Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 58–68

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 58–68

ОБҐРУНТУВАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ. II

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО ТА М. В. ЕНДЖИРГЛИ

РЕЗЮМЕ. Робота є продовженням [1]. З використанням результатів першої частини досліджено крайову задачу для однорідного ґіперболічного рівняння, коли початкові функції є $\overline{\mathrm{Sub}}_{\varphi}(\Omega)$-випадковими процесами.

4. ҐІПЕРБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

Розглянемо першу крайову задачу для однорідного ґіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)-b(x)u(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=0, \tag{1}$$

$$0\le x\le\pi, \qquad 0\le t\le T,$$

$$\begin{aligned} u(0,t)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial t}u(0,t)\sin\alpha=0,\\ u(\pi,t)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial t}u(\pi,t)\sin\beta=0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$u(x,0)=\xi(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=\eta(x), \tag{3}$$

де $0\le\alpha,\beta\le 2\pi$, $\cos\alpha\sin\alpha\le 0$, $\cos\beta\sin\beta\ge 0$, функції $a(x)$, $b(x)$ і $\rho(x)$ є неперервними, причому $a(x)>0$, $b(x)\ge 0$, а $\xi(x)$ та $\eta(x)$ є $\overline{\mathrm{Sub}}_{\varphi}(\Omega)$-випадковими процесами. Припустимо також, що $\xi(x)$ та $\eta(x)$ — з імовірністю 1 вибірково двічі неперервно диференційовні та некорельовані.

Нехай $\{X_k(x)\}$ та $\{\lambda_k\}$ — послідовності ортонормованих власних функцій та власних значень крайової задачі Штурма–Ліувілля, що відповідає задачі (1)–(3):

$$\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d}{dx}X(x)\right)-b(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} X(0)\cos\alpha+X'(0)\sin\alpha=0,\\ X(\pi)\cos\beta+X'(\pi)\sin\beta=0. \end{aligned} \tag{5}$$

При наведених обмеженнях на коефіцієнти задачі (4), (5) власні значення є додатними [2, розділ 15, 15.4–8]. Вважатимемо також, що $\lambda_k\le\lambda_{k+1}$, $k\ge 1$.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G35; Secondary 35L20.

Із теореми 3 [3] випливає, що з імовірністю 1 існує вибірково двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3) в області $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$, зображуваний у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left\{ A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k} t \right\}, \tag{6}$$

якщо рівномірно за ймовірністю збігається в області $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k(x) \left\{ A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k} t \right\}, \tag{7}$$

де $A_k = \int_0^\pi \xi(x) X_k(x) \rho(x)\, dx$, $B_k = \int_0^\pi \eta(x) X_k(x) \rho(x)\, dx$.

Внаслідок того, що за припущенням $\xi(x)$ та $\eta(x)$ є некорельованими $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$-випадковими процесами, $\{A_k\}$ та $\{B_k\}$ є послідовностями сумісно $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$-випадкових величин, і $\mathsf{E}\, A_i B_j = 0$, $i, j \ge 1$.

Розглянемо $\mathbb{T} = [0, \pi] \times (-\infty, \infty)$. Зауважимо, що ряди (6) та (7) можна розглядати як ряди вигляду $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k g_k(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{T}$, що вивчалися в [1]. Так, для ряду (6) послідовності $\{\xi_k\}$ та $g_k(x,t)$ є такими:

$$\xi_k = \begin{cases} A_{[k/2]+1}, & k = 2i-1, \\ B_{k/2}/\sqrt{\lambda_{k/2}}, & k = 2i, \end{cases} \qquad i \ge 1;$$

$$g_k(x,t) = \begin{cases} X_{[k/2]}(x) \cos\sqrt{\lambda_{[k/2]+1}}\, t, & k = 2i-1, \\ X_{k/2}(x) \sin\sqrt{\lambda_{k/2}}\, t, & k = 2i, \end{cases} \qquad i \ge 1.$$

Отже, до рядів (6) та (7) можна застосувати попередні результати.

