Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 51, 1994, стор. 151–154

Teor. Ímovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 51, 1994, pp. 151–154

О НОРМАЛЬНОЙ И ПУАССОНОВСКОЙ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ

УДК 519.21

М. Д. ЮДИН

Резюме. В [1] приведены примеры применения формулы Колмогорова, обобщенной на суммы зависимых случайных величин [2]. В данной работе дается формула Колмогорова, обобщенная на суммы зависимых векторов, и рассматриваются примеры ее применений в нормальных и пуассоновских условиях. Заметим, что в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, пуассоновские условия можно трактовать существенно неоднозначно.

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n \geq 1$, система n-мерных векторов с ограниченными дисперсиями $\xi_{ns} = (\xi_{ns}^{(1)}, \ldots, \xi_{ns}^{(d)})$, $\mathrm{M}\,\xi_{ns}^{(i)} = 0$, $t = (t_1, \ldots, t_d)$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $S_n = \sum_{s=1}^{n} \xi_{ns}$, матрица $B_n = \|b_{n(i,j)}\|$, где $b_{n(i,j)} = \sum_{s \neq p} M\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}$, (x, y) — скалярное произведение, $\xi_{ns}^2 = (\xi_{ns}, \xi_{ns})$, $K_n(x) = \sum_{s=1}^{n} M(\xi_{ns}^2; \xi_{ns} \leq x)$, где $\xi_{ns} \leq x$ означает, что $\xi_{ns}^{(i)} \leq x_i$, $1 \leq i \leq d$ [3], $h(n)$ — медленно меняющаяся функция [4].

Аналогично доказательству теорем 2.3 и 2.7 в [2] доказывается

Теорема 1. *Пусть система серий векторов $\{\xi_{ns}\}$ будет $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$-зависимой, где m_0 любое постоянное число, $0 < \rho \leq 1/8$. Пусть, кроме того, найдутся постоянные H_1, H_2 и n_0, такие, что при $n \geq n_0$*

$$\max_{s,i} \mathrm{M}\,\xi_{ns}^{(i)^2} \leq \frac{H_1 h(n)}{n}, \qquad \max_{\substack{s,r,q\\ i,j,k}} \mathrm{M}\,|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{nr}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}| \leq \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}}$$

где $0 \leq |r-q| \leq m_0 n^{1/4-\rho}$, $0 \leq |s-q| \leq m_0 n^{1/4-\rho}$. Тогда если $K_n(x) \xrightarrow{\text{сл.}} K(x) < \infty$ и $B_n \to B$ при $n \to \infty$, то сумма S_n будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм характеристической функции (х.ф.) которого равен

$$\psi(t) = \int_{\mathbf{R}^d} \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right) \frac{dK(x)}{|x|^2} - \frac{(t, Bt)}{2}, \tag{1}$$

где при $x = 0$ подинтегральная функция равна $-(e,t)^2/2$, $e = (1, \ldots, 1)$.

В теореме 1 условие m_n-зависимости можно заменить условием равномерно сильного перемешивания (р.с.п.) [4] с коэффициентом $\beta(m) = o(m^{-3-\tau})$, $\tau > 0$.

Далее предполагается, что система $\{\xi_{ns}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, с m_n-зависимостью или условием р.с.п.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F05, 60E07; Secondary 60E10.

1. Рассмотрим сходимость распределения суммы S_n к нормальному закону. Введем условие, аналогичное условию Линдеберга: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_{|\xi_{ns}|>\varepsilon} (t,x)^2 \, d\mathrm{P}\{\xi_{ns} \le x\} = 0. \tag{2}$$

Пусть $A_n = \|\sigma_{n(ij)}\|$, где $\sigma_{n(ij)} = \sum_{s=1}^{n} M(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{ns}^{(j)}; |\xi_{ns}| \le \varepsilon)$, и существует предел $A = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} A_n$. Матрица A симметрична и при $\det A \ne 0$ положительно определена [5]. Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_{|\xi_{ns}|\le\varepsilon} (t,x)^2 \, d\mathrm{P}\{\xi_{ns} \le x\} = (t, At).$$

Пользуясь разложением

$$e^{i(t,x)} = 1 + i(t,x) - \frac{(t,x)^2}{2!} - i\frac{(t,x)^3}{3!}\theta, \qquad \theta \le 1,$$

и имея ввиду, что

$$\left|\sum_{s=1}^{n} \int_{|\xi_{ns}|\le\varepsilon} (t,x)^3 \, d\mathrm{P}\{\xi_{ns} \le x\}\right| \le |t|\varepsilon \sum_{s=1}^{n} \int_{|\xi_{ns}|\le\varepsilon} (t,x)^2 \, d\mathrm{P}\{\xi_{ns} \le x\},$$

из формулы (1) найдем, что

$$\psi(t) = -\frac{(t, At)}{2} - \frac{(t, Bt)}{2}.$$

При вычислении матрицы B в условиях теоремы 1 также можно ограничиться ε-окрестностью нуль-вектора, поскольку

$$\left|\sum_{0<|s-p|\le m_n} M(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}; |\xi_{ns}^{(i)}| > \varepsilon)\right| \le \frac{1}{\varepsilon} \sum_{0<|s-p|\le m_n} \mathrm{M}\left|(\xi_{ns}^{(i)})^2 \xi_{np}^{(j)}\right| \le \frac{2H_2 n m_n h(n)}{\varepsilon n^{3/2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Складывая матрицы A и B, получим

$$\psi(t) = -\frac{(t, Ct)}{2}, \tag{3}$$

где $C = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} C_n$, $C_n = \|\delta_{n(ij)}\|$,

$$\delta_{n(i,j)} = \sum_{0\le|s-p|\le m_n} M\big(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}; |\xi_{ns}| \le \varepsilon \wedge |\xi_{np}| \le \varepsilon\big).$$

Если $\det C \ne 0$, то матрица C положительно определена и симметрична. Как известно (см., например, [5]), правой частью (3) определяется х.ф. d-мерного нормального распределения с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{\sqrt{|C^{-1}|}}{\sqrt{(2\pi)^d}} \exp\left\{-\frac{(x, C^{-1}x)}{2}\right\}.$$

Таким образом, теорема 1 вместе с условием (2) дают достаточные условия сходимости распределения суммы S_n к d-мерному нормальному распределению, в котором зависимость между векторами характеризуется матрицей B.

