Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 76–79

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 76–79

ОДНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ҐАУССОВОГО ПОЛЯ

УДК 519.21

О. О. КУРЧЕНКО

Резюме. Досліджується збіжність у середньому квадратичному і майже напевно послідовності випадкових величин

$$S_n = \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(X\left(\frac{k+1}{a_n}, \frac{j}{a_n}\right) - X\left(\frac{k}{a_n}, \frac{j}{a_n}\right)\right)^4,$$

де a_n — натуральне число, $n \geq 1$, $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Визначена границя послідовності $\{ S_n : n \geq 1 \}$ для випадкового поля Ченцова і двопараметричної броунівської функції.

Нехай фіксовано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, $\{ X(t,s) : 0 \leq t \leq b, 0 \leq s \leq b \}$, $b > 1$, — ґауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням. Розглянемо рівномірне розбиття одиничного квадрата $\mathcal{D} = [0,1]^2$

$$\{ [k/a_n, (k+1)/a_n] \times [j/a_n, (j+1)/a_n] : 0 \leq k, j \leq a_n - 1 \},$$

де a_n — натуральне число, $n \geq 1$. Приріст випадкового поля X на відрізку $[k/a_n, (k+1)/a_n]$ осі абсцис позначимо символом

$$\Delta_1 X_{kj} = X((k+1)/a_n, j/a_n) - X(k/a_n, j/a_n), \qquad 0 \leq k, j \leq a_n - 1.$$

При вивченні стохастичних інтеґралів для випадкових функцій двох змінних часто зустрічаються інтеґральні утворення різних типів [1]. Одним з таких утворень може бути сума

$$S_n = \sum_{k,j=0}^{a_n-1} (\Delta_1 X_{kj})^4, \qquad n \geq 1.$$

У цій роботі при умові, що $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, досліджується збіжність у середньому квадратичному і майже напевно послідовності випадкових величин $\{ S_n : n \geq 1 \}$ до сталої. Розглянуто приклади випадкового поля Ченцова і двопараметричної броунівської функції. Одержані результати відносяться до теорем типу Леві–Бакстера для випадкових полів.

Теорема 1. *Нехай* $\{ X(t,s) : 0 \leq t, s \leq b \}$, $b > 1$ *— ґауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням, неперервною на* $[0,b]^4$ *коваріаційною функцією і виконуються такі умови:*

1) *існує функція* $f : \mathcal{D} \mapsto \boldsymbol{R}$ *така, що* $\mathsf{E}(X(t+h,s) - X(t,s))^2/h \to f(t,s)$ *при* $h \downarrow 0$ *рівномірно на квадраті* $\mathcal{D}$;

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15, 60G17, 60G60.

2) $\exists\, c>0\ \forall\ \{t_1,t_2,t_1+h,t_2+h,s_1,s_2\}\subset[0,1],\ t_1\neq t_2,\ s_1\neq s_2$:

$$|\,\mathsf{E}(X(t_1+h,s_1)-X(t_1,s_1))(X(t_2+h,s_2)-X(t_2,s_2))|\leq ch^2/\sqrt{|t_1-t_2|\cdot|s_1-s_2|};$$

3) $a_n\to+\infty$ *при* $n\to\infty$.

Тоді

$$S_n\to 3\int_{\mathcal{D}} f^2(t,s)\,dt\,ds$$

у середньому квадратичному при $n\to\infty$.

Доведення. Для математичного сподівання випадкової величини S_n, $n\geq 1$, маємо

$$\mathsf{E}\,S_n=\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\mathsf{E}(\Delta_1X_{kj})^4=3\sum_{k,j=0}^{a_n-1}(\mathsf{E}(\Delta_1X_{kj})^2)^2=3\sum_{k,j=0}^{a_n-1}(f^2(k/a_n,j/a_n)+o(1))a_n^{-2}.$$

У цьому ланцюжку рівностей використано, що Δ_1X_{kj} — ґауссова випадкова величина з нульовим математичним сподіванням, $0\leq k,j\leq a_n-1$ та умова 1. Збіжність в умові 1 рівномірна. Тому $f\in\mathrm{C}(\mathcal{D})$ і

$$\mathsf{E}\,S_n\to 3\int_{\mathcal{D}} f^2(t,s)\,dt\,ds\qquad\text{при } n\to\infty. \tag{1}$$

