так і при $n \geq 2$ (аналіз випадкових полів). У роботах [3, 7] у схожій ситуації вивчалися умови збіжності оцінок в окремому випадку $m=2$. Розглядалася метрика Хаусдорфа, а швидкість збіжності оцінок області B_1^* пов'язувалась з вимірністю параметричного виразу для поверхні поділу [7] або зі степенем диференційовності межі [3]. Теореми 1 - 3 у більш загальному непараметричному випадку виявляють зв'язок швидкості збіжності оцінок з припустимою складністю областей однорідності і степенем залежності значень поля у сусідніх вузлах сітки спостережень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Каплан Е.И.* К задаче о разладке для случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. 1990. 35, вып.2. С.353-358. 2. *Dudley R.M.* A course on empirical processes // Lecture Notes in Math. 1984. 1097. P. 2-142. 3. *Коростелев А.П.* Минимаксное восстановление плоских изображений // Статист. пробл. упр. 1988. Вып.83. С.235-239. 4. *Assonad P.* Densite et dimension // Ann. Inst. Fourier. 1983. 33, N 3. P. 233-282. 5. *Маамяги А.В.* Некоторые задачи статистического анализа классификаций. Таллинн, 1982. 23 с. 6. *Леоненко Н.Н., Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей. К., 1986. 216 с. 7. *Бродский Б.Е., Дарховский Б.С.* Апостериорный метод обнаружения разладки случайного поля // Статист. пробл. упр. 1984. Вып. 65. С.41-47.

Надійшла до редколегії 13.07.90

Исследуется задача апостериорного оценивания участков однородности случайного поля. Изучаются условия состоятельности и асимптотический порядок сходимости оценок. Анализируется зависимость их предельного поведения от эргодических свойств наблюдаемого поля и геометрической структуры областей однородности.

УДК 519.21

Т.Л.КОВАЛЬ, асп., Київ. ун-т

ПРО ТОЧНІСТЬ НОРМАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ОЦІНОК КОЕФІЦІЄНТІВ РЕГРЕСІЇ ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ

Вивчається швидкість збіжності в центральній граничній теоремі для оцінок найменших квадратів векторного коефіцієнта регресії випадкового поля з перемішуванням.

Оцінки швидкості збіжності до нормального закону сум випадкових полів, добуті в роботах [1-3], для сум векторних полів у статтях [4, 5]. У роботі [6] доведена теорема, яка установлює асимптотичну нормальність оцінок найменших квадратів (о.н.к.) векторного коефіцієнта регресії випадкового поля. В нашій статті отримана оцінка швидкості збіжності до нормального закону в згаданій теоремі.

Розглянемо випадкове поле

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{q} \varphi_k(t)\theta_k+\varepsilon(t),$$

де $\varphi_k(t) : Z^d \to R^1$, $k=\overline{1,q}$ – відомі функції, $\varepsilon(t) : Z^d \to R^1$ – випадкове поле з нульовим середнім. Нехай в Z^d вилучена система обмежених зростаючих множин A_n, $\theta=(\theta_1,\ldots\theta_q)$ – невідомий параметр, який треба оцінити за даними спостереження випадкового поля $\varepsilon(t)$ на множинах A_n.

О.н.к. параметра θ має вигляд

$$\hat{\theta}_n = V_n^{-1} \sum_{t \in A_n} \varphi(t)\, \xi(t)\,,$$

де $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots \varphi_q(t))^T$, $V_n = \left(\sum_{t \in A_n} \varphi_k(t)\, \varphi_j(t)\right)_{k,j=\overline{1,q}}$. Очевидно, що $\hat{\theta}_n$ - незміщена оцінка θ ; її кореляційна матриця

$$\delta_n^2 = V_n^{-1} \sum_{t,s \in A_n} B(t-s) \varphi(t)\, \varphi^T(s) V_n^{-1}.$$

Нижче наведена оцінка швидкості збіжності розподілу о.н.к. випадкового поля до нормального розподілу.

