Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 87–96

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 87–96

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ПРО ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ДЛЯ ЛОҐАРИФМА ВІДНОШЕННЯ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

УДК 519.21

Ю. М. ЛІНЬКОВ ТА М. І. МЄДВЄДЄВА

РЕЗЮМЕ. Доведено теореми про великі відхилення лоґарифма відношення правдоподібності у схемі загальних бінарних експериментів. На цій основі досліджено швидкість спадання ймовірностей помилок критерію Неймана–Пірсона.

1. Вступ

Нехай $(X^t, \mathfrak{B}^t, \mathsf{P}^t, \widetilde{\mathsf{P}}^t)$, $t \in R_+$, — сукупність бінарних статистичних експериментів, які породжуються спостереженнями ξ^t, взагалі кажучи, довільної природи, де P^t (відповідно $\widetilde{\mathsf{P}}^t$) — ймовірнісна міра, яка задає розподіл спостережень ξ^t, коли вірна ґіпотеза H^t (відповідно $\widetilde{H}^t$) [1]. Розглянемо задачу перевірки двох простих ґіпотез H^t та $\widetilde{H}^t$ за результатами спостережень ξ^t.

Нехай $\mathbf{Q}_t = (\mathsf{P}^t + \widetilde{\mathsf{P}}^t)/2$ та $\mathfrak{z}_t = d\mathsf{P}^t/d\mathbf{Q}^t$, $\tilde{\mathfrak{z}}^t = d\widetilde{\mathsf{P}}^t/d\mathbf{Q}^t$ — похідні Радона–Нікодіма мір P^t та $\widetilde{\mathsf{P}}^t$ відносно міри $\mathbf{Q}^t$. Введемо в розгляд відношення правдоподібності $z_t = \tilde{\mathfrak{z}}/\mathfrak{z}_t$ та $\tilde{z}_t = \mathfrak{z}_t/\tilde{\mathfrak{z}}_t$, поклавши $0/0 = 0$. Нехай δ_t — критерій Неймана–Пірсона рівня α_t для розрізнення ґіпотез H^t і $\widetilde{H}^t$ [1]. Тоді

$$\delta_t = I(\Lambda_t > d_t) + q_t I(\Lambda_t = d_t), \tag{1}$$

де $I(A)$ — індикатор множини A, $\Lambda_t = \ln z_t$, а $d_t \in [-\infty, \infty]$ і $q_t \in [0,1]$ — параметри критерію δ_t, які визначаються умовою $\mathsf{E}^t \delta_t = \alpha_t$ (тут E^t — математичне сподівання відносно міри P^t). Позначимо через β_t ймовірність помилки 2-го роду критерію δ_t.

Розглянемо поведінку α_t та β_t, якщо $t \to \infty$. Із рівності (1) видно, що поведінка α_t і β_t визначається поведінкою Λ_t при $t \to \infty$. У цій роботі будемо розглядати випадок, коли для Λ_t справедливі теореми про великі відхилення.

Позначимо через $H_t(\varepsilon)$ інтеґрал Хелінґера порядку ε для мір $\widetilde{\mathsf{P}}^t$ і $\mathbf{P}^t$, покладаючи

$$H_t(\varepsilon) = H(\varepsilon; \widetilde{\mathsf{P}}^t, \mathsf{P}^t) = \mathsf{E}_{\mathbf{Q}^t}\, \tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon},$$

де $\mathsf{E}_{\mathbf{Q}^t}$ — математичне сподівання відносно міри $\mathbf{Q}^t$ [1]. Аналогічно введемо інтеґрал Хелінґера $\widetilde{H}_t(\varepsilon)$ порядку ε для мір P^t і $\widetilde{\mathsf{P}}^t$, покладаючи

$$\widetilde{H}_t(\varepsilon) = H(\varepsilon; \mathsf{P}^t, \widetilde{\mathsf{P}}^t) = \mathsf{E}_{\mathbf{Q}^t}\, \mathfrak{z}_t^{\varepsilon} \tilde{\mathfrak{z}}_t^{1-\varepsilon}.$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F10, 62A10, 62F05.

Очевидно, що $\widetilde{H}_t(\varepsilon) = H_t(1-\varepsilon)$. З означення інтеґралів Хелінґера $H_t(\varepsilon)$ і $\widetilde{H}_t(\varepsilon)$ маємо $H_t(0) = \widetilde{H}_t(1) = \mathsf{P}^t(\tilde{\mathfrak{z}}_t > 0)$, $H_t(1) = \widetilde{H}_t(0) = \widetilde{\mathsf{P}}^t(\mathfrak{z}_t > 0)$, а при $\varepsilon \neq 0$ та $\varepsilon \neq 1$

$$H_t(\varepsilon) = \mathsf{E}^t z_t^\varepsilon = \widetilde{\mathsf{E}}^t \tilde{z}_t^{1-\varepsilon} = \widetilde{H}_t(1-\varepsilon), \tag{2}$$

де $\widetilde{\mathsf{E}}^t$ — математичне сподівання відносно міри $\widetilde{\mathsf{P}}^t$ [1].

