$l=2$, $l-1=1$ і теореми 1 і 2 виконуються з залишковим членом $o(n^{1-\rho})$, $0<\rho<1/12$. В той же час $\nu(r)=\infty$ $\forall r=1$.


СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Stout W.* Almost sure invariance principles when $EX_1^2=\infty$ // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. 1979. 49, № 1. S.23-32. 2. *Fisher E.* An almost sure invariance principle for random variables in the domain of attraction of a stable law // Ibid/ 1984. 67, № 4. S.81-90. 3. *Mijnheer J.* Strong approximation of partial sums of i.i.d.r.v. in the domain of attraction of a symmetric stable distribution // Trans. 9 th Prague Conf. Inf. Theory. Statist. Decision. Functions. Random Processes. Prague, 1983. P.85-89. 4. A strong approximation theorem for sums of a random vectors in the domain of attraction to a stable law / I.Berkes, D.Dobrowski, H.Dehling, W.Philipp // Acta Math. Hung. 1986. 48, № 1-2. P.161-172. 5. *Зинченко Н.М.* Сильный принцип инвариантности для сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона // Теория вероятностей и ее применения. 1985. 30, вып.1. С.131-136. 6. *Она же.* Об асимптотике сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона // Укр. мат. журн. 1986. 38, № 6. С.713-718. 7. *Berkles I., Dehling H.* Almost sure and weak invariance principles for random variables attracted by a stable law // Probab. Theory and Related Fields. 1989. 38, № 3. P.331-353. 8. *Berkles I., Philipp W.* Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors // Ann. Probab. 1979. 7, № 1. P.29-54. 9. *Паулаускас В.И.* Оценки остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона // Лит. мат. сб. 1974. 14, № 1. С.165-187.



Надійшла до редколегії 20.02.91



Для независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i\}$ из области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha=1$ при некоторых дополнительных условиях на характеристическую функцию доказана возможность построения устойчивого процесса $Y(t)=Y_\alpha(t)$, $t\geq 0$ с параметром $\alpha=1$ такого, что $\left|\sum_{i=1} \xi_i - Y(n)\right| = o(n^{1-\rho})$, $\rho>0$ почти наверное.



УДК 519.21



*Є.І.КАПЛАН, канд. фіз.-мат. наук,*
*ст. наук. співроб.,*
*Укр. геологорозвідув. ін-т*


# ЗБІЖНІСТЬ ОЦІНОК РОЗБИТТІВ У ЗАДАЧІ ПРО РОЗЛАД ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ


Досліджується задача апостеріорного оцінювання ділянок однорідності випадкового поля. Вивчаються умови спроможності та асимптотичний порядок збіжності оцінок. Аналізується залежність їх граничної поведінки від ергодичних властивостей поля, що спостерігається, та геометричної структури ділянок однорідності.


Нехай $T=[0,1]^n$ – одиничний $n$-вимірний куб ($n\geq 1$). Для заданих $m\geq 2$, $0<h<1/m$, $L<\infty$ означимо сім'ю $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{mhL}=\{\beta=(B_1,\dots,B_m): B_i\in F_{hL}, i=\overline{1,m}\}$ припустимих розбиттів куба $T: \bigcup_{i=1}^m B_i=T$, $B_i\cap B_j=\varnothing$, $i\neq j$.

Припустимо, що елементи розбиттів $B_i$ належать класу множин $F_{hL}=\{B\subset T: \mu_n(B)\geq h,\ \mu_{n-1}(\partial B)\leq L\}$ зі спрямлюваними межами $\partial B$, які задовольняють умову гладкості

$$\sup_{B\in F_{hL}} \mu_n(U_\varepsilon(\partial B))=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0. \qquad (1)$$


© Є.І.Каплан, 1992

Тут $\mu_n$ – міра Лебега в $R^n$ (за означенням $\mu_0(\partial B)$ – «лічильна» міра в $R^1$, тобто кількість крайових точок у множині $B$); $U_\epsilon(\cdot)$ – $\epsilon$ -окіл множини. Будемо ототожнювати розбиття, які відрізняються (з точністю до $\mu_n$-нульових підмножин) лише зміною місць компонентів $B_1,\dots,B_m$.