Введемо діагональну матрицю $d_n^2 = \operatorname{diag}\,(d_i^2(t))_{i=\overline{1,q}}$, $d_i^2(t) = \sum_{t \in A} \varphi_i^2(t)$ і матричну міру $\mu(d\lambda)$ на $([-\pi,\pi]^n \mathcal{B}^n)$ з матрицею щільності $(\mu_{rj}(\lambda))_{r,j=\overline{1,q}}$, де

$$\mu_{rj}(\lambda) = \varphi_{jn}(\lambda) \varphi_{rn}(\lambda) \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} |\varphi_{jn}(\lambda)|^2 d\lambda \int_{[-\pi,\pi]^n} |\varphi_{rn}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{-1/2},$$

$$\varphi_{jn}(\lambda) = \sum_{A_n} \exp(i \langle \lambda, t \rangle)\, \varphi_j(t), \quad r,j = \overline{1,q}\,,$$

$[-\pi,\pi]^n$ - куб в R^n, $\mathcal{B}^n$ - δ-алгебра борелівських підмножин. Якщо у поля $\varepsilon(t)$, $t \in R^n$ існує спектральна щільність $f(\lambda)$, то

$$d_n \delta_n^2 d_n = (2\pi)^n \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} \mu_n(d\lambda) \right)^{-1} \int_{[-\pi,\pi]^n} f(\lambda) \mu_n(d\lambda) \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} \mu_n(d\lambda) \right)^{-1}.$$

Нехай існує міра μ на $[-\pi,\pi]^n$ така, що має місце слабка збіжність імовірнісних мір: при $A_n \to \infty$ $\mu_n \to \mu$ і $\operatorname{var} \mu = \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} \mu_{rj}(d\lambda) \right)_{r,j=\overline{1,q}}$ - невироджена матриця.

Якщо $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\pi]^n$ - неперервна і обмежена функція, то, як показано в роботі [6],

$$\lim d_n \delta_n^2 d_n = (2\pi)^n \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \int_{[-\pi,\pi]^n} f(\lambda)\, \mu(d\lambda) \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} \mu(d\lambda) \right)^{-1} = R^2.$$

Позначимо $B_n = R^{-1} d_n \delta_n^2 d_n R^{-1}$.

Теорема. Нехай $\varepsilon(t)$ - однорідне випадкове поле з перемішуванням, яке задовольняє умови:

1) $M \ |\varepsilon(0)|^{2+\delta} \le M_1 < \infty, \ \ \delta > 0$;

2) $\sup\limits_{\substack{A \in \mathfrak{m}(v_1) \\ B \in \mathfrak{m}(v_2)}} (|P(AB) - P(A)P(B)|) \le \alpha(\alpha(V_1, V_2)) \downarrow 0$;

де $\mathfrak{m}(V_i) = \delta(\varepsilon(t), t \in V_i)$, $d(t,s) = \max\limits_{1 \le i \le d} |t_i - s_i|$, причому $\alpha(m) = 0(m^{-a})$, $a = \beta d(2+\delta)(1+\delta)(q+3)\delta^{-2}$;

3) $f(\lambda) > 0$ на множині, міра якої додатна;

4) $\sup\limits_{t \in A_n} |\varphi_k(t)| / (\sum\limits_{t \in A_n} \varphi_k^2(t))^{1/2} \le a_k |A_n|^{-1/2}$, $|A_n|$ – число точок в A_n.

Тоді у поля $\varepsilon(t)$ існує неперервна і обмежена спектральна щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]^n$ і

$$\Delta_n = \sup_{A \in \mathfrak{L}} |P\{d_n(\hat{\Theta}_n - \Theta) \in A\} - P\{Y \in A\}| \le$$

$$\le C(\ln |A_n|)^{(q-1)/4}(\|I - B_n\| + |A_n|^{-\delta(\beta-1)/2\beta}), \qquad (1)$$

де $\mathfrak{L}$ – клас опуклих підмножин в R^q, $Y \in R^q$-гауссівський випадковий вектор, $MY = 0$, $CovY = I$,

$$\|B\| \max_{1 \le l \le q} \sum_{j=1}^{q} |b_{lj}|, \ \ B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,q}}, \beta > 1.$$

Теорема доводиться методом характеристичних функцій і грунтується на ідеях робіт [2-4].