Введемо такі позначення:

$$\Gamma(m,k) = \left(\sup_{(x,t)\in\mathbb{T}} \sup_{m \le j \le k} \mathsf{E} \left(\sum_{i=m}^{j} X_i(x) \left\{ A_i \cos\sqrt{\lambda_i} t + \frac{B_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\sqrt{\lambda_i} t \right\} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$\Gamma_{\{l\}}(m,k) = \left(\sup_{(x,t)\in\mathbb{T}} \sup_{m \le j \le k} \mathsf{E} \left(\sum_{i=m}^{j} l_i X_i(x) \left\{ A_i \cos\sqrt{\lambda_i} t + \frac{B_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\sqrt{\lambda_i} t \right\} \right)^2 \right)^{1/2},$$

де $\{l_i\}$ — числова послідовність,

$$\Gamma(m,\infty) = \left(\sup_{(x,t)\in\mathbb{T}} \sup_{k \ge m} \mathsf{E} \left(\sum_{i=m}^{k} X_i(x) \left\{ A_i \cos\sqrt{\lambda_i} t + \frac{B_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\sqrt{\lambda_i} t \right\} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$\Gamma_{\{l\}}(m,\infty) = \left(\sup_{(x,t)\in\mathbb{T}} \sup_{k \ge m} \mathsf{E} \left(\sum_{i=m}^{k} l_i X_i(x) \left\{ A_i \cos\sqrt{\lambda_i} t + \frac{B_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\sqrt{\lambda_i} t \right\} \right)^2 \right)^{1/2},$$

а також

$$U_m^\infty(x,t) = \sum_{k=m}^{\infty} l_i X_k(x) \left\{ A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k} t \right\}.$$

Теорема 5. *Нехай виконується умова*

$$\Gamma_\lambda(m,\infty) < \infty, \tag{8}$$

та існує така послідовність $\{l_k\}$, $l_k > 0$, $k \ge m$, $l_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$, *що для деякого* $1 < \gamma \le 2$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(l_k^{1-\gamma} - l_{k+1}^{1-\gamma}\right) \frac{\ln(c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1\right)\right)} < \infty, \tag{9}$$

і виконується умова

$$\Gamma_{\{\lambda l\}}(m, \infty) < \infty. \tag{10}$$

Тоді з імовірністю 1 *існує вибірково двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі* (1)–(3), *зображуваний у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю в області* $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$ *ряду* (6).

Якщо, крім того,

$$\Gamma(m, \infty) < \infty \tag{11}$$

та існує така функція $r(u) > 0$, $u \ge 1$, *що має* r*-властивість і задовольняє умову*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left((\lambda_k l_k)^{1-\gamma} - (\lambda_{k+1} l_{k+1})^{1-\gamma}\right) r\left(\left(c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1\right)^2\right) < \infty, \tag{12}$$

то для $z > \max\{2, z_0 + 1\}$, *де* $z_0 = \min\{\, z \colon zq(z) \ge 1 \,\}$, *при* $T > \pi$ *виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{0 \le x \le \pi \\ 0 \le t \le T}} |U_m^{\infty}(x,t)| > z\right\}$$
$$\le \frac{4\pi T}{\sqrt{3}} z^{5/2} \exp\left\{-\varphi^{s}\left(\frac{z-2}{\Gamma(m,\infty)} - \frac{\Gamma^{-1}(m,\infty)\Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)(z-2)\left(\frac{z}{2}q\left(\frac{z}{2}\right)\right)^{-1}}{\Gamma(m,\infty) + \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)\left(\frac{z}{2}q\left(\frac{z}{2}\right)\right)^{-1}}\right)\right\}$$
$$\times\, r^{(-1)}\left(\frac{\Sigma^{(\gamma)} + \Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}}}{\Gamma(m,\infty)} (zq(z))^{\gamma-1}\right),$$

де

$$\Sigma^{(\gamma)} = \frac{1}{\gamma-1} \sum_{k=m}^{\infty} \left((\lambda_k l_k)^{1-\gamma} - (\lambda_{k+1} l_{k+1})^{1-\gamma}\right) \Gamma(m,k) r\left(\left(c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1\right)^2\right),$$

$$\Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}} = \frac{1}{\gamma-1} \sum_{k=m}^{\infty} \left((\lambda_k l_k)^{1-\gamma} - (\lambda_{k+1} l_{k+1})^{1-\gamma}\right) \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,k) r\left(\left(c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1\right)^2\right),$$

а c_0 *— визначена в прикладі* 2 *стала.*

Доведення. Із прикладів 1, 2 та леми 1 випливає: оскільки послідовність $\{X_k(x)\}$ належить класу $B_0([0,\pi], 1, c_0\lambda_k)$, а послідовність $\{\cos\sqrt{\lambda_k}t, \sin\sqrt{\lambda_k}t\}$ належить класу $B_0((-\infty,\infty), c(t), \sqrt{\lambda_k} + 1)$, де $c(t)$ — довільна функція експоненціального типу $0 < \varepsilon < 1$, послідовність $\{X_k(x)\cos\sqrt{\lambda_k}t, X_k(x)\sin\sqrt{\lambda_k}t\}$ належить класу $B_0([0,\pi] \times (-\infty,\infty), c(x,t), c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1)$, де $c(x,t) = c(t)$.