Введемо позначення

$$\varepsilon_-^{(t)} = \inf\{\,\varepsilon\colon H_t(\varepsilon) < \infty\,\}, \qquad \varepsilon_+^{(t)} = \sup\{\,\varepsilon\colon H_t(\varepsilon) < \infty\,\}.$$

Якщо $\varepsilon_-^{(t)} < 0$, то $H_t(0) = 1$, а якщо $\varepsilon_+^{(t)} > 1$, то $H_t(1) = 1$. Тоді для всіх $\varepsilon \in \left(\varepsilon_-^{(t)}, \varepsilon_+^{(t)}\right)$ рівність (2) можна записати у вигляді

$$H_t(\varepsilon) = \mathsf{E}^t e^{\varepsilon \Lambda_t} = \widetilde{\mathsf{E}}^t e^{(1-\varepsilon)\tilde{\Lambda}_t} = \widetilde{H}_t(1-\varepsilon),$$

де $\tilde{\lambda}_t = \ln \tilde{z}_t$.

Введемо таку умову:

H. Для будь-яких ε існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln H_t(\varepsilon) = \varkappa(\varepsilon), \tag{3}$$

де $\psi_t \to \infty$, якщо $t \to \infty$, а $\varkappa(\varepsilon)$ — деяка властива опукла функція [2], диференційовна на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, та $\gamma_- < \gamma_+$, де

$$\varepsilon_- = \inf\{\,\varepsilon\colon \varkappa(\varepsilon) < \infty\,\}, \qquad \varepsilon_+ = \sup\{\,\varepsilon\colon \varkappa(\varepsilon) < \infty\,\},$$
$$\gamma_- = \lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_-} \varkappa'(\varepsilon), \qquad \gamma_+ = \lim_{\varepsilon\uparrow\varepsilon_+} \varkappa'(\varepsilon).$$

Очевидно, що $\varkappa(0) \le 0$ та $\varkappa(1) \le 0$, отже, $\varepsilon_- \le 0$ та $\varepsilon_+ \ge 1$. З означення інтеґрала Хелінґера $H_t(\varepsilon)$ випливає, що у випадку $\varepsilon_- < 0$ вірна рівність $\varkappa(0) = 0$, а у випадку $\varepsilon_+ > 1$ маємо $\varkappa(1) = 0$.

З результатів робіт [3,4] випливає справедливість теорем про великі відхилення для Λ_t у схемі загальних бінарних статистичних експериментів, коли в умові **H** $\varepsilon_- = -\infty$ та $\varepsilon_+ = \infty$. У роботі [5] у цих теоремах припускається, що в умові **H** $\varepsilon_- < 0$, а функція $\varkappa(\varepsilon)$ строго опукла та двічі неперервно диференційовна. У даній роботі ми встановимо теореми про великі відхилення для Λ_t у схемі загальних бінарних експериментів при виконанні умови **H** з довільними $\varepsilon_- \le 0$ та $\varepsilon_+ \ge 1$, до того ж одержимо теореми відносно мір P^t та $\widetilde{\mathsf{P}}^t$. Відзначимо роботу [6], у котрій подібні теореми одержані за умови **H**, в якій $\varepsilon_- < 0$, $\varepsilon_+ > 1$, а функція $\varkappa(\varepsilon)$, крім того, строго опукла. Дослідження поведінки α_t та β_t, якщо $t \to \infty$, при виконанні теорем про великі відхилення у випадку спостережень $\xi^t = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t)$, де $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ незалежні та однаково розподілені, присвячена робота [7]. Ця задача для ланцюгів Маркова $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ розглядалась у роботі [8], а для лічильних процесів — у роботі [9]. Відзначимо також роботу [6], у якій для загальних бінарних експериментів досліджувалась поведінка α_t та β_t, коли справедливі теореми про великі відхилення для Λ_t. У даній роботі ми досліджуємо поведінку α_t та β_t для загальних бінарних експериментів при виконанні менш обмежувальної умови **H**.

2. Теореми про великі відхилення

При виконанні умови **H** введемо наступні величини: $\gamma_0 = \varkappa'(0)$, якщо $\varepsilon_- < 0$, та $\gamma_1 = \varkappa'(1)$, якщо $\varepsilon_+ > 1$. Крім того, введемо перетворення Лежандра–Фенхеля $I(\gamma)$ функції $\varkappa(\varepsilon)$, покладаючи [2,4]

$$I(\gamma) = \sup_{-\infty<\varepsilon<\infty} (\gamma\varepsilon - \varkappa(\varepsilon)).$$

Із властивості перетворення Лежандра–Фенхеля випливає, що функція $I(\gamma)$ є невід'ємною, опуклою, замкненою й у випадку $\gamma_- < \gamma_+$ скінченною при $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ та для кожного $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ виконується рівність $I(\gamma) = \gamma\varepsilon_\gamma - \varkappa(\varepsilon_\gamma)$, де ε_γ — будь-який розв'язок рівняння $\varkappa'(\varepsilon) = \gamma$ [2,4]. Відзначимо, що для кожного $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ знайдеться, можливо, не єдине $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ таке, що $\varkappa'(\varepsilon) = \gamma$.

