Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 80–86

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 80–86

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ БЮРҐЕРСА З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

УДК 519.21

М. М. ЛЕОНЕНКО ТА В. М. ПАРХОМЕНКО

РЕЗЮМЕ. Вивчаються властивості перенормованих розв'язків задачі Коші для рівняння Бюрґерса з сильно залежними початковими умовами. Знайдено спектральне зображення граничного ґауссового процесу.

1. Вступ

У даній роботі розглядаються граничні розподіли перенормованих розв'язків одновимірного рівняння Бюрґерса з початковою умовою, яка є стаціонарним ґауссовим процесом з сильною залежністю. Знайдено спектральне зображення ґауссового граничного процесу.

Рівняння Бюрґерса з випадковими початковими умовами вперше вивчалось у роботі [1]. Граничні розподіли для розв'язків задачі Коші для рівняння Бюрґерса розглядалися у роботах [2, 3], в яких початкова умова є випадковим процесом або полем типу дробового ефекту. Крім того, у роботі [2] анонсувались результати про асимптотичну нормальність функціонала, який міститься у знаменнику розв'язку одновимірного рівняння Бюрґерса (див. нижче формулу (5)) при ґауссовій початковій умові. Дана робота базується на статтях [4, 5], в яких досліджувались ґауссові та неґауссові розподіли, що є граничними для розв'язків рівняння Бюрґерса з ґауссовими та неґауссовими початковими умовами. Ми досліджуємо властивості граничного стаціонарного ґауссового процесу, який вперше розглядався у статті [4] (див. також [5]). Знайдено спектральне зображення цього процесу. Відзначимо також роботу [6], в якій отримано граничний ґауссів процес для перенормованих розв'язків багатовимірного рівняння Бюрґерса з слабко залежними ґауссовими та неґауссовими початковими умовами. Метод дослідження, який використовується у цій статті, ґрунтується на ідеях робіт [7–9], в яких досліджувались нелінійні функціонали від ґауссових часових рядів, процесів та полів. Відзначимо ще роботу [10], в якій одержано якісні результати про властивості періодичності неоднорідного рівняння Бюрґерса з випадковими початковими умовами. Слід вказати на численну кількість застосувань рівняння Бюрґерса, наприклад, у фізиці [11, 12].

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F05, 60G15; Secondary 70L05, 35Q53.

2. Результати

Розглянемо задачу Коші для одновимірного рівняння Бюрґерса

$$u'_t + uu'_x = \mu u''_{xx}, \qquad \mu > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \frac{d}{dx}v(x), \tag{2}$$

де $u = u(x,t)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, $t > 0$.

Введемо повний імовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. Надалі будемо досліджувати розв'язок задачі Коші (1), (2) у випадку, коли $v(x) = \xi(\omega, x)$, де $\xi(\omega, x)$, $\omega \in \Omega$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, — випадковий процес, що задовольняє наступну умову.

A. Нехай $\xi(x) = \xi(\omega, x)$, $\omega \in \Omega$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, — дійсний вимірний диференційований у середньому квадратичному стаціонарний ґауссів випадковий процес з $\mathsf{E}\,\xi(x) = 0$, $\mathsf{E}\,\xi^2(x) = 1$ та кореляційною функцією

$$B(x) = B(|x|) = \operatorname{cov}(\xi(0), \xi(x)) \underset{x\to\infty}{\simeq} \frac{L(|x|)}{|x|^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

де $L(t)$, $t > 0$, — функція, що повільно змінюється на нескінченності та обмежена в кожному обмеженому інтервалі.

Із умови A випливає, що корреляційна функція $B(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, не інтеґровна на $\boldsymbol{R}^1$, тобто $\xi(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, є процесом із сильною залежністю (див. [7–9]).

Відомо, що за умови A корреляційна функція $B(|x|)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, допускає спектральне зображення

$$B(|x|) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda x F(d\lambda) = \int_0^\infty \cos\lambda x\, dG(\lambda),$$

де $F(\cdot)$ — спектральна міра процесу $\xi(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, а $G(\lambda) = F((-\lambda, \lambda))$.

