не має місця. Дійсно, $|f(u) - g_{1,0}(u)| \le u^2/2$ при $|u| \le 1$, тобто

$l=2$, $l-1=1$ і теореми 1 і 2 виконуються з залишковим членом $o(n^{1-\rho})$, $0<\rho<1/12$. В той же час $\nu(r)=\infty$ $\forall r=1$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Stout W.* Almost sure invariance principles when $EX_1^2=\infty$ // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. 1979. 49, № 1. S.23-32. 2. *Fisher E.* An almost sure invariance principle for random variables in the domain of attraction of a stable law // Ibid/ 1984. 67, № 4. S.81-90. 3. *Mijnheer J.* Strong approximation of partial sums of i.i.d.r.v. in the domain of attraction of a symmetric stable distribution // Trans. 9 th Prague Conf. Inf. Theory. Statist. Decision. Functions. Random Processes. Prague, 1983. P.85-89. 4. A strong approximation theorem for sums of a random vectors in the domain of attraction to a stable law / I.Berkes, D.Dobrowski, H.Dehling, W.Philipp // Acta Math. Hung. 1986. 48, № 1-2. P.161-172. 5. *Зинченко Н.М.* Сильный принцип инвариантности для сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона // Теория вероятностей и ее применения. 1985. 30, вып.1. С.131-136. 6. *Она же.* Об асимптотике сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона // Укр. мат. журн. 1986. 38, № 6. С.713-718. 7. *Berkles I., Dehling H.* Almost sure and weak invariance principles for random variables attracted by a stable law // Probab. Theory and Related Fields. 1989. 38, № 3. P.331-353. 8. *Berkles I., Philipp W.* Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors // Ann. Probab. 1979. 7, № 1. P.29-54. 9. *Паулаускас В.И.* Оценки остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона // Лит. мат. сб. 1974. 14, № 1. С.165-187.

Надійшла до редколегії 20.02.91

Для независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i\}$ из области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha=1$ при некоторых дополнительных условиях на характеристическую функцию доказана возможность построения устойчивого процесса $Y(t)=Y_\alpha(t)$, $t\geq 0$ с параметром $\alpha=1$ такого, что $|\sum_{i=1} \xi_i - Y(n)| = o(n^{1-\rho})$, $\rho>0$ почти наверное.

УДК 519.21

Є.І.КАПЛАН, канд. фіз.-мат. наук,
ст. наук. співроб.,
Укр. геологорозвідув. ін-т

ЗБІЖНІСТЬ ОЦІНОК РОЗБИТТІВ У ЗАДАЧІ ПРО РОЗЛАД ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Досліджується задача апостеріорного оцінювання ділянок однорідності випадкового поля. Вивчаються умови спроможності та асимптотичний порядок збіжності оцінок. Аналізується залежність їх граничної поведінки від ергодичних властивостей поля, що спостерігається, та геометричної структури ділянок однорідності.

Нехай $T=[0,1]^n$ – одиничний n-вимірний куб ($n\geq 1$). Для заданих $m\geq 2$, $0<h<1/m$, $L<\infty$ означимо сім'ю $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{mhL}=\{\beta=(B_1,\ldots,B_m) : B_i \in F_{hL},\ i=\overline{1,m}\}$ припустимих розбиттів куба $T : \bigcup_{i=1}^{m} B_i=T$, $B_i \cap B_j=\varnothing$, $i\neq j$.

Припустимо, що елементи розбиттів B_i належать класу множин $F_{hL}=\{B\subset T : \mu_n(B)\geq h,\ \mu_{n-1}(\partial B)\leq L\}$ зі спрямлюваними межами ∂B, які задовольняють умову гладкості

$$\sup_{B\in F_{hL}} \mu_n(U_\varepsilon(\partial B))=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0. \tag{1}$$