Теорема 1. *Якщо виконується умова* **H** *та* $\varepsilon_- < 0$, *то справедливі наступні твердження:*

а) *якщо* $\gamma_0 < \gamma_+$, *то для кожного* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) = -I(\gamma); \tag{4}$$

б) *якщо* $\gamma_- < \gamma_0$, *то для кожного* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \leq \gamma) = -I(\gamma). \tag{5}$$

Доведення. Нехай $\gamma_0 < \gamma < \gamma_+$. Для кожного $\varepsilon > 0$ згідно з нерівністю Чебишова маємо

$$\mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) \leq \exp\{-\psi_t(\varepsilon\gamma - \varkappa_t(\varepsilon))\},$$

де $\varkappa_t(\varepsilon) = \ln H_t(\varepsilon)$. Звідси випливає

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) \leq -\sup_{\varepsilon>0}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon)). \tag{6}$$

З властивостей функції $I(\gamma)$ маємо $\inf_\gamma I(\gamma) = I(\gamma_0) = 0$. А оскільки $\gamma > \gamma_0$ та $\varkappa(0) = 0$, то

$$I(\gamma) = \sup_{-\infty<\varepsilon<\infty} (\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon)) = \sup_{\varepsilon\neq 0}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon)).$$

Оскільки функція $\varkappa(\varepsilon)$ опукла та диференційовна, то $\varkappa(\varepsilon) \geq \varkappa'(0)\varepsilon = \gamma_0\varepsilon$, і звідси маємо $\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon) \leq \varepsilon(\gamma - \gamma_0) < 0$ для кожного $\varepsilon > 0$. Отже, $I(\gamma) = \sup_{\varepsilon>0}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon))$. Таким чином, з (6) одержуємо

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) \leq -I(\gamma). \tag{7}$$

Доведемо, що для кожного $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \geq -I(\gamma). \tag{8}$$

Нехай $z \in (\gamma_0, \gamma_+)$ довільне, а $\delta > 0$ таке, що $(z-\delta, z+\delta) \subset (\gamma_0, \gamma_+)$. Введемо ймовірнісні міри

$$\mathsf{P}_{t,\varepsilon}(dx) = \exp(\psi_t\varepsilon x)\mathsf{P}_t(dx)(H_t(\varepsilon))^{-1},$$

де $\mathsf{P}_t(A) = \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \in A)$. Якщо $x \in (z-\delta, z+\delta)$, то $-\varepsilon x \geq -z\varepsilon - \delta|\varepsilon|$ для кожного ε. Отже, для кожного $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \geq \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \in (z-\delta, z+\delta)) = H_t(\varepsilon)\int\limits_{z-\delta}^{z+\delta} \exp(-\psi_t \varepsilon x)\mathsf{P}_{t,\varepsilon}(dx)$$
$$\geq \exp\{\psi_t(\varkappa_t(\varepsilon) - z\varepsilon) - \psi_t\delta|\varepsilon|\}\mathsf{P}_{t,\varepsilon}\{(z-\delta, z=\delta)\},$$

звідки одержуємо

$$\liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \geq \varkappa(\varepsilon) - z\varepsilon - \delta|\varepsilon| + \liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{P}_{t,\varepsilon}\{(z-\delta, z=\delta)\}. \quad (9)$$

Нехай тепер $\varepsilon = \varepsilon_z$ таке, що $\varkappa'(\varepsilon_z) = z$. Тоді $\varkappa(\varepsilon_z) - z\varepsilon_z = I(z)$. Введемо сукупність випадкових величин $\Lambda_{t,\varepsilon}$, $t \in \boldsymbol{R}_+$, таку, що $\psi_t^{-1}\Lambda_{t,\varepsilon}$ має розподіл $\mathsf{P}_{t,\varepsilon}$, і покладемо $\varepsilon = \varepsilon_z$. Тоді для кожного s такого, що $\varepsilon_- < s + \varepsilon < \varepsilon_+$ маємо

$$\begin{aligned}\varkappa_\varepsilon(s) &= \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \int \exp(\psi_t s x)\mathsf{P}_{t,\varepsilon}(dx)\\ &= \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln\left\{\int \exp(\psi_t(\varepsilon+s)x)\mathsf{P}_t(dx)\exp(-\psi_t\varkappa_t(\varepsilon))\right\}\\ &= \varkappa(s+\varepsilon) - \varkappa(\varepsilon).\end{aligned}$$

Оскільки $\varkappa(\varepsilon)$ диференційовна, то $\varkappa_\varepsilon(s)$ диференційовна по s у точці $s = 0$ та $\varkappa'_\varepsilon(0) = \varkappa'(\varepsilon) = z$. Застосовуючи тепер імплікацію b) $\Rightarrow$ a) з теореми II.6.3 [4] до сукупності $\Lambda_{t,\varepsilon}$, $t \in \boldsymbol{R}_+$, одержуємо

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_{t,\varepsilon}((z-\delta, z+\delta)) = 1.$$

Звідси та з (9), підставляючи $\varepsilon = \varepsilon_z$, маємо

$$\liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \geq -I(z) - \delta|\varepsilon_z|.$$

Переходячи тепер до границі спочатку при $\delta \to 0$, а потім при $z \to \gamma$, звідси одержуємо співвідношення (8).

Використовуючи очевидне включення $(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \subset (\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma)$, із співвідношень (7) та (8) дістаємо

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \leq \limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) \leq -I(\gamma), \quad (10)$$
$$\liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) \geq \liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \geq -I(\gamma). \quad (11)$$

Об'єднуючи співвідношення (10) та (11), одержуємо співвідношення (4). Твердження а) доведено.