Розглянемо на $\mathcal{B}$ метрику

$$d(\beta',\beta'')=\min_{\{s_i\}}\sum_{i=1}^{m}\mu_n(B_i'\,\overline{B_{s_i}''}),$$

де символом $\overline{B}=T\setminus B$ позначається доповнення множини $B$, а мінімум відшукується по всіх можливих переставленнях $\{s_1,\dots,s_m\}$ набору індексів $\{1,\dots,m\}$. Метричний простір $\mathcal{B}$ є компактним [1].

Досліджується задача оцінювання невідомого розбиття $\beta^*$ за реалізацією «кусково однорідного» випадкового поля $\eta_N(t)=\{\eta^{(i)}(t),\ t\in D_N B_i^*,\ i=\overline{1,m}\}$, що спостерігається у вузлах рівномірної решітки $D_N=\{t\in T: t=(k_1N^{-1},\dots,k_nN^{-1}),\ k_i=\overline{0,N},\ i=\overline{1,n}\}$. Тут $\eta^{(i)}(t)$ – задані на множинах $B_i^*$ однорідні випадкові поля зі значеннями у вимірному просторі $(X,F_X)$.

Для оцінювання $\beta^*$ використовуються розбиття

$$S_N=\arg\max_{\beta\in\mathcal{B}}\xi_N(\beta), \tag{2}$$

на яких досягає свого максимуму визначений на $\mathcal{B}$ неперервний випадковий функціонал

$$\xi_N(\beta)=\sum_{i=1}^{m}\mu_n(B_i)^{-1}\left\|\sum_{t\in D_N B_i}g(\eta_N(t))\right\|_W^2. \tag{3}$$

У цьому співвідношенні $g(x)=(g_1(x),\dots,g_p(x))$ – деяка $F_X$-вимірна векторна функція з обмеженими компонентами $\sup_x|g_i(x)|\le H$; $\|y\|_W^2=yWy^T$ – норма в $R^p$, яка породжена симетричною позитивно визначеною $(p\times p)$-матрицею $W$.

У статті [1] вивчались загальні умови $d$-спроможності оцінок (2): $\gamma_N=\sup_{\beta\in S_N}d(\beta,\beta^*)\xrightarrow{P}0,\ N\to\infty$. При цьому виникали нерівності вигляду $P\{\gamma_N>\epsilon\}\le b(\epsilon)\,c(N)$, в яких досліджувалась швидкість збіжності до нуля при $N\to\infty$ послідовностей $C(N)$, а конкретний вигляд співмножників $b(\epsilon)$ не уточнювався. Тим часом являє неабиякий інтерес вивчення в явному вигляді швидкості збіжності оцінок, тобто визначення невипадкової нормуючої функції $a_N\to\infty$, для якої

$$a_N\gamma_N\xrightarrow{P}0,\quad N\to\infty. \tag{4}$$

Це потребує деталізації та уточнення відповідних викладок і, зокрема, пошук точних оцінок за $\epsilon$ для величин $b(\epsilon)$.