Перейдемо до оцінки дисперсії випадкової величини S_n. Для математичного сподівання добутку $2k$, $k\geq 1$, ґауссових випадкових величин з нульовим середнім справедлива формула $\mathsf{E}(\xi_1\cdots\xi_{2k})=\sum\prod\mathsf{E}(\xi_i\xi_j)$, де сума береться за всіма розбиттями множини $\{\xi_1,\ldots,\xi_{2k}\}$ на пари $\{\xi_i,\xi_j\}$, а добуток — за всіма парами відповідного розбиття [:, с. 29]. Зокрема, $\mathsf{E}(\xi_1^4\xi_2^4)=72(\mathsf{E}\,\xi_1\xi_2)^2\,\mathsf{E}\,\xi_1^2\,\mathsf{E}\,\xi_2^2+24(\mathsf{E}\,\xi_1\xi_2)^4+9(\mathsf{E}\,\xi_2^2)^2(\mathsf{E}\,\xi_2^2)^2$. Застосуємо цю формулу при $\xi_1=\Delta_1X_{kj}$, $\xi_2=\Delta_1X_{\bar k\bar j}$, $0\leq k,j,\bar k,\bar j\leq a_n-1$, $n\geq 1$, для обчислення $\operatorname{Var}S_n$:

$$\operatorname{Var}S_n=\sum_{k,j=0}^{a_n-1}\sum_{\bar k,\bar j=0}^{a_n-1}\left(\mathsf{E}(\Delta_1X_{kj})^4(\Delta_1X_{\bar k,\bar j})^4-\mathsf{E}(\Delta_1X_{kj})^4\,\mathsf{E}(\Delta_1X_{\bar k\bar j})^4\right)=\sum_{k,j,\bar k,\bar j=0}^{a_n-1}Y_{kj\bar k\bar j}, \tag{2}$$

де

$$Y_{kj\bar k\bar j}=72(\mathsf{E}\,\Delta_1X_{kj}\Delta_1X_{\bar k\bar j})^2\,\mathsf{E}(\Delta_1X_{kj})^2\,\mathsf{E}(\Delta_1X_{\bar k\bar j})^2+24(\mathsf{E}\,\Delta_1X_{kj}\Delta_1X_{\bar k\bar j})^4.$$

Нехай $M=\{(k,j,\bar k,\bar j):0\leq k,j,\bar k,\bar j\leq a_n-1\}$ — множина індексів, за якими ведеться підсумовування у формулі (2); A — сукупність усіх тих індексів $(k,j,\bar k,\bar j)\in M$, для яких виконується хоча б одна з нерівностей $|k-\bar k|\leq 1$, $|j-\bar j|\leq 1$; $B=M\setminus A$. Зауважимо, що

$$\operatorname{card}(A)=O(a_n^3),\qquad n\to\infty. \tag{3}$$

За допомогою нерівності Коші–Буняковського отримуємо

$$Y_{kj\bar k\bar j}\leq 96(\mathsf{E}(\Delta_1X_{kj})^2)^2(\mathsf{E}(\Delta_1X_{\bar k\bar j})^2)^2, \tag{4}$$

де $0\leq k,j,\bar k,\bar j\leq a_n-1$. З умови 1 випливає, що $\exists\,\tilde c>0\ \exists\,N\ \forall\,n\geq N\ \forall\,k,j\in\{0,1,\ldots,a_n-1\}$:

$$\mathsf{E}(\Delta_1X_{kj})^2\leq\tilde c/a_n. \tag{5}$$

Із співвідношень (3)–(5) одержуємо

$$\sum_{(k,j,\bar k,\bar j)\in A}Y_{kj\bar k\bar j}=O(a_n^{-1}),\qquad n\to\infty. \tag{6}$$

З умови 2 випливає, що $\forall\ n \geq 1,\ \forall\ (k, j, \bar{k}, \bar{j}) \in B$

$$|\,\mathsf{E}\,\Delta_1 X_{kj} \Delta_1 X_{\bar{k}\bar{j}}| \leq c\left(a_n \sqrt{|k-\bar{k}| \cdot |j-\bar{j}|}\right)^{-1}.$$

З урахуванням нерівності (5) отримуємо наступний ланцюжок співвідношень для достатньо великих n:

$$\sum_{(k,j,\bar{k},\bar{j}) \in B} Y_{kj\bar{k}\bar{j}} \leq 96 \sum_{(k,j,\bar{k},\bar{j}) \in B} (\mathsf{E}\,\Delta_1 X_{kj} \Delta_1 X_{\bar{k}\bar{j}})^2\, \mathsf{E}(\Delta_1 X_{kj})^2\, \mathsf{E}(\Delta_1 X_{\bar{k}\bar{j}})^2$$

$$\leq 96 c \tilde{c} a_n^{-4} \Bigg(\sum_{\substack{k,\bar{k}=0, \\ |k-\bar{k}|>1}}^{a_n - 1} |k-\bar{k}|^{-1} \Bigg)^2 = O\left(\left(\frac{\ln a_n}{a_n}\right)^2\right), \qquad n \to \infty. \tag{7}$$