Твердження б) доводиться аналогічно. □

Зауваження 1. Доведення теореми 1 проведено за схемою доведення теореми II.6.1 [4] у одновимірному випадку при виконанні умови **H**, у якій $\varepsilon_- < 0$, з відповідними змінами. Використана імплікація b) $\Rightarrow$ a) з теореми II.6.3 [4] при умові, що **H** з $\varepsilon_- < 0$ є вірна. Справді, аналогічно нерівності (7) можна встановити нерівність

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \leq \gamma) \leq -I(\gamma) \quad (12)$$

для кожного $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_0)$. Тепер з (7) та (12) можна легко встановити імплікацію з теореми II.6.3 [3].

Теорема 2. *Якщо виконується умова* **H** *та* $\varepsilon_- = 0$, *то для кожного* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) = -I(\gamma) \in (-\infty, \varkappa(0+)). \quad (13)$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) \leq -\sup_{\varepsilon>0}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon)). \quad (14)$$

Нехай $\varepsilon_\gamma \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ таке, що $\varkappa'(\varepsilon_\gamma) = \gamma$ та $\varepsilon' \in (\varepsilon_-, \varepsilon_\gamma)$. Тоді з монотонності різницевих відношень $(\varkappa(x) - \varkappa(y))/(x - y)$ при $x, y \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ [2] випливає, що $(\varkappa(\varepsilon') - \varkappa(\varepsilon_\gamma))/(\varepsilon' - \varepsilon_\gamma) \leq \varkappa'(\varepsilon_\gamma)$. Переходячи до границі при $\varepsilon' \to \varepsilon_- = 0$, маємо $\varkappa'(\varepsilon_\gamma)\varepsilon_\gamma \geq \varkappa(\varepsilon_\gamma) - \varkappa(0+)$. Оскільки $I(\gamma) = \gamma\varepsilon_\gamma - \varkappa(\varepsilon_\gamma)$, то звідси одержуємо $I(\gamma) \geq -\varkappa(0+)$. Але $\varepsilon_- = 0$, і, отже, $\varkappa(\varepsilon) = \infty$ при $\varepsilon < 0$. Тому

$$I(\gamma) = \sup_{\varepsilon}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon)) = \sup_{\varepsilon\neq 0}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon)) = \sup_{\varepsilon>0}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon)).$$

Звідси та з (13) маємо, що для кожного $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) \leq -I(\gamma) \in (-\infty, \varkappa(0+)). \quad (15)$$

Міркуючи далі, як при доведенні теореми 1, для кожного $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ одержуємо нерівність (8). Тепер з (8) та (15) випливає шукане відношення (13). □

Введемо тепер наступний аналог умови **H** для інтеґрала Хелінґера $\widetilde{H}_t(\varepsilon)$:

$\widetilde{\mathbf{H}}$. Для кожного ε існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \widetilde{H}_t(\varepsilon) = \widetilde{\varkappa}(\varepsilon),$$

де $\tilde{\psi}_t \to \infty$ при $t \to \infty$, а $\widetilde{\varkappa}(\varepsilon)$ — деяка властива опукла функція, диференційовна на $(\tilde{\varepsilon}_-, \tilde{\varepsilon}_+)$, та $\tilde{\gamma}_- < \tilde{\gamma}_+$, де

$$\tilde{\varepsilon}_- = \inf\{\varepsilon : \widetilde{\varkappa}(\varepsilon) < \infty\}, \qquad \tilde{\varepsilon}_+ = \sup\{\varepsilon : \widetilde{\varkappa}(\varepsilon) < \infty\},$$
$$\tilde{\gamma}_- = \lim_{\varepsilon\downarrow\tilde{\varepsilon}_-} \widetilde{\varkappa}'(\varepsilon), \qquad \tilde{\gamma}_+ = \lim_{\varepsilon\uparrow\tilde{\varepsilon}_+} \widetilde{\varkappa}'(\varepsilon).$$

Позначимо через $\tilde{I}(\gamma)$ перетворення Лежандра–Фенхеля функції $\widetilde{\varkappa}(\varepsilon)$. При виконанні умови $\widetilde{\mathbf{H}}$ введемо наступні величини: $\tilde{\gamma}_0 = \widetilde{\varkappa}'(0)$, якщо $\tilde{\varepsilon}_- < 0$, та $\tilde{\gamma}_1 = \widetilde{\varkappa}'(1)$, якщо $\tilde{\varepsilon}_+ > 1$.

Наступне твердження — це теорема 2, застосована до $\tilde{\Lambda}_t = \ln \tilde{z}_t$ при виконанні умови $\widetilde{\mathbf{H}}$ з $\tilde{\varepsilon}_- = 0$.

Наслідок 1. *Якщо виконується умова* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *та* $\tilde{\varepsilon}_- = 0$, *то для кожного* $\gamma \in (\tilde{\gamma}_-, \tilde{\gamma}_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \widetilde{\mathsf{P}}^t(\tilde{\psi}_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t > \gamma) = \lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \widetilde{\mathsf{P}}^t(\tilde{\psi}_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t \geq -\gamma) = -\tilde{I}(\gamma) \in (-\infty, \widetilde{\varkappa}(0+)),$$

де $\tilde{I}(\gamma) = \gamma\tilde{\varepsilon}_\gamma - \widetilde{\varkappa}(\tilde{\varepsilon}_\gamma)$, *а* $\tilde{\varepsilon}_\gamma$ — *будь-який розв'язок рівняння* $\varkappa'(\varepsilon) = \gamma$.