Б. Нехай існує спектральна щільність $f(\lambda) = f(|\lambda|)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}^1$, стаціонарного процесу $\xi(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, яка не зростає при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$.

За умов A та Б маємо спектральні зображення:

$$B(|x|) = 2\int_0^\infty \cos\lambda x f(\lambda)\, d\lambda, \qquad \xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\sqrt{f(\lambda)}\,W(d\lambda), \tag{3}$$

де $W(\cdot)$ — це комплексний ґауссів білий шум на вимірному просторі $(\boldsymbol{R}^1, \mathfrak{B}(\boldsymbol{R}^1))$, а $\mathfrak{B}(\boldsymbol{R}^1)$ — борелева σ-алґебра в $\boldsymbol{R}^1$.

Надалі буде використана тауберова теорема [13, 14, 15, с. 91], згідно з якою за умов A та Б

$$f(|\lambda|) \sim \alpha|\lambda|^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) / 2C_1(\alpha), \qquad \lambda \to 0+, \tag{4}$$

де

$$c_1(\alpha) = \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) 2^\alpha \sqrt{\pi} / \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \Gamma(1+\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Відомо (див., наприклад, [2–5, 11, 12]), що в класі потенціальних полів розв'язок задачі Коші (1), (2) можна подати у вигляді

$$u(x,t) = I(x,t)/J(x,t) = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}\log J(x,t), \tag{5}$$

де

$$I(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} g(x-y,t) e^{-\xi(y)/(2\mu)}\, dy.$$

$$J(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y,t) e^{-\xi(y)/(2\mu)}\, dy.$$

Тут і далі символом $g(z,t)$ позначене ґауссове ядро

$$g(z,t) = \exp\{-|z|^2/(4\mu t)\}/\sqrt{4\pi\mu t}, \qquad z \in \boldsymbol{R}^1,\ t>0,\ \mu>0.$$

Основний зміст даної роботи складає дослідження асимптотичної поведінки розв'язків $u(a\sqrt{t},t)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$ задачі Коші (1), (2) при $t \to \infty$. Оскільки $v(x) = \xi(x)$ — стаціонарний ґауссів випадковий процес, що задовольняє умову А, то $u(a\sqrt{t},t)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$, $t > 0$ — випадкове поле. Зауважимо, що заміна змінних $x = a\sqrt{t}$ зумовлена фізичними міркуваннями.

Заміною Куола–Хопфа $u(x,t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} z(x,t)$ задача Коші (1), (2) у класі потенціальних полів зводиться до задачі Коші для рівняння теплопроводності для функції $z(x,t)$. Звідси і випливає формула (5), де $g(x,t)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, $t > 0$, — фундаментальний розв'язок рівняння теплопроводності (докладніше див. [11, 12]).

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема. *Нехай $u(x,t)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$, $t > 0$, — розв'язок задачі Коші для рівняння Бюрґерса у класі потенціальних полів з випадковою початковою умовою $v(x) = \xi(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^1$. За умов* А, Б *скінченновимірні розподіли випадкових полів*

$$X_t(a) = \frac{t^{1/2+\alpha/4}}{\sqrt{L(\sqrt{t})}} u(a\sqrt{t},t), \qquad a \in \boldsymbol{R}^1,\ 0<\alpha<1,$$

при $t \to \infty$ слабко збігаються до скінченновимірних розподілів стаціонарного ґауссового процесу $X(a)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$, який допускає зображення

$$X(a) = -c_2(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda a}}{i} b(\lambda) W(d\lambda),$$

де

$$b(\lambda) = \exp\{-\mu\lambda^2\}\lambda|\lambda|^{(\alpha-1)/2}, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R},$$
$$c_2(\alpha) = \sqrt{\alpha/(2c_1(\alpha))}.$$