Введемо позначення $X_n = (\varepsilon(\tau)S_{1,n}(\tau), \ldots \varepsilon(\tau)S_{q,n}(\tau))^T$, $S_{i,n}(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{q} \lambda_{ij}(n) d_j^{-1}(n)\varphi_j(\tau)$, $\Lambda_n = R^{-1} d_n V_n^{-1} d_n = (\lambda_{ij}(n))_{i,j=\overline{1,q}}$, причому $\lambda_{ij}(n) \to \lambda_{ij}$,

$$S_\tau^{(l)} = \left(\sum_{A_n \setminus B(\tau, lm)} \varepsilon(\nu) S_{1,n}(\nu), \ldots \sum_{A_n \setminus B(\tau, lm)} \varepsilon(\nu) S_{q,n}(\nu) \right)^T,$$

$B(\tau, lm)$ – куля в Z^d з центром у точці j радіуса lm, $\xi_\tau^{(l)} = \exp\{i < t, S_\tau^{(l-1)} - S_\tau^{(l)} >\} - 1$, $\langle .,. \rangle$ – скалярний добуток в R^d. Нехай $f_n(t)$ – характеристична функція суми $\sum\limits_{A_n} x_n$, $f_n(t) = M \exp\{i \langle t, \sum\limits_{A_n} x_n \rangle\}$, тоді

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t_k} = i \sum_{A_n} M(X_n^k \exp\{i \langle t, \sum_{A_n} X_n \rangle\}), \ \ k = \overline{1,q}, \ \ X_n^k = \varepsilon(\tau) S_{k,n}(\tau).$$

Використовуючи результати роботи [2], можна отримати зображення

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t_j}=T_0+\sum_{r=1}^{k}(T_1(r)+T_2(r)+T_3(r))+R_k\,, \tag{2}$$

де

$$T_0=\sum_{\tau\in A_n} M\,(X_n^j(\tau)e^{i\langle t,S_\tau^{(1)}\rangle}),\quad a_\tau(r)=M\,(X_n^j(\tau)\prod_{l=1}^{r-1}\xi_\tau^{(l)},$$

$$T_1(r)=\sum_{\tau\in A_n} a_\tau(r)f_n(t)\,,$$

$$T_2(r)=\sum_{\tau\in A_n} a_\tau(r)\,M\,(e^{i\langle t,S_\tau^{(r)}\rangle}-f_n(t))\,,$$

$$T_3(r)=\sum_{\tau\in A_n} M\,(X_n^j(\tau)\prod_{l=1}^{r-1}\xi_\tau^{(l)}e^{i\langle t,S_\tau^{(r)}\rangle}-M\,e^{i\langle t,S_\tau^{(r)}\rangle})),$$

$$R_k=\sum_{\tau\in A_n} M\,(X_n^j(\tau)\prod_{l=1}^{k}\xi_\tau^{(l)}e^{i\langle t,S_\tau^{(k)}\rangle})\,,$$

Лема 1. Нехай випадкове поле $\{\varepsilon\,(t)\,,\,t\in Z^d\}$ задовольняє умову сильного перемішування, випадкова величина ξ вимірна відносно $\mathfrak{M}(V_1)$, а величини η_j вимірні відносно $\mathfrak{M}(V_j)$, $j=2,\dots,r,d\,(V_i,V_k)>m$. Тоді:

1) якщо $|\eta_j|\le C_j\,,\,j=2,\dots,r$, то $|M\,(\eta_2,\dots\eta_r)|\le\prod_{k=2}^{r}M\,|\eta_k|+$ $+\,(r-1)\,C_2\dots C_r\,\alpha\,(m)$ [7];

2) якщо $|\xi|<C\,,\,M\,|\eta_2|^p<\infty\,,\,p\ge 1$, то $|M\,\xi\eta_2-M\,\xi\,M\,\eta_2|\le$ $\le 6CM\,|\eta_2|^p\alpha\,(m)^{1-1/p}$ [8];

3) якщо $M\,|\xi|^q<\infty\,,\,M\,|\eta_2|^p<\infty\,,q^{-1}+p^{-1}=\nu<1$, то $|M\,\xi\,\eta_2-$ $-M\,\xi\,M\,\eta_2|\le 8\,CM\,|\,\xi\,|^q\,M\,|\eta_2|^p\alpha\,(m)^{1-\nu}$ [8].