З теорем 1, 2 та наслідку 1 одержуємо наступну теорему про великі відхилення для Λ_t при ґіпотезі H^t, а також при ґіпотезі $\widetilde{H}^t$.

Теорема 3. *Нехай виконується умова* **H**, *в якій* $\varepsilon_- < 0$ *та* $\varepsilon_+ = 1$. *Тоді справедливі наступні твердження:*

а) *якщо* $\gamma_0 < \gamma_+$, *то для кожного* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$ *вірне співвідношення* (2);

б) *для кожного* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \widetilde{\mathrm{P}}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \widetilde{\mathrm{P}}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \le \gamma) = -I(\gamma) + \gamma \in (-\infty, \varkappa(1-)). \tag{16}$$

Доведення. Твердження а) доведено в теоремі 1. Доведемо твердження б). Оскільки $H_t(\varepsilon) = \widetilde{H}_t(1-\varepsilon)$, то з умови **H**, в якій $\varepsilon_+ = 1$, випливає, що виконується умова $\widetilde{\mathbf{H}}$, в якій $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$, $\widetilde{\varkappa}(\varepsilon) = \varkappa(1-\varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon}_- = 1 - \varepsilon_+ = 0$, $\tilde{\varepsilon}_+ = 1 - \varepsilon_-$. Крім того, очевидно, $\widetilde{\varkappa}'(\varepsilon) = -\varkappa'(1-\varepsilon)$, отже, $\tilde{\gamma}_+ = -\gamma_-$, $\tilde{\gamma}_- = -\gamma_=$. Нехай ε_γ — будь-який розв'язок рівняння $\widetilde{\varkappa}(\varepsilon) = \gamma$ при $\gamma \in (\tilde{\gamma}_-, \tilde{\gamma}_+)$. Тоді з рівностей $\widetilde{\varkappa}(\varepsilon) = \varkappa(1-\varepsilon)$ та $\widetilde{\varkappa}'(\tilde{\varepsilon}_\gamma) = \gamma$ випливає $\varkappa'(1-\tilde{\varepsilon}_\gamma) = -\gamma$, де $-\gamma \in (-\tilde{\gamma}_+, -\tilde{\gamma}_-) = (\gamma_-, \gamma_+)$. Оскільки при $-\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ рівняння $\varkappa'(\varepsilon) = -\gamma$ має розв'язок, то одержуємо $\tilde{\varepsilon}_\gamma = 1 - \varepsilon_{-\gamma}$, де $\varepsilon_{-\gamma}$ — будь-який розв'язок рівняння $\varkappa'(\varepsilon) = -\gamma$. Отже, справедливий ланцюжок рівностей

$$\tilde{I}(\gamma) = \gamma\tilde{\varepsilon}_\gamma - \widetilde{\varkappa}(\tilde{\varepsilon}_\gamma) = \gamma(1-\varepsilon_{-\gamma}) - \varkappa(\varepsilon_{-\gamma}) = \gamma + I(-\gamma).$$

Тепер, враховуючи, що $\Lambda_t = -\tilde{\Lambda}_t$ ($\widetilde{\mathrm{P}}^t$ м.н.), з наслідку 1 виводимо, що для кожного $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \widetilde{\mathrm{P}}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma) &= \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \widetilde{\mathrm{P}}^t(\psi_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t > -\gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \widetilde{\mathrm{P}}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \le \gamma) \\ &= \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \widetilde{\mathrm{P}}^t(\psi_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t \ge -\gamma) = -\tilde{I}(-\gamma) \\ &= -I(\gamma) + \gamma \in (-\infty, \widetilde{\varkappa}(0+)) = (-\infty, \varkappa(1-)),\end{aligned}$$

тобто вірне твердження б). □

З теорем 2 і 3 випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Якщо виконується умова* **H**, *в якій* $\varepsilon_- = 0$ *та* $\varepsilon_+ = 1$, *то вірне наступне твердження:*

а) *для кожного* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ *виконується співвідношення* (13);

б) *для кожного* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ *виконується співвідношення* (16).

3. Поведінка ймовірностей помилок критерію Неймана–Пірсона

Нехай δ_t — критерій Неймана–Пірсона рівня α_t для розрізнення ґіпотез H^t та $\widetilde{H}^t$, означений рівністю (1). Наведемо теореми, що встановлюють взаємозв'язок між швидкостями спадання рівня α_t та ймовірності помилки другого роду β_t критерію δ_t при виконанні умови **H**.

Теорема 4. *Нехай виконується умова* **H**, *в якій* $\varepsilon_- < 0$, $\varepsilon_+ > 1$ *та* $\gamma_0 < \gamma_1$. *Тоді вірні наступні твердження:*

а) *для кожного* $a \in (0, \varkappa'(1))$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \iff \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b(a), \tag{17}$$

де $b(a) = a - \gamma(a) \in (0, -\varkappa'(0))$, *а* $\gamma(a)$ — *єдиний розв'язок рівняння* $I(\gamma) = a$ *в області* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_1)$;

б) *для кожного* $a \in [\varkappa'(1), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = 0, \tag{18}$$

а для кожного $b \in [-\varkappa'(0), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = 0. \tag{19}$$

З додатковим припущенням строгої опуклості функції $\varkappa(\varepsilon)$ теорема 4 доведена у роботі [6]. Однак неважко помітити, що доведення з роботи [6] не змінюється й без цього додаткового припущення. При цьому необхідно використати теорему про великі відхилення для Λ_t у формі теореми 1.