Отже, із теореми 2 при $d = 2$ випливає, що умови (8)–(10) є умовами рівномірної збіжності за ймовірністю в області $0 \le x \le \pi$, $-\infty < t < \infty$ ряду (7).

Візьмемо $c(t) = (\sin(\varepsilon t/2)/(\varepsilon t/2))^2$, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$\frac{2}{K_2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |c(x,t)| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \varepsilon t/2}{\varepsilon t/2}\right)^2 dt\, dx = \frac{4\pi}{\varepsilon}. \tag{13}$$

Припустимо, що функція $r(u) > 0$, $u \geq 1$, має r-властивість. Із теореми 4 випливає, що коли виконується умова (11) та існує послідовність $\{l_k\}$, $l_k > 0$, $k \geq m$, $l_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$, для якої при деякому $1 < \gamma < 2$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\tilde{l}_k^{1-\gamma} - \tilde{l}_{k+1}^{1-\gamma}\right) r\big((c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1)^2\big) < \infty, \tag{14}$$

і виконується умова

$$\Gamma_{\{\tilde{l}\}}(m, \infty) < \infty, \tag{15}$$

то з урахуванням (13) при $z > \max\{1, z_0\}$, де z_0 визначено вище, виконується нерівність

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\|c(\cdot,\cdot)U_m^{\infty}(\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{C}(\mathbf{T})} > z\right\} \\
&\quad \leq \frac{4\pi}{\varepsilon} z^2 \exp\left\{-\varphi^s\left(\frac{z-1}{\Gamma(m,\infty) + \Gamma_{\{\tilde{l}\}}(m,\infty)(zq(z))^{-1}}\right)\right\} \\
&\quad\quad \times r^{(-1)}\left(\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{\Gamma(m,\infty)}(zq(z))^{\gamma-1}\right),
\end{aligned} \tag{16}$$

де

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\gamma - 1}\sum_{k=m}^{\infty}\left((\tilde{l}_k)^{1-\gamma} - (\tilde{l}_{k+1})^{1-\gamma}\right)\Gamma(m,k)r\big((c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1)^2\big),$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\gamma - 1}\sum_{k=m}^{\infty}\left((\tilde{l}_k)^{1-\gamma} - (\tilde{l}_{k+1})^{1-\gamma}\right)\Gamma_{\{\tilde{l}\}}(m,k)r\big((c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1)^2\big).$$

Вважатимемо послідовність $\{l_k\}$, що задовольняє умову (9), вже вибраною. Покладемо $\tilde{l}_k = \lambda_k l_k$. При такому виборі послідовності $\{l_k\}$ $\Gamma_{\{\tilde{l}\}}(m,k) = \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,k)$, $k \geq m$, $\Gamma_{\{\tilde{l}\}}(m,\infty) = \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)$, $\Sigma_1 = \Sigma^{(\gamma)}$ та $\Sigma_2 = \Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}}$ і умови (14) та (15) співпадають з умовами (12) та (10) відповідно. Тоді з нерівності (16) випливає

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\|c(\cdot,\cdot)U_m^{\infty}(\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{C}(\mathbf{T})} > z\right\} \\
&\quad \leq \frac{4\pi}{\varepsilon} z^2 \exp\left\{-\varphi^s\left(\frac{z-1}{\Gamma(m,\infty) + \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)(zq(z))^{-1}}\right)\right\} \\
&\quad\quad \times r^{(-1)}\left(\frac{\Sigma^{(\gamma)} + \Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}}}{\Gamma(m,\infty)}(zq(z))^{\gamma-1}\right),
\end{aligned} \tag{17}$$

причому функцію $r(u)$ маємо підбирати в залежності від вибору послідовності $\{l_k\}$ так, щоб виконувалась умова (12).

Нехай $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\mu}{T}$, $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$, $T > \pi$. Оскільки функція $\sin x/x$ монотонно спадає на інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, виконуються такі нерівності

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{0\leq x\leq\pi \\ 0\leq t\leq T}} |U_m^{\infty}(x,t)| > z\right\} &\leq \mathsf{P}\left\{\left(\frac{\mu}{\sin\mu}\right)^2 \sup_{\substack{0\leq x\leq\pi \\ 0\leq t\leq T}}\left(\frac{\sin\mu t/T}{\mu t/T}\right)^2 |U_m^{\infty}(x,t)| > z\right\} \\
&\leq \mathsf{P}\left\{\left(\frac{\mu}{\sin\mu}\right)^2 \|c(\cdot,\cdot)U_m^{\infty}(\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{C}(\mathbf{T})} > z\right\}
\end{aligned}$$

$$= \mathsf{P}\left\{ \|\bar{c}(\cdot,\cdot)U_m^\infty(\cdot,\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} > z\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^2 \right\}.$$