Далі будемо вважати, що

$$C^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha\,(\nu)^{\delta/(2+\delta)}\nu^d<\infty; \tag{3}$$

$$2^k\,k\alpha\,(m)^{\delta/(2+\delta)}\le C\,|A_n|^{-w}\,. \tag{4}$$

Лема 2. Нехай $\|t\|$ така, що $4d\,\|t\|C_1m^{d/2}\,|A_n|^{-1/2}\le 1$, тоді $|a_\tau\,(r)\,|\le C_3\,|A_n|^{-1/2}(6r\,2^r\alpha\,(m)^{\delta/(2+\delta)}+C_1(r-1)^{3(d-1)/4}[C_2\,\|t\|m^{d/2}\times$ $\times\,|A_n|^{-1/2}(r-1)^{(d-1)/2}])$, де $C_1=(\sqrt{8}\,\pi)^{(d-1)/2}$, $C_2=4\,d\,2^{d/2}e^{(1-d)/2}C_3$, $C_3=a\chi M_1$.

Д о в е д е н н я. Використовуючи нерівність Мінківського, а також $|e^{ix}-1|\le x$, отримаємо оцінку

$$M^{1/s}|\xi_\tau^{(l)}|^s\le M^{1/s}\left|\sum_{k=1}^{q}t_k\left(\sum_{A_n\setminus B(\tau,(l-1)m)}\varepsilon(\nu)\,S_{k,n}(\nu)-\sum_{A_n\setminus B(\tau,lm)}\varepsilon(\nu)\,S_{k,n}(\nu)\right)\right|^s\le$$

$$\le M^{1/s}\left(\sum_{k=1}^{q}|t_k|\sum_{B(\tau,lm)\setminus B(\tau,(l-1)m)}|\varepsilon(\nu)S_{k,n}|\right)^s\le a\,\|t\|\,\chi\,|A_n|^{-1/2}\times$$

$$\times\sum_{B(\tau,lm)\setminus B(\tau,(l-1)m)}M^{1/s}|\varepsilon(\nu)|^s\le C_3\,\|t\|\,(2\,l\,m)^d\,|A_n|^{-1/2},\qquad (5)$$

де $a=\max\limits_{1\le k\le q}a_k$, $\chi=\sum\limits_i\sum\limits_j\lambda_{ij}$, $\|t\|=\sum\limits_{k=1}^{q}|t_k|$. Добуток величини $\xi_\tau^{(l)}$ розіб'ємо на добуток П' парних l і П' непарних l. Згідно з нерівністю Гельдера

$$|a_\tau(r)|\le(M(\Pi'\xi_\tau^{(l)})^2)^{1/2}(M(X_\tau^k\Pi'\,\xi_\tau^{(l)})^2)^{1/2}.$$

Застосовуючи лему 1, нерівність (5) і формулу Стірлінга дістаємо твердження леми.

Лема 3. В умовах теореми

$$|T_2(r)|\le a(r)C_3\,\|t\|\left((2\,r\,m)^{3d/2}C+|f_n(t)|\,C_3(2\,r\,m)^d|A_n|^{1/2}\right)$$

Д о в е д е н н я. Позначивши $\eta_\tau(r)=\exp\{i\langle t,S_\tau^{(r)}-S_\tau^{(0)}\rangle\}-1$, легко переконатись, що

$$|T_2(r)|\le M\left|\sum_{\tau\in A_n}a_\tau(r)(\eta_\tau(r)-M\,\eta_\tau(r))\right|+\left|f_n(t)\sum_{\tau\in A_n}a_\tau(r)M\,\eta_\tau(r)\right|\le$$

$$\le a(r)\left|\sum_{A_n\times A_n}\operatorname{cov}(\eta_\tau(r),\eta_\rho(r))\right|^{1/2}+a(r)\,|f_n(t)|\,\left|\sum_{A_n}M\,\eta_\tau(r)\right|.$$