2. Рассмотрим сходимость распределения S_n в пуассоновских условиях. Для наглядности будем считать, что $d = 2$. Уже в этом случае можно предложить несколько вариантов пуассоновской сходимости. Рассмотрим два из них.

1) Пусть e_1 это τ-окрестность точки $(1,0)$, а e_2 — τ-окрестность точки $(0,1)$. Введем условия: при любом $\tau > 0$, $0 < \tau < 1$,

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi_{ns} \in e_1\} = \lambda_1, \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi_{ns} \in e_2\} = \lambda_2, \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_{\overline{e_1 \cup e_2}} x^2\, d\mathsf{P}\{\xi_{ns} \le x\} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В соответствии с формулой (1), в условиях теоремы 1 S_n будет иметь предельное распределение, логарифм х.ф. которого имеет вид

$$\psi(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_{\mathbf{R}^2} \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right) d\mathsf{P}\{\xi_{ns} \le x\} - \frac{(t,Bt)}{2}. \tag{5}$$

Отсюда и из (4) следует, что

$$\psi(t) = \lambda_1(e^{it_1} - 1) + \lambda_2(e^{it_2} - 1) - i\lambda_1 t_1 - i\lambda_2 t_2 - \frac{(t,Bt)}{2}, \tag{6}$$

где B — симметричная неотрицательно определенная матрица.

Равенство (6) показывает, что предельным распределением будет композиция двумерного распределения Пуассона и двумерного нормального распределения, с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^k}{m!\,k!} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x + \lambda - q, B^{-1}(x + \lambda - q)\right)\right\}, \tag{7}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $q = (m,k)$.

2) Пусть $\rho_{ns} = |\xi_{ns}|$ и α некоторый фиксированный полярный угол. Добавим к условиям теоремы 1 условия: при любом $\tau \in (0, r(\alpha))$

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_{|\rho_{ns} - r(\alpha)| \le \tau} d\mathsf{P}\{\xi_{ns} \le x\} = \lambda(\alpha), \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_{|\rho_{ns} - r(\lambda)| > \tau} x^2 d\mathsf{P}\{\xi_{ns} \le x\} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из формулы (5) и условий (8) следует, что S_n будет иметь предельное распределение, логарифм х.ф. которого имеет вид

$$\psi(t) = \lambda\left(\exp\{i(t_1 r\cos\alpha + t_2 r\sin\alpha)\} - 1 - i(t_1 r\cos\alpha + t_2 r\sin\alpha)\right) - \frac{(t,Bt)}{2}.$$

Здесь

$$\varphi_1(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^{i(t_1 r\cos\alpha + t_2 r\sin\alpha)} - 1\right)\right\}$$

есть х.ф. распределения Пуассона на прямой:

$$\mathsf{P}\left\{S_1 = mr\cos\alpha, S_2 = mr\sin\alpha\right\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \qquad m \ge 0, \tag{9}$$

так как

$$\sum_{m=0}^{\infty} \exp\{i(t_1 mr\cos\alpha + t_2 mr\sin\alpha)\}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \varphi_1(t).$$

Положим $a_1 = \lambda r\cos\alpha$, $a_2 = \lambda r\sin\alpha$. Как известно (см., например, [5]),

$$\varphi_2(t) = \exp\left\{-i(t_1 a_1 + t_2 a_2) - \frac{(t,Bt)}{2}\right\}$$

есть х.ф. двумерного нормального распределения с плотностью

$$p(x,\alpha) = \frac{\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{(x+a, B^{-1}(x+a))}{2}\right\}, \tag{10}$$

где $a = (a_1, a_2)$.

Следовательно, предельным распределением S_n будет композиция распределений (9) и (10) с плотностью вероятности

$$p(x,\alpha) = \frac{e^{-\lambda}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x+a-mb, B^{-1}(x+a-mb)\right)\right\},$$

где $b = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$.

Пусть полярный угол α есть случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $[0, 2\pi)$. В этом случае, применяя формулу полной вероятности, получим, что S_n будет иметь предельное двумерное распределение с плотностью вероятности

$$p_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x,\alpha)\,d\alpha. \tag{11}$$

Если r и λ не зависят от α, то, очевидно, (11) это двумерная плотность вероятности с математическим ожиданием $(0;0)$, сосредоточенная в окрестностях начала координат и концентрических окружностей радиусов mr.

Ясно, что можно получить и другие модификации пуассоновской сходимости на плоскости. При этом, зависимость между векторами будет отражаться, вообще говоря, появлением "нормального шума", задаваемого матрицей B.

Література

1. М. Д. Юдин, *Примеры применения обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых величин*, Изв. вузов. Математика (1980), № 9, 65–70.
2. М. Д. Юдин, *Сходимость распределений сумм случайных величин*, "Университетское", Минск, 1990.
3. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
4. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, "Наука", Москва, 1965.
5. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, "Наука", Москва, 1989.

247760, Беларусь, Гомельская обл., г. Мозырь, вул. Дружбы, 6, кв. 60

Надійшла 20.04.93