Використовуючи останню нерівність, із (17) при z, що задовольняє умову $z(\sin\mu/\mu)^2 > \max\{1, z_0\}$, одержимо

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\substack{0\le x\le\pi\\ 0\le t\le T}} |U_m^\infty(x,t)| > z \right\}$$
$$\le \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^4 M_m(s,z,\mu) r^{(-1)}\left(\frac{\Sigma^{(\gamma)} + \Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}}}{\Gamma(m,\infty)} \left[z\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^2 q\left(z\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^2\right)\right]^{\gamma-1}\right)$$
$$\le M_m(s,z,\mu) r^{(-1)}\left(\frac{\Sigma^{(\gamma)} + \Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}}}{\Gamma(m,\infty)} (zq(z))^{\gamma-1}\right), \tag{18}$$

де

$$M_m(s,z,\mu) = \frac{4\pi T}{\mu} z^2 \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^4$$
$$\times \exp\left\{ -\varphi^s\left(\frac{z\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^2 - 1}{\Gamma(m,\infty) + \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)\left[z\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^2 q\left(z\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^2\right)\right]^{-1}} \right)\right\}.$$

Виберемо μ таким, що $(\sin\mu/\mu)^2 = 1 - 1/z$. Щоб при цьому збереглася нерівність $z(\sin\mu/\mu) \le \max\{2, z_0+1\}$, z має задовольняти умову $z \ge \max\{2, z_0+1\}$. Тоді $(\sin\mu/\mu)^{-2} < \frac{1}{2}$, і $q^{-1}(z(\sin\mu/\mu)^2) \le q(z/2)$. Крім цього, оскільки $1 - 1/z = (\sin\mu/\mu)^2 \ge (1-\mu/6)^2$, $(1-1/z)^{1/2} \ge 1 - \mu^2/6$, звідси випливає $1/\mu \le (z/3)^{1/2}$. З урахуванням цього з нерівності (18) при $z \ge \max\{2, z_0+1\}$ остаточно маємо

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\substack{0\le x\le\pi\\ 0\le t\le T}} |U_m^\infty(x,t)| > z \right\}$$
$$\le \frac{4\pi T}{\sqrt{3}} z^{5/2} \exp\left\{ -\varphi^s\left(\frac{z-2}{\Gamma(m,\infty) + \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)\left(\frac{z}{2} q\left(\frac{z}{2}\right)\right)^{-1}}\right)\right\}$$
$$\times r^{(-1)}\left(\frac{\Sigma^{(\gamma)} + \Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}}}{\Gamma(m,\infty)} (zq(z))^{\gamma-1}\right)$$
$$= \frac{4\pi T}{\sqrt{3}} z^{5/2} \exp\left\{ -\varphi^s\left(\frac{z-2}{\Gamma(m,\infty)} - \frac{\Gamma^{-1}(m,\infty)\Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)(z-2)\left(\frac{z}{2} q\left(\frac{z}{2}\right)\right)^{-1}}{\Gamma(m,\infty) + \Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty)\left(\frac{z}{2} q\left(\frac{z}{2}\right)\right)^{-1}}\right)\right\}$$
$$\times r^{(-1)}\left(\frac{\Sigma^{(\gamma)} + \Sigma^{(\gamma)}_{\{\lambda l\}}}{\Gamma(m,\infty)} (zq(z))^{\gamma-1}\right).$$

Теорему доведено. □

Наведемо приклади вибору послідовності $\{l_k\}$, що задовольняє умову (9), і відповідної функції $r(u)$, що задовольняє умову (12).

Для довільної стандартної $\mathcal{N}$-функції $\varphi(u)$ умова (9) задовольнятиметься, якщо послідовність $\{l_k\}$ має вигляд

$$l_k = \left(\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^{\infty} \frac{\varphi^{(-1)}(s)\,ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/(\gamma-1)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Відповідно до такого вибору послідовності $\{l_k\}$ умова (9) задовольнятиметься, якщо

$$r(u) = \frac{u^{(\gamma-1)/2}}{(\ln u)^{1+\varepsilon}\int_{\ln u}^{\infty} s^{-2-\varepsilon}\varphi^{(-1)}(s)\,ds}.$$

У випадку $\varphi(x) = x^\alpha/\alpha$, $\alpha > 2$, $|x| > x_0$ матимемо

$$l_k = \left(\ln\left(c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1\right)\right)^{(1+\varepsilon-1/\alpha)/(\gamma-1)}, \qquad r(u) = \frac{2^{1/\alpha}}{1+\varepsilon-1/\alpha} u^{(\gamma-1)/2}(\ln u)^{1/\alpha}.$$