Теорема 5. *Нехай виконується умова* **H**, *в якій* $\varepsilon_- = 0$, $\varepsilon_+ > 1$ *та* $\gamma_- < \gamma_1 < \gamma_+$. *Тоді вірні наступні твердження:*

а) *для кожного* $a \in (-\varkappa(0+), \varkappa'(1))$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b(a), \tag{20}$$

де $b(a) = a - \gamma(a) \in (0, \varkappa'(0+) - \varkappa(0+))$, *а* $\gamma(a)$ — *єдиний розв'язок рівняння* $I(\gamma) = a$ *в області* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_1)$;

б) *для кожного* $a \in [\varkappa'(1), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = 0; \tag{21}$$

в) *якщо* $\varkappa(0) = \varkappa(0+)$, *то для кожного* $a \in [0, -\varkappa(0)]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \Longrightarrow \limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t \le \varkappa'(0) + \varkappa(0), \tag{22}$$

а для кожного $b \in [\varkappa'(0+) - \varkappa(0), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = \varkappa(0). \tag{23}$$

Доведення. Еквівалентність (20) доводиться аналогічно еквівалентності (17). Необхідно тільки врахувати, що при $a \in (-\varkappa(0+), \varkappa'(1))$ областю значень функції $b(a)$ є інтервал $(0, -\varkappa'(0+) - \varkappa(0+))$, та застосувати наслідок 1 та теорему 3. Імплікація (21) доводиться аналогічно імплікації (18).

Доведемо твердження в). Нехай $\psi_t^{-1} \ln \alpha_t \to -a$ при $t \to \infty$, де $a \in [0, -\varkappa(0)]$. Маємо

$$\alpha_t = \mathsf{P}^t(Y_t > y_t) + q_t \mathsf{P}^t(Y_t = y_t),$$

де $Y_t = \psi_t^{-1}\Lambda_t$, $y_t = \psi_t^{-1}\alpha_t$. Очевидно, що для будь-яких $y_t \in \boldsymbol{R}$ та $t \in \boldsymbol{R}_+$ виконується нерівність

$$\alpha_t \le \mathsf{P}^t(\Lambda_t > -\infty) = \mathsf{P}^t(\mathfrak{z}_t > 0) = H_t(0). \tag{24}$$

Отже, $\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \le \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln H_t(0) = \varkappa(0)$. З іншого боку, оскільки $a \le -\varkappa(0)$, то для кожного $\lambda > \gamma_-$ існує $t_0 = t_0(\lambda)$ таке, що $y_t < \lambda$ для всіх $t > t_0$. Отже, при всіх $\lambda > \gamma_-$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \ge \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathsf{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \lambda) = -I(\lambda),$$

звідки згідно з довільністю λ маємо

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \ge -I(\gamma_-+) = \varkappa(0+). \tag{25}$$

Об'єднуючи (24) та (25), одержуємо

$$\varkappa(0+) \le \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \le \varkappa(0). \tag{26}$$

Але оскільки $\varkappa(0+) = \varkappa(0)$, то маємо $\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \to \varkappa(0)$ при $t \to \infty$.

Далі, для всіх $t > t_0$ та $\varepsilon \in (0,1)$ вірний ланцюжок нерівностей

$$\psi_t^{-1}\ln\beta_t \le \psi_t^{-1}\ln\widetilde{\mathrm{P}}^t(\Lambda_t \le \lambda\psi_t) \le \psi_t^{-1}\ln\widetilde{\mathrm{P}}^t(\tilde\Lambda_t \ge -\lambda\psi_t) \le (1-\varepsilon)\lambda + \psi_t^{-1}\ln\widetilde{H}_t(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)\lambda + \varkappa_t(\varepsilon).$$

Звідси, обираючи $\lambda \to \gamma_-$ та $\varepsilon \to 0$, одержуємо $\limsup_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t \le \varkappa'(0) + \varkappa(0)$. Отже, імплікація (22) доведена.

Доведемо тепер імплікацію (23). Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай $\psi_t^{-1}\ln\beta_t \to -b$, де $b \in [\varkappa'(0+) - \varkappa(0), \infty]$, але $\limsup_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t = -\bar a < \varkappa(0)$ (випадок $\limsup_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t > \varkappa(0)$ неможливий згідно з (26)). Тоді існує послідовність t_n така, що $\psi_{t_n}^{-1}\ln\alpha_{t_n} \to -\bar a$ при $n \to \infty$. Оскільки $A > -\varkappa(0)$, то згідно з твердженням а) одержуємо суперечність. Отже, імплікація (23) доведена. □

Теорема 6. *Нехай виконується умова* **H**, *в якій* $\varepsilon_- < 0$, $\varepsilon_+ = 1$ *та* $\gamma_- < \gamma_0 < \gamma_+$. *Тоді вірні наступні твердження:*