Співвідношення (6) та (7) дозволяють зробити висновок, що

$$\operatorname{Var} S_n = O(a_n^{-1}), \qquad n \to \infty. \tag{8}$$

З цієї рівності та збіжності в (1) одержуємо твердження теореми 1. □

Зауваження. Очевидно, твердження теореми 1 залишиться правильним, якщо умова 2 виконується лише для достатньо малих додатних величин h. □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ *збіжний. Тоді* $S_n \to \int_{\mathcal{D}} f^2(t,s)\, dt\, ds$ *майже напевно при* $n \to \infty$.

Доведення. Із співвідношення (8) випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} S_n$ збіжний. За допомогою нерівності Чебишева і леми Бореля–Кантеллі одержуємо, що $S_n - \mathsf{E}\, S_n \to 0$ майже напевно при $n \to \infty$. Враховуючи збіжність в (1), отримуємо твердження теореми 2. □

Приклад 1. Нехай $\{X(t,s)\colon 0 \leq t, s \leq b\}$, $b > 1$ — ґауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією $r(t_1, s_1; t_2, s_2) = \min(t_1, t_2) \min(s_1, s_2)$. Таке випадкове поле називають полем Ченцова [3]. Перевіримо виконання умов теореми 1. Для $\{t, s, t+h, s+h\} \subset [0, b]$, $h > 0$, маємо $\mathsf{E}(X(t+h, s) - X(t, s))^2 = sh$. Отже, умова 1 виконується для функції $f(t,s) = s$, $t, s \in [0,1]$. Для $\{t_1, t_2, s_1, s_2\} \subset [0,1]$, $t_1 \neq t_2$, $s_1 \neq s_2$, і достатньо малих додатних h маємо

$$\mathsf{E}\big((X(t_1+h, s_2) - X(t_1, s_1))(X(t_2+h, s_s) - X(t_2, s_2))\big) = 0.$$

Тому умова 2 з урахуванням зауваження виконується. Нехай для послідовності $\{a_n\colon n \geq 1\}$ виконується умова 3. За теоремою 1 $S_n \to 1$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Якщо при цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ збігається, то $S_n \to 1$ майже напевно при $n \to \infty$. □

Приклад 2. Нехай $\{X(t,s)\colon 0 \leq t, s \leq b\}$, $b > 1$, — ґауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією

$$r(t_1, s_1; t_2, s_2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1^2 + s_1^2} + \sqrt{t_2^2 + s_2^2} - \sqrt{(t_1 - t_2)^2 + (s_1 - s_2)^2}\right).$$

Таке випадкове поле Леві [4, с. 256] назвав двопараметричною броунівською функцією. Перевіримо виконання умов теореми 1. Для цього випадкового поля при $h > 0$ і $t, s \in [0,1]$: $\mathsf{E}(X(t+h, s) - X(t, s))^2 = h$. Отже, умова 1 виконується для функції $f(t,s) = 1$, $t, s \in [0,1]$. Нехай $h > 0$, $\{t_1, t_2, s_1, s_2, t_1 + h, t_2 + h\} \subset [0,1]$, $t_1 \neq t_2$, $s_1 \neq s_2$. За допомогою елементарних підрахунків отримуємо

$$|\mathsf{E}(X(t_1 + h, s_1) - X(t_1, s_1))(X(t_2 + h, s_2) - X(t_2, s_2))| \leq 5h^2/(\sqrt{2|t_1 - t_2| \cdot |s_1 - s_2|})$$

і умова 2 виконується при $c = 5/\sqrt{2}$. Нехай для послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ виконується умова 3. За теоремою 1 $S_n \to 3$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$. Якщо при цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ збіжний, то $S_n \to 3$ майже напевно при $n \to \infty$. □

Література

1. И. И. Гихман, *Симметрический стохастический интеграл на плоскости*, ДАН УССР (1985), № 6, 3–7.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские случайные процессы*, "Наука", Москва, 1970.
3. Н. Н. Ченцов, *Винеровские случайные поля от нескольких параметров*, ДАН СССР **106** (1956), № 4, 607–609.
4. П. Леви, *Стохастические процессы и броуновское движение*, "Наука", Москва, 1972.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра математичного аналізу

Надійшла 7.02.94