Зокрема, якщо $\varphi(x) = x^2/2$, тобто в субґауссовому випадку,

$$l_k = \left(\ln\left(c_0\lambda_k + \sqrt{\lambda_k} + 1\right)\right)^{(\varepsilon+1/2)/(\gamma-1)}, \qquad r(u) = u^{(\gamma-1)/2}(\ln u)^{1/2}\cdot\frac{2^{1/2}}{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Розглянемо тепер більш часткову задачу. Нехай у загальному ґіперболічному рівнянні (1) $a(x) \equiv 1$, $\rho(x) \equiv 1$, і $\sin\alpha = \sin\beta = 0$ у крайових умовах (2):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - b(x)u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 0, \tag{19}$$
$$0 \le x \le \pi, \qquad 0 \le t \le T,$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(\pi,t) &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$u(x,0) = \xi(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \eta(x), \tag{21}$$

причому припустимо, що функція $b(x)$ є двічі неперервно диференційовною на відрізку $[0,\pi]$, і випадкові процеси $\xi(x)$ та $\eta(x)$ є з імовірністю 1 вибірково двічі неперервно диференційовними, некорельованими, а також задовольняють крайові умови, супутні крайовим умовам (20):

$$\xi(0) = \xi(\pi) = 0, \qquad \eta(0) = \eta(\pi) = 0.$$

Внаслідок останнього обмеження для корреляційних функцій $B(x,y)$ та $R(x,y)$ процесів $\xi(x)$ та $\eta(x)$ відповідно справджуються такі рівності:

$$\begin{aligned} B(0,y) = B(x,0) = 0, &\qquad B(\pi,y) = B(x,\pi) = 0, \\ R(0,y) = R(x,0) = 0, &\qquad R(\pi,y) = R(x,\pi) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Із цього випливає, зокрема, що $B(x,y)$ та $R(x,y)$ можна продовжити на $\boldsymbol{R}^2$ так, щоб за кожною змінною це були непарні 2π-періодичні функції.

Нехай

$$\Delta_{\delta_1,\delta_2}f(x,y) = f(x+\delta_1, y+\delta_2) - f(x+\delta_1, y) - f(x, y+\delta_2) + f(x,y),$$
$$\Delta_\delta^{(1)}f(x,y) = f(x+\delta, y) - f(x,y),$$
$$\Delta_\delta^{(2)}f(x,y) = f(x, y+\delta) - f(x,y).$$

Наступна теорема для задачі (19)–(21) дає в термінах корреляційних функцій випадкових процесів $\xi(x)$ та $\eta(x)$ умови, при виконанні яких вірні твердження теореми 5.

Теорема 6. *Для того, щоб задача* (19)–(21) *при наведених обмеженнях з імовірністю* 1 *мала вибірково двічі неперервно диференційовний розв'язок, зображуваний у вигляді абсолютно та рівномірно збіжного з імовірністю* 1 *в області* $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$, *ряду* (6), *досить, щоб виконувались такі умови:*

а) *у періодично продовжених вказаним чином функцій* $B(x,y)$ *та* $R(x,y)$ *існують і є обмеженими похідні*

$$\frac{\partial^6 B(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \qquad i+j=6,\ i,j \ge 2;$$
$$\frac{\partial^4 R(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}, \qquad i+j=4,\ i,j \ge 1;$$

б) *для* $B^*(x,y) = \frac{\partial^6 B(x,y)}{\partial x^3 \partial y^3}$ *та* $R^*(x,y) = \frac{\partial^4 R(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$ *при досить малих* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *та* $\delta > 0$ *виконуються нерівності*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{\delta_1,\delta_2} B^*(x,y)|\,dx\,dy \le \frac{L_1}{(|\ln\delta_1|\cdot|\ln\delta_2|)^{1+\frac{1}{\gamma-1}+\sigma}},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{\delta_1,\delta_2} R^*(x,y)|\,dx\,dy \le \frac{L_2}{(|\ln\delta_1|\cdot|\ln\delta_2|)^{1+\frac{1}{\gamma-1}+\sigma}},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_\delta^{(1)} R^*(x,y)\right|\,dx\,dy \le \frac{L_3}{(|\ln\delta|)^{1+\frac{1}{\gamma-1}+\sigma}},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_\delta^{(2)} R^*(x,y)\right|\,dx\,dy \le \frac{L_4}{(|\ln\delta|)^{1+\frac{1}{\gamma-1}+\sigma}},$$

для деяких $L_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, $\sigma > 0$.

При цьому має місце нерівність (13).

Доведення. З теореми 4 [4, розділ 6, § 2] випливає, що при наведених обмеженнях на коефіцієнти з імовірністю 1 абсолютно збігаються ряди Фур'є за системою ортонормованих власних функцій $\{X_k(x)\}$ випадкових процесів $\xi(x)$ та $\eta(x)$, тобто ряди $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ та $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$.