а) *для кожного* $a \in (0, \varkappa'(1-) - \varkappa(1-))$

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t = -a \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t = -b(a),$$

де $b(a) = a - \gamma(a) \in (-\varkappa'(1-), \varkappa'(0))$, *а* $\gamma(a)$ — *єдиний розв'язок рівняння* $I(\gamma) = a$ *в області* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$;

б) *для кожного* $b \in [-\varkappa'(0), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t = -b \Longrightarrow \lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t = \varkappa(0) - \varkappa'(1-),$$

в) *якщо* $\varkappa(1) = \varkappa(1-)$, *то для кожного* $b \in [0, -\varkappa(1)]$

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t = -b \Longrightarrow \limsup_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t \le \varkappa(1) - \varkappa'(1-),$$

а для кожного $a \in [\varkappa'(1-) - \varkappa(1), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t = -a \Longrightarrow \lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t = \varkappa(1).$$

Доведення теореми 6 зводиться до доведення теореми 5, якщо поміняти місцями гіпотези H^t та $\widetilde{H}^t$.

Об'єднання теорем 5 та 6 дає наступний результат.

Теорема 7. *Нехай виконується умова* **H**, *в якій* $\varepsilon_- = 0$ *та* $\varepsilon_+ = 1$. *Тоді вірні наступні твердження:*

а) *для кожного* $a \in (-\varkappa(0+), \varkappa'(1) - \varkappa(1-))$

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t = -a \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t = -b(a),$$

де $b(a) = a - \gamma(a) \in (-\varkappa(1-), \varkappa'(0+) - \varkappa(0+))$, *а* $\gamma(a)$ — *єдиний розв'язок рівняння* $I(\gamma) = a$ *в області* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$;

б) *якщо* $\varkappa(0) = \varkappa(0+)$, *то для кожного* $a \in [0, -\varkappa(0)]$

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t = -a \Longrightarrow \limsup_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t \le \varkappa'(0) + \varkappa(0),$$

а для кожного $b \in [\varkappa'(0+) - \varkappa(0), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\beta_t = -b \Longrightarrow \lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\ln\alpha_t = \varkappa(0);$$

в) *якщо* $\varkappa(1) = \varkappa(1-)$, *то для кожного* $b \in [0, \varkappa(1)]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b \Longrightarrow \limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \le \varkappa'(1) - \varkappa'(1-),$$

а для кожного $a \in [\varkappa'(1-) - \varkappa(1), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = \varkappa(1).$$

4. Приклад та заключні зауваження

Приклад. Нехай $\xi^t = (\xi_{t1}, \xi_{t2}, \dots, \xi_{tt})$, $t = 1, 2, \dots$, де $\xi_{t1}, \xi_{t2}, \dots, \xi_{tt}$ — незалежні випадкові величини при ґіпотезах H^t та $\widetilde{H}^t$, причому ξ_{ti} має при ґіпотезі H^t (відповідно, $\widetilde{H}^t$) показниковий розподіл з щільністю $\lambda_{ti}\exp(-\lambda_{ti}x)$, $x \ge 0$ (відповідно, $\tilde{\lambda}_{ti}\exp(-\tilde{\lambda}_{ti}x)$, $x \ge 0$). Легко показати, що

$$\varepsilon_-^{(t)} = -\min_{1\le i\le t}\left(\left(\frac{\tilde{\lambda}_{ti}}{\lambda_{ti}} \vee 1\right) - 1\right)^{-1},$$

$$\varepsilon_+^{(t)} = \min_{1\le i\le t}\left(1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}_{ti}}{\lambda_{ti}} \wedge 1\right)\right)^{-1},$$

причому при $\varepsilon \in \left(\varepsilon_-^{(t)}, \varepsilon_+^{(t)}\right)$

$$H_t(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{t}\left(\frac{\tilde{\lambda}_{ti}}{\lambda_{ti}}\right)^{\varepsilon}\left(\varepsilon\left(\frac{\tilde{\lambda}_{ti}}{\lambda_{ti}} - 1\right) + 1\right)^{-1}.$$

Нехай $\tilde{\lambda}_{ti}/\lambda_{ti} = \rho_t$ для всіх $i = 1, 2, \dots, t$, $t = 1, 2, \dots$, та $\rho_t \to \rho$ при $t \to \infty$. Знайдемо такі значення ρ, для яких виконується умова **H**, та означимо функцію $b(a)$.

Якщо $\rho \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, то умова **H** виконується з $\psi_t = t$, $\varepsilon_- = -((\rho \vee 1) - 1)^{-1}$, $\varepsilon_+ = (1 - (\rho \wedge 1))^{-1}$ та

$$\varkappa(\varepsilon) = \varepsilon \ln \rho - \ln(\varepsilon(\rho - 1) + 1).$$

У цьому випадку $\gamma_- = \ln \rho$ та $\gamma_+ = \infty$ при $\rho \in (0, 1)$, і $\gamma_- = -\infty$ та $\gamma_+ = \ln \rho$ при $\rho \in (1, \infty)$. Крім того, для кожного ρ маємо $\gamma_0 = -(\rho - 1 - \ln \rho)$ та $\gamma_1 = \rho^{-1} - 1 - \ln \rho^{-1}$. Легко показати, що $I(\gamma) = z(\gamma) - 1 - \ln z(\gamma)$, де $z(\gamma) = (\ln \rho - \gamma)/(\rho - 1)$.

