Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 51, 1994, стор. 148–150

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 51, 1994, pp. 148–150

ТЕОРЕМА БІРНБАУМА–ДВАССА–ПАЙКА ЯК НАСЛІДОК ПРОСТОЇ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ ЙМОВІРНОСТІ

УДК 519.21

Д. ФЕРГЕР

Резюме. Нехай τ_n це точка максимуму (єдина майже напевне) рівномірного емпіричного процесу. Використовуючи просту тотожність для розподілу порядкових статистик, ми даємо скорочене доведення того, що τ_n рівномірно розподілена на одиничному інтервалі.

1. Теорема Бірнбаума–Двасса–Пайка

Нехай $U_1, \dots, U_n$, $n \in \mathbf{N}$, незалежні випадкові величини з рівномірним розподілом на одиничному інтервалі, визначені на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Ми розглядаємо емпіричний процес

$$\alpha_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{I}_{\{U_i \le t\}} - t \right), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Враховуючи

$$\max_{0 \le t \le 1} \alpha_n(t) = n^{1/2} \max_{1 \le i \le n} \left(\frac{i}{n} - U_{i:n} \right),$$

де $U_{1:n} \le U_{2:n} \le \cdots \le U_{n:n}$ позначають порядкові статистики для $U_1, \dots, U_n$, ми бачимо, що α_n приймає максимальне значення в одній з точок $U_{i:n}$, $1 \le i \le n$. Ця точка максимуму (позначимо її τ_n) є єдиною на множині, що має ймовірність одиниця.

Наступна теорема доведена Бірнбаумом та Пайком [2] та Двассом [3].

Теорема. *Випадкова величина τ_n має рівномірний розподіл на $(0,1)$ для всіх $n \in \mathbf{N}$.*

Доведення Бірнбаума та Пайка [2] складається з виключно аналітичних міркувань. У той же час доведення Двасса [3] спирається на зв'язок між процесом Пуассона та рівномірно розподіленими випадковими величинами та на нетривіальну комбінаторну лему Андерсона [1]. Доведення Такача [6] цієї теореми використовує теорему про процеси з циклічно перестановними приростами. Порівняно елементарне доведення дав Куйпер [4], проте його закінчення потребує додаткових обгрунтувань.

Метою цієї коротенької роботи є відзначити яким чином можна вивести наведену вище теорему з наступної простої тотожності для ймовірностей:

$$\mathsf{P}\left(U_{i:n} \le \frac{i}{n+1}, : 1 \le i \le n \right) = \frac{1}{n+1} \quad \text{для всіх } n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 62E15, 62G30.

©1994 ТВіМС, Наукове видавництво

Співвідношення (1) можна довести елементарними ймовірнісними методами. Воно випливає також з рекурсії Стека [5, с. 367], якщо застосувати індукцію.

2. Доведення

На підставі

$$(1 - U_{n-i+1:n})_{1\le i\le n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (U_{i:n})_{1\le i\le n}\,,$$

для всіх $x \in [0,1]$ випливає:

$$H_n(x) := \mathsf{P}(1 - \tau_n \le x) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}_{in}(x),$$

де для $1 \le i \le n$

$$\begin{aligned} P_{in}(x) &= \mathsf{P}\left(U_{i:n} \le x \colon U_{j:n} \le U_{i:n} + \frac{j-i}{n} \quad \text{для всіх} \quad j \ne i\right) \\ &= n! \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{x} \int\limits_{0}^{y_i - \frac{i-1}{n}} \int\limits_{y_1}^{y_i - \frac{i-2}{n}} \cdots \int\limits_{y_{i-2}}^{y_i - \frac{1}{n}} \int\limits_{y_i}^{y_i + \frac{1}{n}} \int\limits_{y_{i+1}}^{y_i + \frac{2}{n}} \cdots \\ &\quad \int\limits_{y_{n-1}}^{y_i + \frac{n-i}{n}} dy_n \cdots dy_{i+2}\, dy_{i+1}\, dy_{i-1} \cdots dy_2\, dy_1\, dy_i, \end{aligned} \tag{2}$$

якщо $x \in \left[\frac{i-1}{n}, 1\right]$. Якщо $x \in \left[0, \frac{i-1}{n}\right)$, то $P_{in}(x) = 0$ для всіх $1 \le i \le n$.

З (2) ми можемо вивести, що

$$H_n \text{ має поліноміальний розподіл на } [0,1]. \tag{3}$$

Як наслідок для $0 \le x < \frac{1}{n}$ ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} H_n(x) &= n!\, P_{1n}(x) \\ &= n! \int\limits_{0}^{x} \int\limits_{y_1}^{y_1+\frac{1}{n}} \int\limits_{y_2}^{y_1+\frac{2}{n}} \cdots \int\limits_{y_{n-1}}^{y_1+\frac{n-1}{n}} dy_n \cdots dy_3\, d_2\, dy_1 \\ &= n \int\limits_{0}^{x} \left[\int\limits_{y_1}^{y_1+\frac{1}{n}} \int\limits_{y_1}^{y_1+\frac{2}{n}} \cdots \int\limits_{y_1}^{y_1+\frac{n-1}{n}} (n-1)!\, \mathbb{I}_{\{0\le y_2 \le y_3 \le \cdots \le y_n\}}\, dy_n \cdots dy_3\, dy_2 \right] dy_1. \end{aligned}$$

Відзначимо, що вираз у квадратних дужках є щільністю розподілу вектора $(U_{1:n-1}, \ldots, U_{n-1:n-1})$. Тому

$$H_n(x) = n \int\limits_{0}^{x} \mathsf{P}\left(y_1 < U_{i:n-1} \le y_1 + \frac{i}{n} \colon 1 \le i \le n-1\right) dy_1. \tag{4}$$

Використовуючи тепер елементарні міркування або формулу Стека (див. [5, с. 369]), можна довести для всіх $0 \le y_1 \le x$, що

$$\mathsf{P}\left(y_1 < U_{i:n-1} \le y_1 + \frac{i}{n} \colon 1 \le i \le n-1\right) = \mathsf{P}\left(U_{i:n-1} \le \frac{i}{n}, \colon 1 \le i \le n-1\right).$$

Таким чином, з (1) та (4) ми можемо зробити висновок, що $H_n(x) = x$ для всіх $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$, що й доводить теорему на підставі властивості (3). $\square$

Література

1. E. S. Anderson, *On the fluctuations of sums of random variables*, Math. Scand. **1** (1953), 263–285.
2. Z. W. Birnbaum and R. Pyke, *On some distributions related to the statistic D_n^+*, Ann. Math. Stat. **29** (1958), 179–187.
3. M. Dwass, *On several statistics related to empirical distribution functions*, Ann. Math. Stat. **29** (1958), 188–191.
4. N. H. Kuiper, *Alternative proof of a theorem of Birnbaum and Pyke*, Ann. Math. Stat. **30** (1959), 251–252.
5. G. R. Shorack and J. A. Wellner, *Empirical processes with applications to statistics*, Wiley, New York, 1986.
6. L. Takács, *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington–New York, 1967.

Mathematisches Institut, Justus-Liebig-Universität, Arndtstrasse 2, D-35392 Giessen, Germany

Електронна адреса: dietmar.ferger@math.uni-giessen.d400.de

Надійшла 15.02.94