Зауваження. Коваріаційна функція стаціонарного ґауссового процесу $X(a)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$, має вигляд

$$R(a-b) = \operatorname{cov}(X(a),X(b)) = \frac{\alpha}{2c_1(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(a-b)} h(\lambda)\, d\lambda, \qquad a,b \in \boldsymbol{R}^1,$$

де спектральна щільність

$$h(\lambda) = b^2(\lambda) = \exp\{-2\mu\lambda^2\}|\lambda|^{1+\alpha}, \qquad \lambda \in \boldsymbol{R}^1.$$

Якщо $L_2(\Omega)$ — ґільбертів простір випадкових величин із скінченним моментом другого порядку, то стаціонарний випадковий процес $X(a)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$ є $L_2(\Omega)$-еквівалентним стаціонарному ґауссовому процесу

$$\widetilde{X}(a) = c_2(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda a} \sqrt{h(\lambda)} W(d\lambda) = c_2(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda a - \mu\lambda^2} |\lambda|^{(1+\alpha)/2} W(d\lambda).$$

Відмітимо, що $h(0) = 0$.

У роботах [4, 5] наведено іншу формулу для коваріаційної функції $R(a-b)$, а саме

$$R(a-b) = (2\mu)^{-1-\alpha/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_1 w_2 \varphi(w_1)\varphi(w_2) \frac{dw_1\, dw_2}{\left| w_1 - w_2 - \frac{a-b}{\sqrt{2\mu}} \right|^{\alpha}},$$

$$0 < \alpha < 1, \qquad a, b \in \boldsymbol{R}^1.$$

Функція $R(c)$, $c \in \boldsymbol{R}^1$, абсолютно не інтеґровна.

3. Доведення теореми

Виконаємо заміну змінних $x = a\sqrt{t}$ у формулі (5) і запишемо $I(a\sqrt{t}, t)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$, $t > 0$ у вигляді суми двох доданків:

$$I(a\sqrt{t}, t) = I_1(t) + I_2(t),$$

де

$$I_1(t) = \int_{-t}^{t} \frac{a\sqrt{t} - y}{t} g\big(a\sqrt{t} - y, t\big) \exp\left\{ -\frac{\xi(y)}{2\mu} \right\} dy,$$

$$I_2(t) = \int_{|y|>t} g\big(a\sqrt{t} - y, t\big) \exp\left\{ -\frac{\xi(y)}{2\mu} \right\} dy.$$

У ґільбертовому просторі $L_2(\Omega)$ має місце такий розклад

$$I_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \eta_k(a,t)/k!, \qquad C_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u/(2\mu)} H_k(u)\varphi(u)\, du,$$

де стандартна ґауссова щільність $\varphi(u) = \exp\{-u^2/2\}/\sqrt{2\pi}$, $u \in \boldsymbol{R}^1$, $H_k(u)$, $u \in \boldsymbol{R}^1$, $k = 0, 1, \ldots$, — поліноми Ерміта із старшим коефіцієнтом, рівним одиниці ($H_k(u)$ утворюють повну ортоґональну систему у ґільбертовому просторі $L_2(\boldsymbol{R}^1, \varphi(u)\, du)$), а випадкові величини

$$\eta_k(a,t) = \int_{-t}^{t} \frac{a\sqrt{t} - y}{t} g\big(a\sqrt{t} - y, t\big) H_k(\xi(y))\, dy, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Оскільки $\mathsf{E}\, I_1(t) = 0$, то, використовуючи добре відому формулу (див., наприклад, [7–9])

$$\mathsf{E}\, H_k(\xi(y_1)) H_j(\xi(y_2)) = k!\, \delta_k^j B^k(|y_1 - y_2|), \qquad \delta_k^j = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

одержуємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} I_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{(k!)^2} \operatorname{Var} \eta_k(a,t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \int_{-t}^{t} \int_{-t}^{t} \frac{a\sqrt{t} - u}{t} \frac{a\sqrt{t} - v}{t} g\big(a\sqrt{t} - u, t\big) g\big(a\sqrt{t} - v, t\big) B^k(|u - v|)\, du\, dv. \end{aligned}$$