Якщо $0 < \rho < 1$, то $\gamma > \gamma_0$ лише при $z(\gamma) > 1$. Нехай z_a — розв'язок рівняння $z - 1 - \ln z = a$ в області $z > 1$ при $a \in (0, I(\gamma_1))$. Тоді $\gamma(a) = \ln \rho + (1 - \rho)z_a$, отже, $b(a) = a - \ln \rho - (1 - \rho)z_a$.

Якщо $1 < \rho < \infty$, то $\gamma > \gamma_0$ лише при $z(\gamma) \in (0, 1)$. Нехай $\tilde{z}_a$, $a \in (0, I(\gamma_1))$, це розв'язок рівняння $z - 1 - \ln z = a$ в області $z \in (0, 1)$. Тоді $\gamma(a) = \ln \rho - (\rho - 1)\tilde{z}_a$, отже, $b(a) = a - \ln \rho + (\rho - 1)\tilde{z}_a$.

Нехай тепер $\rho = 1$. Припускаючи, що $t(\rho_t - 1)^2 \to \infty$ при $t \to \infty$, одержуємо, що умова **H** виконується з $\psi_t = t(\rho_t - 1)^2$, $\varepsilon_- = -\infty$, $\varepsilon_+ = \infty$ та $\varkappa(\varepsilon) = -\varepsilon(1 - \varepsilon)/2$. У цьому випадку $\gamma_- = -\infty$, $\gamma_0 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma_+ = \infty$ та $I(\gamma) = (\gamma + \frac{1}{2})^2/2$. Отже, $\gamma(a) = \sqrt{2a} - \frac{1}{2}$ та $b(a) = (1 - \sqrt{2a})^2/2$.

Якщо $\rho = 0$, то співвідношення (3) з умови **H** виконується з $\psi_t = t \ln \rho_t^{-1}$, $\varepsilon_- = -\infty$, $\varepsilon_+ = 1$ та $\varkappa(\varepsilon) = -\varepsilon$. Оскільки $\varkappa'(\varepsilon) = -1$ для всіх ε, то $\gamma_- = \gamma_+ = -1$. Отже, умова **H** не виконується.

Якщо $\rho = \infty$, то співвідношення (3) з умови **H** виконується з $\psi_t = t \ln \rho_t$, $\varepsilon_- = 0$, $\varepsilon_+ = \infty$ та $\varkappa(\varepsilon) = \varepsilon - 1$. Тоді $\varkappa'(\varepsilon) = 1$ для всіх ε, отже, $\gamma_- = \gamma_+ = 1$. Тому умова **H** не виконується.

Зауваження 2. Інші приклади, де виконується умова **H** з $\varepsilon_- < 0$ та $\varepsilon_+ > 1$, можна знайти в роботах [6, 9]. Приклад, де виконується умова **H** з $\varepsilon_- = 0$ та $\varepsilon_+ = 1$, наведено в роботі [7]. Приклади виконання умови **H** з $\varepsilon_- < 0$ та $\varepsilon_+ = 1$, або $\varepsilon_- = 0$ та $\varepsilon_+ > 1$, або $\varepsilon_- = 0$ та $\varepsilon_+ = 1$ будуть наведені у наступній роботі авторів.

Зауваження 3. Аналогічно [10] теореми про великі відхилення можна застосувати до дослідження критеріїв для перевірки складних гіпотез.

Зауваження 4. Одержані в цій роботі теореми про великі відхилення можна застосувати в асимптотичній теорії оцінювання [11].

Література

1. Ю. Н. Линьков, *Асимптотические методы статистики случайных процессов*, "Наукова думка", Киев, 1993.
2. Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, "Мир", Москва, 1973.
3. R. S. Ellis, *Large deviations for a general class of random vectors*, Annals of Probability **12** (1984), № 1, 1–12.
4. R. S. Ellis, *Large deviation and statistical mechanics*, Springer, Berlin, 1985.
5. J. T. Cox and D. Griffeath, *Large deviation for Poisson systems of independent random walks*, Zeitschift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebite **66** (1984), № 6, 543–558.
6. Ю. Н. Линьков, М. И. Медведева, *Теорема о больших уклонениях в задаче проверки двух простых гипотез*, Український математичний журнал **47** (1995), № 2, 227–235.
7. L. Birgé, *Vitesses maximales de décroissanse des erreurs et tests optimaux associes*, Zeitschift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebite **55** (1981), № 2, 261–273.
8. Е. А. Арутюнян, *Об асимптотически оптимальном различении гипотез относительно цепи Маркова*, Известия АН АрмССР, Серия Математика **23** (1988), № 1, 76–80.
9. Ю. Н. Линьков, *Большие уклонения в задаче различения считающих процессов*, Український математичний журнал **45** (1993), № 11, 1514–1521.
10. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *Большие уклонения и проверка статистических гипотез*, "Наука", Сиб. отделение, Новосибирск, 1992.
11. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Асимптотическая теория оценивания*, "Наука", Москва, 1979.

340114, Донецьк-114, вул. Р. Люксембург, 74, Інститут прикладної математики та механіки НАН України

340114, Донецьк-114, вул. Р. Люксембург, 74, Інститут прикладної математики та механіки НАН України

Надійшла 20.05.94