Нехай $G_i=(G_{i,1},\dots,G_{i,p})$ – математичне сподівання $p$-вимірного поля $g\,(\eta_N(t))$ на $i$-й ділянці однорідності: $G_{ij}=M\, g_j\,(\eta_{(i)}(t))$, $t\in B_i^{*}$, $i=\overline{1,m}$. Припустимо, що виконується вимога невиродженості задачі про розлад

$$G_i \neq G_j \text{ при } i\neq j. \tag{5}$$

Розглянемо суми центрованих випадкових величин

$$V_N^{ij}(B)=N^{-n}\sum_{t\in D_N B} g_j\,(\eta^{(i)}(t))-G_{ij}\,\mu_n(B),$$

побудовані по спостереженнях поля в точках множини $B$, та позначимо

$$Q_N(\varepsilon)=\max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}\ \sup_{B\in B_i^{*}\mathcal{F}_{h,L}} P\ \{\,|V_N^{ij}(B)|>\varepsilon\,\}.$$

Нехай $\Pi\,(\varepsilon)=\Pi\,(\varepsilon,F_{h,L},d_\mu)$ – мінімальна кількість елементів $\varepsilon$-сітки $\mathcal{F}_{h,L}(\varepsilon)$, побудованої на множинах $\mathcal{F}_{h,L}(\varepsilon)$, відстань між якими задається метрикою $d_\mu\,(B',B'')=\mu_n\,(B'\Delta B'')$ ($\Delta$ – символ симетричної різниці множин).

Теорема 1. Нехай $\beta^{*}\in\mathcal{B}$, виконано умову (5) та

$$\Xi_{\varepsilon,N}=\Pi\,(\varepsilon\, a_N^{-1})\,Q_N\,(\varepsilon\, a_N^{-1})\to 0\ ,\ N\to\infty,\ \varepsilon>0, \tag{6}$$

де послідовність чисел $a_N\to\infty$ задовольняє одну з вимог:

1) $\limsup\limits_{N\to\infty} N^{-1}a_N<\infty$ або

2) $\liminf\limits_{N\to\infty} N^{-1}a_N=\infty,\ \limsup\limits_{N\to\infty} N^{1-n}a_N=0.$

Тоді оцінки (2) є $d$-спроможними і $P\ \{a_N\gamma_N>\varepsilon\,\}=O\,(\Xi_{c\varepsilon,N})$, $N\to\infty$ для деякої константи $c>0$.

Доведення. Скористаємося нерівністю, яку можна отримати аналогічно співвідношенню (10) роботи [1]:

$$\gamma_N\le c'\max_{\substack{1<+i\le m\\ 1\le j\le p}}\ \sup_{B\in B_i^{*}F_{h,L}}|V_N^{ij}(B)|\ , \tag{7}$$

де $c'$ – залежна від $m,h,p,H$ константа.

Апроксимуємо множини $B\in\mathcal{F}_{h,L}$ елементами $B'$ $\delta_N$-сітки $\mathcal{F}_{h,L}(\delta_N)$ : $\mu_n\,(B\,\Delta\,B')<\delta_N$. Вибираючи послідовність $\delta_N\to 0$, припускаємо такі випадки: а) $\liminf\limits_{N\to\infty} N\,\delta_N>0$; б) $\limsup\limits_{N\to\infty} N\,\delta_N=0$;

Оцінимо величину $|B\,\Delta\,B'\,|_N$ – кількість елементів $D_N$ у множині $B\,\Delta\,B'$. Для цього розглянемо елементарні кубики зі стороною $1/N$, центри яких розташовані у вузлах сітки $D_N$. Всі такі кубики, що мають спільні точки з множиною $B\,\Delta\,B'$, належать її $n^{1/2}N^{-1}$-околу. Тому з урахуванням (1) їхня кількість не перевищує $\mu_n(U_{n^{1/2}N^{-1}}(B\Delta B'))\times$ $\times N^{n}\le c''\,(n^{1/2}N^{-1}+\delta_N)N^{n}$. У випадку а) це веде до нерівності $|B\Delta B'\,|_N\le 2\,c''\delta_N N^{n}$. У ситуації б) всі елементарні кубики, що розглядаються, перетинаються межою множини $B\,\Delta\,B'$ (відсутні внутрішні вічки). Тому за означенням сім'ї $\mathcal{F}_{h,L}$ маємо $|B\Delta B'\,|_N\le c''N$.