Для оцінки першого доданка використовується п.3 леми 1, $p=q=2+\delta$:

$$\left|\sum_{A_n\times A_n}\operatorname{cov}(\eta_\tau(r),\eta_\rho(r))\right|\le 8\,|A_n|\left(M\,\eta\,(r)^{2+\delta}\right)^{2/(2+\delta)}\times$$

$$\times\sum_{A_n}\alpha\left(d\left(B(o,r,m),B(\tau,r,m)\right)\right).$$

За допомогою (3) і (5) дістанемо оцінки $\left(M\eta_{\tau}^{2+\delta}(r)\right)^{1/(2+\delta)} \le$
$\le \|\psi\| C_3 (2rm)^d |A_n|^{-1/2}$, $M\eta_{\tau}(r) \le \|\psi\| C_3 (2rm)^d |A_n|^{-1/2}$.

Всі ці нерівності дозволяють твердити, що лема доведена.

Лема 4.

$$T_1(2) = (-t_k + \theta_1(k,n,t)\, \|I - B_n\|\, \|\psi\| + \Theta_2(k,n,t)\, C_3 \|\psi\| \times$$
$$\times |A_n|\, \alpha(m)^{\delta/(2+\delta)} + \Theta_3(k,n,t)\, \|\psi\|^{1+\delta} C_3 (2m)^{d(1+\delta)}) f_n(t),$$

де $|\theta_i(k,n,t)| \le 1$.

Доведення. Розглянемо зображення $e^{ix} - 1 - ix = \theta |x|^{1+\delta}$. Тоді

$$T_1(2) = i\,M\Big(\sum_{\tau\in A_n} (\varepsilon(\tau) S_{k,n}\tau\; i \Big\{ \sum_{r=1}^{q} (t_r \sum_{v\in A_n} \varepsilon(v) S_{r,n}(v)) -$$

$$-\sum_{r=1}^{q} (t_r \sum_{A_n\setminus B(\tau,m)} \varepsilon(v)\, S_{r,n}(v)) + \theta_3(k,n,t) \; \Big|\sum_{r=1}^{q} t_r \sum_{B(\tau,m)} \varepsilon(v)\, S_{r,n}(v)\Big|\Big\}\Big)\Big) f_n(t).$$

Оцінимо перший доданок

$$-M\left(\sum_{i=1}^{q} \left\{ t_i \left(\sum_{A_n} S_{k,n}(\tau)\, \varepsilon(\tau) \sum_{A_n} S_{i,n}(v)\, \varepsilon(v) \right) \right\} \right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{q} t_i \left\{ \sum_{\tau, v\in A_n} B(\tau - v)\, S_{k,n}(\tau) S_{i,n}(v) \right\} = -t_k + t_k - \langle t, L_n^k \rangle =$$

$$= -t_k + \theta_1(k,n,t)\, \|I - B_n\|\, \|\psi\|, \tag{6}$$

B_n^k - k-й стовпець матриці B_n. Для оцінки другого доданка використовується п.3 леми 1:

$$M\left(\sum_{A_n} \left(S_{k,n}(\tau)\varepsilon(\tau) \sum_{i=1}^{q} \left(t_i \sum_{A_n\setminus B(\tau,m)} \varepsilon(v) S_{i,n}(v) \right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \{ t_i \sum_{A_n\setminus B(\tau,m)} M(S_{i,n}(v)\varepsilon(v) \sum_{A_n} S_{i,n}(\tau)\varepsilon(\tau)) \} =$$

$$= \theta_2(k,n,t)\, C_3^2\, \|\psi\|\, \alpha(m)^{\delta/(2+\delta)}. \tag{7}$$

Згідно з нерівністю Гельдера отримаємо для останнього доданка оцінку

$$\Big| M\{ \sum_{A_n} (S_{k,n}(\tau)\varepsilon(\tau)) \sum_{i=1}^{q} t_i \sum_{B(\tau,m)} \varepsilon(\tau) S_{i,n}(\tau))^{1+\delta} \} \Big| \le$$

$$\le M\Big(\Big(\sum_{i=1}^{q} |t_i| \Big|\sum_{B(\tau,m)} |S_{i,n}(v) \cdot (v)|\Big)^{1+\delta} \sum_{A_n} |S_{k,n}(\tau)\varepsilon(\tau)|\Big) \le$$

$$\le \|\psi\|^{1+\delta} C_3 (2m)^{d(1+\delta)} |A_n|^{-\delta/2}. \tag{8}$$

З нерівностей (6)-(8) випливає твердження леми.