З урахуванням властивостей функцій, що повільно змінюються при $t \to \infty$, маємо

$$\operatorname{Var} \eta_k(a,t) \sim \frac{k!\,(2\mu)^{1-k\alpha/2}}{t^{1+k\alpha/2}} L^k\big(\sqrt{t}\big) S_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

де

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_1 w_2 \varphi(w_1)\varphi(w_2)\frac{dw_1\,dw_2}{|w_1-w_2|^{k\alpha}}, \qquad 0<\alpha<\frac{1}{k}.$$

Запишемо $I_1(t)$ у вигляді суми трьох доданків

$$I_1(t) = C_0\eta_0(a,t) + C_1\eta_1(a,t) + R_t,$$

де

$$R_t = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{C_k}{k!}\eta_k(a,t).$$

Легко бачити, що $\lim_{t\to\infty} C_0\eta_0(a,t) = 0$. Для дисперсії R_t маємо таку оцінку:

$$\operatorname{Var} R_t \le \frac{\operatorname{Var}\eta_2(a,t)}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!},$$

причому

$$\operatorname{Var}\eta_2(a,t) \le \frac{k_1}{t}e^{-s^2(a,t)} + \varepsilon k_2\frac{L(\sqrt{t})}{t^{1+\alpha/2}},$$

де k_1, k_2 — деякі додатні сталі, ε — довільне додатне число,

$$s(a,t) = \frac{a}{\sqrt{2\mu}} - \sqrt{\frac{t}{2\mu}}.$$

Застосувавши нерівність Чебишова, отримаємо

$$\frac{R_t}{C_1^2\operatorname{Var}\eta_1(a,t)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad t\to\infty.$$

Взявши це до уваги, розглянемо тільки доданок $C_1\eta_1(a,t)$, оскільки за [4, 5] маємо

$$L^{-1/2}(\sqrt{t})\,t^{1/2+\alpha/4}I_2(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad t\to\infty,$$
$$J(a\sqrt{t},t) \xrightarrow{\mathsf{P}} \exp\left\{\frac{1}{8\mu^2}\right\}, \qquad t\to\infty.$$

Безпосередні підрахунки показують, що

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu}\exp\left\{\frac{1}{8\mu^2}\right\}.$$

Отже, з леми Слуцького та результатів робіт [4, 5] випливає

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{Var}[X_t(a) - \zeta_t(a)] = 0,$$

де

$$X_t(a) = \frac{t^{1/2+\alpha/4}}{\sqrt{L(\sqrt{t})}}u(a\sqrt{t},t), \qquad \zeta_t(a) = -\frac{t^{1/2+\alpha/4}}{\sqrt{L(\sqrt{t})}}\frac{\eta_1(a,t)}{2\mu}, \qquad a\in\boldsymbol{R}^1,\ t>0,$$

тобто функціонал $\zeta_t(a)$, $a\in\boldsymbol{R}^1$ є супроводжуючим для функціонала $X_t(a)$, $a\in\boldsymbol{R}^1$, який є перенормованим розв'язком рівняння Бюрґерса. Це означає, що граничні розподіли сімейств випадкових величин $X_t(a)$ та $\zeta_t(a)$ при $t\to\infty$ співпадають (якщо хоча б один з них існує).