Якщо взяти $r_N=2\,\delta_N$ у випадку а) та $r_N=N^{1-n}$ у випадку б), то отримаємо оцінку

$$|B \Delta B'|_N \le c'' N^n r_N \tag{8}$$

для деякої константи $c''>0$ рівномірно за $B \in \mathfrak{F}_{h\perp}$.

З нерівності (8) дістаємо

$$\sup_{B \in B_i^{\bullet}\mathfrak{F}_{h\perp}} \min_{B' \in B_i^{\bullet}\mathfrak{F}_{h\perp}(\delta_N)} |V_N^{i,j}(B)-V_N^{i,j}(B')| \le 2HN^{-n} \sup_{B \in \mathfrak{F}_{h\perp}} \min_{B' \in B_i^{\bullet}\mathfrak{F}_{h\perp}(\delta_N)} |B\Delta B'|_N \le$$

$$\le 2Hc'' r_N,$$

отже, для достатньо великих $N$.

$$\sup_{B \in B_i^{\bullet}\mathfrak{F}_{h\perp}} |V_N^{i,j}(B)| \le 2H c'' r_N + \max_{B' \in B_i^{\bullet}\mathfrak{F}_{h\perp}(\delta_N)} |V_N^{i,j}(B')|. \tag{9}$$

Беручи тепер $\delta_N=\varepsilon a_N^{-1}(8Hc'c'')^{-1}$, з урахуванням означення $r_N$, умов 1), 2) теореми 1 та нерівностей (7), (9) отримуємо

$$P\{a_N\gamma_N>\varepsilon\} \le P\{2Hc'' a_N r_N > \varepsilon/2c'\} +$$

$$+mp\,\Pi(\delta_N) \max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}} \max_{B' \in B_i^{\bullet}F_{h\perp}(\delta_N)} P\{|V_N^{i,j}(B')| > \varepsilon a_N^{-1}/2c'\} \le$$

$$\le mp\,\Pi(\delta_N)\, Q_N(\varepsilon a_N^{-1}/2c') \le mp\, \Xi_{c\varepsilon N} \tag{10}$$

з константою $c=\min\{(8Hc'c'')^{-1}, (2c')^{-1}\}$.

Із співвідношення (10) випливає твердження теореми 1.

Таким чином, дослідження асимптотичної поведінки оцінок (2) можна звести до вивчення швидкості збіжності до нуля невипадкових послідовностей $\Xi_{\varepsilon N}$. Для цього достатньо отримати точні верхні оцінки величин $\Pi(\varepsilon)$, $Q_N(\varepsilon)$, які в співвідношенні (6) характеризують відповідно ентропійні якості класу множин $\mathfrak{F}_{h\perp}$ та ергодичні якості поля $\eta_N(t)$ на ділянках однорідності.

Оцінку $\Pi(\varepsilon)$ можна отримати, конструюючи елементи $\varepsilon$-сітки $\mathfrak{F}_{h\perp}(\varepsilon)$ з $n$-вимірних кубиків – вічок сітки $D_N$ при відповідному $N \sim \varepsilon^{-1}$. При цьому величина $\Pi(\varepsilon)$ не буде перевищувати загальної кількості комбінацій таких кубиків, тобто має місце нерівність

$$\log_2 \Pi(\varepsilon) \le N^n \le c\varepsilon^{-n}. \tag{11}$$

Використовуючи додаткові обмеження на сім'ю припустимих розбиттів (звужуючи клас $\mathfrak{F}_{h\perp}$), можна дістати більш точний порядок по $\varepsilon$ величин $\Pi(\varepsilon)$. Так, якщо межі множин з $\mathfrak{F}_{h\perp}$, що розглядаються як функції від $x \in R^n$, мають обмежені похідні аж до порядку $\alpha$ (умова $\alpha$-диференційовності [2,3]), то з результатів [2] випливає оцінка.