Крім цього, послідовність $\{X_k(x)\}$ є рівномірно обмеженою на відрізку $[0,\pi]$. Отже, ряд (6) в даному випадку збігається з імовірністю 1 абсолютно та рівномірно в області $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$.

Внаслідок рівномірної обмеженості на $[0,\pi]$ послідовності власних функцій виконуються також такі нерівності:

$$\Gamma(m,\infty) \le \sum_{i,j=m}^{\infty} \left(|\mathsf{E}\, A_i A_j| + \frac{|\mathsf{E}\, B_i B_j|}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \right),$$
$$\Gamma_{\{\lambda\}}(m,\infty) \le \sum_{i,j=m}^{\infty} \lambda_i \lambda_j \left(|\mathsf{E}\, A_i A_j| + \frac{|\mathsf{E}\, B_i B_j|}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \right),$$
$$\Gamma_{\{\lambda l\}}(m,\infty) \le \sum_{i,j=m}^{\infty} l_i l_j \lambda_i \lambda_j \left(|\mathsf{E}\, A_i A_j| + \frac{|\mathsf{E}\, B_i B_j|}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \right).$$

Якщо вважати m досить великим, щоб $\lambda_i \geq 1$, $l_i \geq 1$, $i \geq m$, то для виконання умов (8), (10) та (11) досить, щоб

$$\sum_{i,j=m}^{\infty} l_i l_j \lambda_i \lambda_j \left(|\mathsf{E} A_i A_j| + \frac{|\mathsf{E} B_i B_j|}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \right) < \infty.$$

Оскільки задача Штурма–Ліувілля, що відповідає (19)–(21), має вигляд

$$X''(x) + (\lambda - b(x))X(x) = 0, \tag{23}$$

$$X(0) = 0, \qquad x(\pi) = 0, \tag{24}$$

то для її власних функцій виконується рівність

$$X_k(x) = \frac{1}{\lambda_k}\big(X_k''(x) - b(x)X_k(x)\big), \qquad k \geq 1,$$

звідки, зокрема, випливає

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} A_i A_j &= \int_0^\pi \int_0^\pi X_i(x) X_j(y) B(x,y)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}\bigg(\int_0^\pi \int_0^\pi \big(X_i''(x) - b(x)X_i(x)\big) B(x,y) X_j''(y)\,dx\,dy \\
&\qquad - \int_0^\pi \int_0^\pi \big(X_i''(x) - b(x)X_i(x)\big) B(x,y) b(y) X_j(y)\,dx\,dy \bigg).
\end{aligned} \tag{25}$$

Враховуючи, що $B(0,y) = B(\pi,y) = 0$, $X_k(0) = X_k(\pi) = 0$, $k \geq 1$, а також $\partial^2 B(x,0)/\partial x^2 = \partial^2 B(x,\pi)/\partial x^2 = 0$, та послідовно інтеґруючи частинами, дістаємо такі рівності:

$$\int_0^\pi \big(X_i''(x) - b(x)X_i(x)\big) B(x,y)\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x^2} - b(x)B(x,y) \right) X_i(x)\,dx, \tag{26}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x^2} - b(x)B(x,y) \right) X_j''(y)\,dy = \int_0^\pi \left(\frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} - b(x)\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial y^2} \right) X_j(y)\,dy. \tag{27}$$

Розглянемо функцію

$$F(x,y) = B(x,y)b(x)b(y) - \frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x^2} b(y) - \frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial y^2} b(x).$$

Тоді з (25), (26) та (27) випливає

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} A_i A_j = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j}\bigg(&\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} X_i(x) X_j(y)\,dx\,dy \\
&- \int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y) X_i(x) X_j(y)\,dx\,dy \bigg).
\end{aligned} \tag{28}$$

За припущенням $B(x,y)$ є 2π-періодичною непарною за кожною змінною функцією. Отже, для неї

$$\left.\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x^2}\right|_{x=\pi k} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial y^2}\right|_{y=\pi k} = 0, \qquad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Тому $F(0,y) = F(\pi,y) = F(x,0) = F(x,\pi) = 0$, внаслідок чого $F(x,y)$ також можна продовжити на $\boldsymbol{R}^2$ як 2π-періодичну непарну за кожною змінною функцію.

Якщо виконується умова а) теореми 6, то існує та є обмеженою похідна $\frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$.

Для задачі Штурма–Ліувілля (23), (24) справедливі такі асимптотичні формули [5, розділ I, § 1]:

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \frac{a}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \text{де } a = \frac{1}{2}\int_0^\pi b(s)\,ds,$$
$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

тобто $X_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin kx + L_k(x)/k^2$, де $|L_k(x)| < L$, $L > 0$ при досить великому k.