Розглянемо випадкові поля $T_t(a) = \zeta_t(a) - X(a)$. Зважаючи на метод Крамера–Уолда, для доведення теореми залишилось обґрунтувати таке співвідношення:

$\mathsf{E}\,|T_t(a)|^2 \to 0$, $t \to \infty$. Скориставшись спектральним зображенням (3), після заміни змінних для $\zeta_t(a)$ дістанемо таке зображення:

$$\zeta_t(a) = -\frac{t^{1/2+\alpha/4}}{2\mu\sqrt{L(\sqrt{t})}} \int_{R^1} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{a-y}{\sqrt{4\pi\mu}} \exp\left\{-\frac{(a-y)^2}{4\mu} + i\lambda y\right\} dy \frac{\sqrt{f(|\lambda|/\sqrt{t})}}{t^{3/4}} W(d\lambda),$$

$$a \in \boldsymbol{R}^1, \qquad t > 0,$$

(була використана автомодельність ґауссового білого шуму: $W(a\,d\lambda) \stackrel{d}{=} \sqrt{a} W(d\lambda)$). Оцінимо тепер $\mathsf{E}\,|T_t(a)|^2$. Для $A(t) = 2t^{1+\alpha/2}/L(\sqrt{t})$ маємо такі нерівності:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,|T_t(a)|^2 \le \left(\frac{t^{1/2+\alpha/4}}{L^{1/2}(\sqrt{t})}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg| & \frac{e^{i\lambda a-\lambda^2\mu}}{2\mu i} \frac{2\mu\lambda}{t^{3/4}} f^{1/2}\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{t}}\right) \\
& - \left(\frac{\alpha}{2c_1(\alpha)}\right)^{1/2} \frac{L^{1/2}(\sqrt{t})}{t^{1/2+\alpha/4}} \frac{e^{i\lambda a-\lambda^2\mu}}{i} \frac{\lambda}{|\lambda|^{(1-\alpha)/2}} \\
& - \int_{|z|>\sqrt{t}} \frac{e^{i\lambda z}}{2\mu}(a-z) \frac{e^{-(a-z)^2/(4\mu)}}{\sqrt{4\pi\mu}} f^{1/2}\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{t}}\right) \frac{dz}{t^{3/4}} \Bigg|^2 d\lambda \\
\le A(t) \Bigg\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg| & \frac{e^{-\lambda^2\mu}}{it^{3/4}} \lambda f^{1/2}\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{L(\sqrt{t})\alpha}{2c_1(\alpha)}\right)^{1/2} \frac{e^{-\lambda^2\mu}}{it^{1/2+\alpha/4}} \frac{\lambda}{|\lambda|^{(1-\alpha)/2}} \Bigg|^2 d\lambda \\
& + \frac{1}{\mu t} \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg| \int_{|z|>\sqrt{t}} e^{i\lambda z} \frac{(a-z)}{\sqrt{4\pi\mu}} e^{-(a-z)^2/4\mu} dz \Bigg|^2 f\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{t}}\right) t^{-3/4} d\lambda \Bigg| \Bigg\} \\
= V_1(a,t) + V_2(a,t).
\end{aligned}$$

$V_2(a,t) \to 0$ при $t \to \infty$, оскільки

$$\begin{aligned}
0 \le V_2(a,t) &\le 2\frac{t^{1+\alpha/2}}{L(\sqrt{t})t^2} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{t}}\right) d\lambda \left| \int_{-\infty}^{\infty} (a-z) g(a,z)\, dz \right|^2 \\
&\le \frac{\text{const}}{t^{1-\alpha/2}} \to 0, \qquad t \to \infty, \quad 0 < \alpha < 1.
\end{aligned}$$

Доведемо тепер, що $V_1(a,t) \to 0$ при $t \to \infty$:

$$0 \le V_1(a,t) \le A(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda^2\mu}}{t^{1/2}} \frac{\lambda^2}{|\lambda|^{1-\alpha}} \left| f^{1/2}\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{t}}\right) \frac{|\lambda|^{(1-\alpha)/2}}{t^{1/4}} - \frac{B(t)}{t^{\alpha/4}} \right|^2 d\lambda,$$

де $B(t) = \big(\alpha L(\sqrt{t})/2c_1(\alpha)\big)^{1/2}$.