$$\log_2 \Pi(\varepsilon) \le c\varepsilon^{-n/\alpha}. \tag{12}$$

Експоненціальні оцінки можна замінити степеневими, якщо $\mathfrak{F}_{h\perp}$ є клас Вапніка-Червоненкіса. Тоді

$$\Pi(\varepsilon) \le c\varepsilon^{-\omega}, \tag{13}$$

де показник $\omega$ зветься місткістю сім'ї $\mathfrak{F}_{h\perp}$ і може оцінюватися для різних конкретних класів множин. Приклади таких множин з гладкими або кусково гладкими межами, які задовольняють умову (1), наведені в роботах [2,4]. Зауважимо також, що для класів $\mathfrak{F}_{h\perp}$ зі скінченною кількістю множин ( card $(\mathcal{T}_{hL})=k<\infty$) значення П $(\varepsilon)$ не залежить від $\varepsilon$.

Оцінка величин $Q_N(\varepsilon)$ грунтується на використанні відповідних нерівностей для сум обмежених випадкових величин. Якщо спостереження $\eta_N(t)$, $t \in D_N$ незалежні (такі ситуації виникають, наприклад, в задачах аналізу розбиттів [5]), то за допомогою нерівності Бернштейна [2] отримуємо

$$Q_N(\varepsilon) \leq 2 \exp \{-\frac{1}{4}\varepsilon^2 N^{\,n} H^{-2}\}. \tag{14}$$

Якщо випадкові поля $\eta^{(i)}(t)$ задовольняють умову сильного перемішування [6, с.37] з коефіцієнтами $\sup\limits_{1\leq i\leq m} \rho_i(u) \leq \rho(u) \to 0,\ u \to \infty$,

(розглядається нормуюче перетворення області визначення: $u=tN$, $t \in T$) і при деякому $s \geq 1$

$$\int\limits_0^\infty u^{ns-1}\rho(u)du < \infty, \tag{15}$$

то, використовуючи моментні нерівності для слабкозалежних випадкових полів [6, с.47], дістаємо оцінку.

$$Q_N(\varepsilon) \leq \max_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq p}} \sup_{B \in B_i^* \mathcal{T}_{hL}} \varepsilon^{-2s} M \{V_N^{i,j}(B)\}^{2s} \leq$$

$$\leq c\varepsilon^{-2s} N^{-2ns} \max_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq p}} \sup_{B \in B_i^* \mathcal{T}_{hL}} |B|_N^s \leq c\varepsilon^{-2s} N^{-ns}. \tag{16}$$

Комбінуючи оцінки (11) – (13) для класів $F_{hL}$ з вимогами до полів $\eta_N(t)$, які приводять до моментних нерівностей (14), (16), можна сформулювати у явному вигляді результати про збіжність оцінок (2). Зокрема, як наслідки теореми 1 дістаємо такі твердження про швидкість збіжності у співвідношенні (4).

Теорема 2. Нехай $\beta^* \in \mathcal{B}$, виконано умову (5), а випадкові величини $\eta_N(t)$, $t \in D_N$ незалежні. Тоді має місце збіжність (4) з нормуванням $a_N = o(N^{\,n/(n+2)})$. Для класів множин з $\alpha$-диференційовними межами $a_N = o(N^{\,\alpha n/(n+2\alpha)})$; для класів Вапніка-Червоненкіса $a_N = o(N^{\,n/2}(\ln N)^{-1/2})$; при card $(\mathcal{T}_{hL}) < \infty$ $a_N = o(N^{\,n/2})$.

Теорема 3. Нехай $\beta^* \in \mathcal{B}$, випадкові поля $\eta^{(i)}(t)$ задовольняють умову сильного перемішування і виконано вимоги (5), (15). Тоді має місце (4) з нормуванням $a_N = o((\ln N)^{1/n})$. Для класів множин з $\alpha$-диференційовними межами $a_N = o((\ln N)^{\alpha/n})$; для класів Вапніка-Червоненкіса $a_N = o(N^{\,ns/(2s+\omega)})$; при card $(F_{hL}) < \infty$ $a_N = o(N^{\,n/2})$.