За допомогою п.1, 3 леми 1 легко дістати

$$|T_0| \le 6\, C_3 |A_n|^{1/2} \alpha(m)^{(\delta+1)/(\delta+2)},$$
$$T_3(r) \le 6\, C_3\, 2^r |A_n|^{1/2} \alpha(m)^{(\delta+1)/(\delta+2)}.$$

Отже,

$$\Big|T_0 + \sum_{r=1}^{k} T_3(r)\Big| \le 2^k \alpha(m)^{(\delta+1)/(\delta+2)} C_3 |A_n|^{1/2}.$$

Для оцінки R_k фіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $k = k_n = = [\varepsilon \log |A_n|^{-\bullet}] + 1$. За умов леми 2 $\|t\| = T_0(n) \leq |A_n|^{1/2} / (e^k m^{d/2} (r-1)^{(d-1)/2})$, тому $k_n^{3(d-1)/4} [C_2 \|t\| m^{d/2} |A_n|^{-1/2} \times$
$\times (k_n - 1)^{(d-1)/2}]^{k_n - 1} \leq (\varepsilon \log |A_n|^{1/2})^{3(d-1)/4} |A_n|^{-k\varepsilon}$.

При фіксованому ε візьмемо $k(\varepsilon)$ таким, щоб $0{,}5\, k\, \varepsilon = 2$. З урахуванням оцінки леми 2 дістанемо

$$R_{k_n} = \theta_4 (k,n,t)\, C_3\, |A_n|^{1/2} (6\, k_n\, 2^{k_n}\, \alpha\, (m)^{d/(2+\delta)} + $$
$$+ (\varepsilon \log |A_n|^{1/2})^{5(d-1)/4})\, |A_n|^{-1}. \tag{9}$$

З лем 3 і 4 легко отримати оцінки

$$\left| \sum_{r=3}^{k} T_1(r) \right| \leq |f_n(t)|\, C_3\, (|A_n|^{1/2} k_n 2^{k_n} \alpha\, (m)^{d/(2+\delta)} + $$
$$+ \|t\|\, m^{d(1+\delta)} / |A_n|^{d/2}); \tag{10}$$

$$\left| \sum_{r=2}^{k_n} T_2(r) \right| \leq |f_n(t)|\, C_3\, \{ m^{d/2} k_n^{d/2+1} 2^{k_n} \|t\|\, \alpha\, (m)^{d/(2+\delta)} + $$
$$+ \|t\| (2m)^{d(1+\delta)/2} |A_n|^{-d/2} \} + \|t\|\, C_3 m^{3d/2} (2^{k_n} k_n^{3d/2+1} \alpha(m)^{d/(2+\delta)} + $$
$$+ \theta_5(k,n,t))\, |A_n|^{-1/2}. \tag{11}$$

Враховуючи оцінки (9)-(11), рівняння (4) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t_k} = (-t_k + \theta_1(k,n,t)\, \|t - B_n\| + a(t))\, f_n(t) + b(t),$$

де $b(t) = b_0 \theta_{2,1}(k,n,t) + b_1 \|t\| \theta_{2,2}(k,n,t)$, $a(t) = a_0\, \theta_{1,1}(k,n,t) + a_1 \|t\| \theta_{1,2}(k,n,t) + a_2 \|t\|^{1+\delta} \theta_{1,3}(k,n,t)$, $a_0 = |A_n|^{1/2} k_n 2^{k_n} \alpha\, (m)^{d/(2+\delta)}$, $a_1 = |A_n| \alpha\, (m)^{d/(2+\delta)}$, $a_2 = m^{d(1+\delta)} / |A_n|^{d/2}$, $b_0 = |A_n|^{1/2} k_n 2_{k_n} \times \alpha\, (m)^{d/(2+\delta)}$, $b_1 = m^{3d/2} \alpha\, (m)^{d/(2+\delta)} |A_n|^{-1/2}$.