Використовуючи ці формули та інтеґруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y) X_i(x) X_j(y)\,dx\,dy\right| \\
&\quad = \left|\int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin ix + \frac{L_i(x)}{i^2}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin jy + \frac{L_j(y)}{j^2}\right)dx\,dy\right| \\
&\quad = \left|\frac{2}{\pi}\frac{1}{i^2 j^2}\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\sin ix \sin jy\,dx\,dy\right. \\
&\qquad - \frac{2}{\pi}\frac{1}{i^2 j^2}\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}\sin ix L_j(y)\,dx\,dy \\
&\qquad - \frac{2}{\pi}\frac{1}{i^2 j^2}\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} L_i(x)\sin jy\,dx\,dy \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{i^2 j^2}\int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y) L_i(x) L_j(y)\,dx\,dy\right|.
\end{aligned}$$

Із цієї рівності при виконанні умови а) теореми 6 внаслідок обмеженості функції $F(x,y)$ та її розглядуваних похідних, а також рівномірної обмеженості послідовності $\{L_k(x)\}$ на відрізку $[0,\pi]$ випливає

$$\left|\int_0^\pi \int_0^\pi F(x,y) X_i(x) X_j(y)\,dx\,dy\right| \le \frac{c_1}{i^2 j^2}, \qquad c_1 > 0. \tag{29}$$

Аналогічно, використовуючи асимптотичні формули та інтеґруючи частинами, неважко показати, що в (28)

$$\left|\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} X_i(x) X_j(y)\,dx\,dy\right| \le \frac{2}{\pi}\frac{1}{ij}\left|\int_0^\pi \int_0^\pi B^*(x,y)\cos ix \cos jy\,dx\,dy\right| + \frac{c_2}{i^2 j^2}, \tag{30}$$

де $B^*(x,y) = \partial^6 B(x,y)/\partial x^3 \partial y^3$, а $c_2 > 0$ — деяка стала.

Оскільки $B^*(x,y)\cos ix \cos jy$ є 2π-періодичною функцією за кожною змінною, то

$$\int_0^\pi \int_0^\pi B^*(x,y)\cos ix \cos jy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^\pi B^*(x,y)\cos ix \cos jy\,dx\,dy$$

й тому

$$\int_0^\pi \int_0^\pi B^*(x,y)\cos ix \cos jy\,dx\,dy = \frac{1}{8}\Bigg(\int_0^\pi \int_0^\pi B^*\left(x+\frac{\pi}{i}, y+\frac{\pi}{j}\right)\cos ix\cos jy\,dx\,dy$$
$$-\int_0^\pi \int_0^\pi B^*\left(x+\frac{\pi}{i}, y\right)\cos ix\cos jy\,dx\,dy$$
$$-\int_0^\pi \int_0^\pi B^*\left(x, y+\frac{\pi}{j}\right)\cos ix\cos jy\,dx\,dy$$
$$+\int_0^\pi \int_0^\pi B^*(x,y)\cos ix\cos jy\,dx\,dy\Bigg)$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^\pi \int_0^\pi \Delta_{\frac{\pi}{i},\frac{\pi}{j}} B^*(x,y)\cos ix\cos jy\,dx\,dy. \tag{31}$$

Таким чином, із (28), (31) випливає

$$|\,\mathsf{E}\,A_iA_j| \le \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\left(\frac{1}{4\pi ij}\int_0^\pi \int_0^\pi |\Delta_{\frac{\pi}{i},\frac{\pi}{j}} B^*(x,y)|\,dx\,dy + \frac{c_3}{i^2j^2}\right), \tag{32}$$

де $c_3 > 0$ — деяка стала.

Вище було зазначено, що умову (9) теореми 5 задовольняє послідовність

$$l_k = \left(\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^\infty \frac{\varphi^{(-1)}(s)\,ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/(\gamma-1)}, \qquad k\ge m,\ \varepsilon>0,\ 1<\gamma<2.$$

Нехай виконується умова б) теореми 6. З (32) випливає

$$\sum_{i,j=m}^\infty l_il_j\lambda_i\lambda_j|\,\mathsf{E}\,A_iA_j| \le \sum_{i,j=m}^\infty \left(\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^\infty \frac{\varphi^{(-1)}(s)\,ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/(\gamma-1)}$$
$$\times\left(\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^\infty \frac{\varphi^{(-1)}(s)\,ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/(\gamma-1)} \tag{33}$$
$$\times\left(\frac{1}{4\pi ij}\int_0^\pi \int_0^\pi |\Delta_{\frac{\pi}{i},\frac{\pi}{j}} B^*(x,y)|\,dx\,dy + \frac{c_3}{i^2j^2}\right).$$