Доведення теорем 2, 3 полягає в підстановці у співвідношення (6) відповідних виразів для П $(\varepsilon a_N^{-1})$, $Q_N(\varepsilon a_N^{-1})$ з (11) - (16) та визначенні максимального порядку $a_N$, при якому $\Xi_N \to 0$, $N \to \infty$.

Наведені твердження узагальнюють і уточнюють ряд результатів, отриманих раніше як при $n=1$ (класичний варіант задачі про розлад), так і при $n \geq 2$ (аналіз випадкових полів). У роботах [3, 7] у схожій ситуації вивчалися умови збіжності оцінок в окремому випадку $m=2$. Розглядалася метрика Хаусдорфа, а швидкість збіжності оцінок області $B_1^*$ пов'язувалась з вимірністю параметричного виразу для поверхні поділу [7] або зі степенем диференційовності межі [3]. Теореми 1 - 3 у більш загальному непараметричному випадку виявляють зв'язок швидкості збіжності оцінок з припустимою складністю областей однорідності і степенем залежності значень поля у сусідніх вузлах сітки спостережень.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Каплан Е.И.* К задаче о разладке для случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. 1990. 35, вып.2. С.353-358. 2. *Dudley R.M.* A course on empirical processes // Lecture Notes in Math. 1984. 1097. P. 2-142. 3. *Коростелев А.П.* Минимаксное восстановление плоских изображений // Статист. пробл. упр. 1988. Вып.83. С.235-239. 4. *Assonad P.* Densite et dimension // Ann. Inst. Fourier. 1983. 33, N 3. P. 233-282. 5. *Моамяги А.В.* Некоторые задачи статистического анализа классификаций. Таллинн, 1982. 23 с. 6. *Леоненко Н.Н., Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей. К., 1986. 216 с. 7. *Бродский Б.Е., Дарховский Б.С.* Апостериорный метод обнаружения разладки случайного поля // Статист. пробл. упр. 1984. Вып. 65. С.41-47.

Надійшла до редколегії 13.07.90

Исследуется задача апостериорного оценивания участков однородности случайного поля. Изучаются условия состоятельности и асимптотический порядок сходимости оценок. Анализируется зависимость их предельного поведения от эргодических свойств наблюдаемого поля и геометрической структуры областей однородности.

УДК 519.21

*Т.Л.КОВАЛЬ, асп., Київ. ун-т*

# ПРО ТОЧНІСТЬ НОРМАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ОЦІНОК КОЕФІЦІЄНТІВ РЕГРЕСІЇ ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ

Вивчається швидкість збіжності в центральній граничній теоремі для оцінок найменших квадратів векторного коефіцієнта регресії випадкового поля з перемішуванням.

Оцінки швидкості збіжності до нормального закону сум випадкових полів, добуті в роботах [1-3], для сум векторних полів у статтях [4, 5]. У роботі [6] доведена теорема, яка установлює асимптотичну нормальність оцінок найменших квадратів (о.н.к.) векторного коефіцієнта регресії випадкового поля. В нашій статті отримана оцінка швидкості збіжності до нормального закону в згаданій теоремі.

Розглянемо випадкове поле

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{q} \varphi_k(t)\theta_k+\varepsilon(t),$$

де $\varphi_k(t) : Z^d \to R^1$, $k=\overline{1,q}$ – відомі функції, $\varepsilon(t) : Z^d \to R^1$ – випадкове поле з нульовим середнім. Нехай в $Z^d$ вилучена система обмежених зростаючих множин $A_n$, $\theta=(\theta_1,\ldots\theta_q)$ – невідомий параметр, який треба оцінити за даними спостереження випадкового поля $\varepsilon(t)$ на множинах $A_n$.

© Т.Л.Коваль, 1992