Таким чином, отримана система диференціальних рівнянь з частинними похідними. Перепишемо її в більш загальному вигляді:

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t_k} = A_k(t) f_n(t) + B_k(t), \quad k = \overline{1,q}.$$

Оскільки функції B_k є неперервно диференційовні та $\dfrac{\partial A_k}{\partial t_j} = \dfrac{\partial A_j}{\partial A_k}$, можна скористатися методом Майєра. Тоді система диференціальних рівнянь з частинними похідними перейде у звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dZ}{du} = \sum_{i=1}^{q} v_i A_i(u\, v)\, Z(u,v) + \sum_{i=1}^{q} v_i B_i(u\, v),$$

розв'язок якого шукаємо у вигляді

$$Z(u,v) = \exp \{ \int_0^u \sum_{i=1}^{q} v_i A_i (x\, v)\, dx \} + \exp \{ \sum_{i=1}^{q} v_i \int_0^u A_i (x\, v) dx \} \times$$
$$\times \int_0^u (\sum_{i=1}^{q} v_i B_i (x\, v) \exp \{ -\sum_{i=1}^{q} v_i \int_0^x A_i (y\, v)\, dy \})\, dx.$$

Тоді розв'язок системи (4) буде таким:

$$f_n(t) = Z(1,t),$$

$$f_n(t)=e^{g(t)}+e^{g(t)}\sum_{l=1}^{q} t_l\int_0^1 \left(B_l(xt)\left(\exp\{-\sum_{l=1}^{q} t_l\int_0^x A_l(yt)\,dy\}\right)\right)dx\ , \quad (12)$$

$$g(t)=\sum_{l=1}^{q} t_l\int_0^1 A_l(xt)\,dx\ .$$

Підставляючи A_l та B_l в (12), отримаємо

$$|f_n(t)-\exp(-\|t\|^2/2)|\le \exp(-\|t\|^2/4)\,(a_0\|t\|+$$
$$+(a_1+\|I-B_n\|)\|t\|^2+a_2\|t\|^{2+\delta}+2b_1+\min(1,\|t\|)\,b_0\ ,$$
$$T_n=\min(1/a_0\ ,(1/a_1)^{1/\delta},T_0(n)).$$

У нашому випадку нерівність Садикової [9] має вигляд

$$\Delta_n\le C(\ln T_n)^{(q-1)/4}(I_1+I_2+T_n^{-1}(\ln T_n)^{-(q+1)/4})+C\,q^2(\ln T_n)/T_n,$$

де

$$I_1^2=\int_{\|t\|\le 1}\|t\|^{-2}\,|f_n(t)-e^{-\|t\|^2/2}|\,dt\ ,$$

$$T_n=|A_n|^{1/2}m^{-d(1+\delta^{-1})},$$

$$I_2^2=\int_{1\le\|t\|\le T_n}|f_n(t)-\exp(-\|t\|^2/2)|^2dt\ .$$

Згідно з роботою [4]

$$\Delta_n\le C\,(m^{d(1+\delta)}/|A_n|^{1/2}+\|I-B_n\|)\,(\ln T_n)^{(q-1)/4}\ .$$

Підставляючи $m=|A_n|^h$ і враховуючи $\alpha(m)=O(m^{-a})$ та умови (5), (6), знаходимо $w=(q+1)/2$, $a=\beta d(1+\delta)(2+\delta)(q+3)/\delta^2$, $\beta>1$, $h=\delta/2\beta d(1+\delta)$.