Із (4) випливає, що асимптотична поведінка останнього виразу при $t \to \infty$ співпадає з асимптотичною поведінкою функції

$$\begin{aligned}
U(t) &= 2\frac{t^{1+\alpha/2}}{L(\sqrt{t})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda^2\mu}\lambda^2}{|\lambda|^{1-\alpha}} \left| \left(\frac{\alpha L(\sqrt{t}/|\lambda|)}{2c_1(\alpha)}\right)^{1/2} \frac{1}{t^{(\alpha-1)/4}t^{3/4}} - \frac{B(t)}{t^{1/2+\alpha/4}} \right|^2 d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{c_1(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda^2\mu} |\lambda|^{1+\alpha} \left| \left(\frac{L(\sqrt{t}/|\lambda|)}{L(\sqrt{t})}\right)^{1/2} - 1 \right|^2 d\lambda.
\end{aligned} \tag{6}$$

Функція $\exp\{-2\lambda^2\mu\}|\lambda|^{1+\alpha}$ абсолютно інтеґровна, за властивостями функцій, що повільно змінюються, вираз (6) прямує до нуля при $t \to \infty$. Отже, $V_1(t) \to 0$, $t \to \infty$ і доведення теореми завершено. □

Зауваження. Як видно з доведення, у даній роботі показана L_2-збіжність процесів $X_t(a)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$, $t > 0$ до $X(a)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$, при $t \to \infty$, або L_2-еквівалентного процесу $\widetilde{X}(a)$, $a \in \boldsymbol{R}^1$.

Література

1. M. Rosenblatt, *Scale renormalization and random solutions of Burgers equation*, J. Appl. Prob. **24** (1987), 328–338.
2. А. В. Булинский, С. А. Молчанов, *Асимптотическая гауссовость решений уравнения Бюргерса с случайными начальными данными*, Теор. вероятн. и применен. **36** (1991), № 2, 217–235.
3. L. Giraitis, S. A. Molchanov, and D. Surgailis, *Long memory shot noises and limit theorems with applications to Burgers equations*, New directions in time series analysis. Part II. IMA Vol. Math. Appl., vol. 46, Springer-Verlag, 1993, pp. 163–171.
4. N. N. Leonenko and E .Orsingher, *Limit theorems for solutions of Burgers equation with Gaussian and non-Gaussian initial conditions*, Теор. вероятн. и применен. **40** (1995), № 2, 387–403.
5. Н. Н. Леоненко, Э. Орсингер, К. В. Рыбасов, *Предельные распределения решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными начальными данными*. I, Укр. мат. журн. **46** (1994), № 7, 870–877 ; II, № 8, 1003–1011.
6. М. М. Леоненко, І. І. Дерієв, *Граничні теореми для розв'язків багатовимірного рівняння Бюрґерса з слабко залежними випадковими початковими умовами*, Теор. ймовірност. та матем. статист. (1994), № 51, 98–110.
7. R. L. Dobrushin and P. Major, *Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **50** (1979), № 1, 27–52.
8. M. S. Taqqu, *Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **50** (1979), № 1, 53–83.
9. Н. Н. Леоненко, А. В. Иванов, *Статистический анализ случайных полей*, "Вища школа", Киев, 1986.
10. Ya. G. Sinai, *Two results concerning asymptotic behaviour of solutions of Burgers equation with forse*, J. Statist. Physics **64** (1991), 1–12.
11. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, "Мир", Москва, 1977.
12. С. Н. Гурбатов, А. Н. Малахов, А. И. Саичев, *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии*, "Наука", Москва, 1990.
13. Г. Лауэ, *Тауберовы и абелевы теоремы для характеристических функций*, Теория вероятност. и математ. статист. (1987), № 37, 78–92.
14. Н. Н. Леоненко, А. Я. Оленко, *Тауберова и абелева теоремы для корреляционной функции однородного изотропного случайного поля*, Укр. мат. журн. **43** (1991), № 12, 1652–1664.
15. H.-J. Rosenberg, B. Jesiak and G. Siegel, *Analytic methods of probability theory*, Akademic-Verlag, Berlin, 1985.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 9.03.94