Оскільки $\varphi^{(-1)}(x)$ є монотонно неспадною функцією, то при m досить великому, щоб $\varphi^{(-1)}(\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)) \ge 1$, $k\ge m$, дістанемо нерівність

$$\left(\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^\infty \frac{\varphi^{(-1)}(s)\,ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/\gamma-1)}$$
$$\le \left(\varphi^{(-1)}(\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1))\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^\infty \frac{ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/(\gamma-1)}$$
$$\le \left(\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^\infty \frac{ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/(\gamma-1)}$$
$$= (1+\varepsilon)^{1/(\gamma-1)}(\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1))^{(1+\varepsilon)/(\gamma-1)},$$

звідки з використанням асимптотичної формули для $\sqrt{\lambda_k}$ матимемо

$$\left(\int_{\ln(c_0\lambda_k+\sqrt{\lambda_k}+1)}^{\infty}\frac{\varphi^{(-1)}(s)\,ds}{s^{2+\varepsilon}}\right)^{-1/(\gamma-1)}$$

$$\le(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\ln\left(c_0\left[k+\frac{a}{\pi k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]^2+k+\frac{a}{\pi k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)+1\right)\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\gamma-1}} \quad (34)$$

$$=(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\ln\left(k^2\varkappa_k\right)\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\gamma-1}}\le(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma-1}}K(\ln k)^{\frac{1+\varepsilon}{\gamma-1}},$$

де $K>0$ — деяка стала, а

$$\varkappa_k=c_0\left[1+\frac{a}{\pi k^2}+O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right]^2+\frac{1}{k}+\frac{a}{\pi k^3}+O\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{1}{k^2}.$$

Таким чином, із (33) та (34) випливає, що при виконанні умови б) та при $A=(1+\varepsilon)^{2/(\gamma-1)}K^2$, $\rho_i=(\ln i)^{\frac{1+\varepsilon}{\gamma-1}}$ маємо

$$\sum_{i,j=m}^{\infty}l_il_j\lambda_i\lambda_j|\mathsf{E}\,A_iA_j|\le\frac{A}{4\pi}\sum_{i,j=m}^{\infty}\frac{\rho_i}{i}\frac{\rho_j}{j}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left|\Delta_{\frac{\pi}{i},\frac{\pi}{j}}B^*(x,y)\right|dx\,dy+Ac_3\sum_{i,j=m}^{\infty}\frac{\rho_i}{i^2}\frac{\rho_j}{j^2}$$

$$\le\frac{A}{4\pi}\sum_{i,j=m}^{\infty}\frac{\rho_i}{i\left|\ln\frac{\pi}{i}\right|^{1+\frac{1}{\gamma-1}+\sigma}}\frac{\rho_j}{j\left|\ln\frac{\pi}{j}\right|^{1+\frac{1}{\gamma-1}+\sigma}}+Ac_3\sum_{i,j=m}^{\infty}\frac{\rho_i}{i^2}\frac{\rho_j}{j^2}$$

$$=\frac{A}{4\pi}\sum_{i,j=m}^{\infty}\frac{\rho_i}{i\left|\ln\frac{\pi}{i}\right|^{1+\sigma}}\frac{\rho_j}{j\left|\ln\frac{\pi}{j}\right|^{1+\sigma}}+Ac_3\sum_{i,j=m}^{\infty}\frac{\rho_i}{i^2}\cdot\frac{\rho_j}{j^2}<\infty,$$

оскільки при фіксованих $\varepsilon>0$ та $1<\gamma\le 2$ завжди можна вибрати $\sigma=\varepsilon/(\gamma-1)+\tau$, де $\tau>0$. Аналогічно можна показати, що виконання умови б) забезпечує скінченність суми $\sum_{i,j=m}^{\infty}l_il_j\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|\mathsf{E}\,B_iB_j|$. Таким чином, теорему доведено. □

Література

1. Ю. В. Козаченко, М. В. Енджиргли, *Обґрунтування застосування методу Фур'є до крайових задач з випадковими початковими умовами*, Теорія ймовірностей та математична статистика, № 51, 78–89.
2. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, "Наука", Москва, 1970.
3. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *К вопросу о применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями*, Случайные процессы в задачах математической физики, ИМ АН УССР, Киев, 1979, стр. 4–35.
4. Г. Н. Положий, *Уравнения математической физики*, "Высшая школа", Москва, 1964.
5. Б. М. Левитан, *Разложения по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка*, "Физматгиз", Москва–Ленинград, 1957.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Київський інститут військово-повітряних сил

Надійшла 16.12.93