Остаточно

$$\Delta_n\le C\,(\ln T_n)^{(q-1)/4}(\|I-B_n\|+|A_n|^{-\delta(\beta-1)/2\beta})\ .$$

Наведемо приклад рівняння регресії, коли на швидкість збіжності (3) в центральній граничній теоремі не впливає член $\|I-B_n\|$. Нехай регресія має степеневий вигляд, тобто $\xi(t)=t_1^{\nu}t_2^{\nu}\theta+\varepsilon(t)$, $t\in Z^2$,де $\nu\ge 0$, $(\varepsilon(t), t\in Z^2)$ - випадкове однорідне поле, кореляційна функція якого $B(\tau)=C\,e^{-\|\tau\|}$, $\tau\in Z^2$. Прості розрахунки показують, що $|I-B_n|\le C_1/n$, $n\ge 1$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Булинский А.В.* Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. М., 1989. 134 с. 2. *Тихомиров А.Н.* О скорости сходимости в ЦПТ для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и ее применения. 1980. 25, вып.4. С.800-818. 3. *Xavier-Guyon, Richardson S.* Vitesse de convergence du theoreme de la limit central pous des champs faiblement dependants // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. 1984. 66, № 3. S.297-314. 4. *Сунклодас Й.* Уточнение скорости сходимости в многомерной ЦПТ для m-зависимых случайных векторов // Лит. мат. сб. 1985. 24, вып.2. С,177-183. 5. *Тихомиров А.Н.* О нормальной аппроксимации сумм векторных полей с перемешиванием // Докл. АН СССР. 1983. 272, № 2. С.312-314. 6. *Леоненко Н.Н., Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей. К., 1986. 216 с. 7. *Ибрагимов И.А., Линник Д.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М,, 1965. 524 с. 8. *Давыдов Ю.А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения. 1968. 13, вып.4. С.730-737. *Садикова С.М.* Расстояния между распреде-

лениями, связанные с их значениями на выпуклых множествах // Докл. АН СССР. 1967. 176, № 4. С.787-789.

Надійшла до редколегії 19.02.91

Изучается скорость сходимости в центральной предельной теореме для оценок наименьших квадратов векторного коэффициента регрессии случайного поля с перемешиванием.

УДК 519.21

Ю.В.КОЗАЧЕНКО, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Л.Ф.КОЗАЧЕНКО, мол. наук. співроб., Київ. ун-т

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ З АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ

Запропонована модель гауссового стаціонарного процесу з абсолютно неперервним спектром, яка відтворює цей процес з заданою надійністю та точністю в $L^2(0, T)$. При певних обмеженнях на коваріаційну функцію процесу наведено формули, що дають змогу обчислити параметри цієї моделі.

Нехай $\xi(t)$ - гауссів стаціонарний випадковий процес, $M\xi(t)=0$, з неперервною коваріаційною функцією $R(\tau)=M\xi(t+\tau)\xi(t)$ і спектральною функцією $F(\lambda)$, $R(\tau)=\int_0^\infty \cos\lambda\tau\, dF(\lambda)$. Припустимо, що існує інтеграл $\int_0^\infty |R(\tau)|d\tau$. Тоді $F(\lambda)$ абсолютно неперервна. Отже, $F(\lambda)=\int_0^\lambda f(u)\,du$, де $f(\lambda)$ - спектральна щільність $\xi(t)$.

У роботах [1, 2] було запропоновано метод моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів, який дозволяє конструювати моделі, що відтворюють процес $\xi(t)$ з заданими точністю в $L^2(0,T)$ та надійністю.

Модель процесу мала вигляд

$$\xi_N(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\tau_k(\eta_k^{(1)}\cos\lambda_k t+\eta_k^{(2)}\sin\lambda_k t), \tag{1}$$

де $\eta_k^{(i)}$, $i=1,2$ - незалежні гауссові випадкові величини такі, що $M\eta_k^{(i)}=0$, $D\eta_k^{(i)}=1$; $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{N-1}<\lambda_N=\Lambda$ - розбиття відрізку $[0,\Lambda]$. Будемо вважати, що $\lambda_k-\lambda_{k-1}=\dfrac{\Lambda}{N}$, Λ, N обираються в залежності від точності та надійності моделювання [2],

$$\tau_k^2=F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)=\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} f(u)du=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(\sin\lambda_{k+1}\tau-\sin\lambda_k\tau)\,R(\tau)d\tau.$$

Вважатимемо, що нам відома коваріаційна функція $R(\tau)$, а $f(\lambda)$, взагалі кажучи, не може бути обчислена в явному вигляді. Загальні