Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 97–102

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 97–102

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ БАКСТЕРІВСЬКИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 519.21

Р. Є. МАЙБОРОДА

РЕЗЮМЕ. Доведено асимптотичну нормальність зважених бакстерівських сум для нестаціонарного дифузійного процесу. Розглянуто оцінку параметрів функції інтенсивності шуму, що базується на використанні бакстерівських сум. Доведено її асимптотичну нормальність при правильному нормуванні.

Нехай $x(t)$ — вибірково неперервний випадковий процес на $[0,1]$, що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = f(x(t),t)\,dt + g(t)\,dw(t), \tag{1}$$

де f та g — невипадкові вимірні функції, $w(t)$ — стандартний вінерів процес. Ми вважаємо, що цей процес спостерігається у моменти часу $t_j = t_j^N = j/N$, $j = 0,\dots,N$. Функція f вважається невідомою, а для g задано деяку параметричну модель $g = g(t,\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta \subset \boldsymbol{R}^d$. Нас цікавить оцінка для невідомого параметра ϑ. Подібні задачі часто виникають при аналізі вимірювань за допомогою приладів, що мають значну інерційність. У таких приладах результат вимірювання залежить не лише від поточного значення вимірюваної величини (процесу), а й від попередніх її значень. У рівнянні (1) f — функція, що характеризує інерційність вимірювального приладу, g — інтенсивність досліджуваного процесу.

Для побудови оцінок ϑ використаємо бакстерівський підхід. Вперше цей підхід був застосований у [1] до стаціонарних ґауссових процесів для оцінки $g = g(t) = \text{const}$. Подальший аналіз подібних задач див. у [2].

Позначимо через $B_N(x,a)$ “зважену бакстерівську суму” вигляду

$$B_N(x,a) = \sum_{j=1}^{N} a\left(t_{j-1}^N\right)\left(x(t_j^N) - x\left(t_{j-1}^N\right)\right)^2,$$

де $a\colon [0,1] \mapsto \boldsymbol{R}$ — деяка вагова функція.

Покладемо $\varepsilon_N = \sqrt{\ln N/N}$.

Теорема 1. *Нехай існує $G < \infty$ таке, що $|g(t)| < G$ для будь-якого $t \in [0,1]$ і для довільного $r \in \boldsymbol{R}$ знайдеться C_r таке, що $|f(y,t)| < C_r$ для кожного $y \in \boldsymbol{R}$, $|y| < r$,*

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 62G20, 60F05; Secondary 62J02, 60G35.

$t \in [0,1]$. *Позначимо* $D = \{ a : [0,1] \mapsto \boldsymbol{R} \mid \operatorname{Var} a(\cdot) < \infty \}$. *Тоді існує така випадкова величина* $\Lambda < \infty$ *м.н., що*

$$\sup_{a \in D} \frac{\left| B_N(x,a) - \int_0^1 a(t) g^2(t)\, dt \right|}{1 + \sup |a(\cdot)| + \operatorname{Var} a(\cdot)} \le \Lambda \varepsilon_N.$$

Доведення подібне доведенню теореми 2 нижче. Докладніше див. [3].

Для $\alpha \in \Theta$ позначимо

$$R(\alpha) = \|g^2(\cdot,\vartheta) - g^2(\cdot,\alpha)\|_{L_2}^2 = \int_0^1 ((g^2(t,\vartheta) - g^2(t,\alpha))^2\, dt$$
$$= \int_0^1 g^4(t,\vartheta)\, dt - 2\int_0^1 g^2(t,\alpha) g^2(t,\vartheta)\, dt + \int_0^1 g^4(t,\alpha)\, dt.$$

Зрозуміло, що $R(\alpha)$ досягає свого мінімуму при $\alpha = \vartheta$. Крім того, за теоремою 1 $B_N(x, g^2(\cdot,\alpha))$ є хорошою оцінкою для $\int_0^1 g^2(t,\alpha) g^2(t,\vartheta)\, dt$. Тому можна запропонувати наступну оцінку для ϑ:

$$\hat{\vartheta}_N = \arg\min_{\alpha \in \Theta} R_N(\alpha),$$

де

$$R_N(\alpha) = \int_0^1 g^4(\cdot,\alpha)\, dt - 2 B_N\big(x, g^2(\cdot,\alpha)\big).$$

Ми будемо розглядати нормовану оцінку $\sqrt{N}(\vartheta_N - \vartheta)$. Наша мета — довести її асимптотичну нормальність.

Почнемо з аналізу асимптотики бакстерівських сум. Будемо вважати, що $h = h(t) = (h^1(t), \ldots, h^d(t))^T$, $t \in [0,1]$ — векторнозначна функція і

$$B_N(x,h) = \big(B_N(x,h^1), \ldots, B_N(x,h^d)\big)^T.$$

Теорема 2. *Нехай* h — *обмежена функція, інтегровна за Ріманом, і для деяких* $\alpha > 0$, $L < \infty$ $\sup|h| < L$, $\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} < L$, $\|g\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} < L$, $x \in \mathrm{Lip}_\alpha[0,1]$. *м.н.,* $x(0)$ *не залежить від* $w(t)$. *Тоді*

$$\sqrt{N}\left(B_N(x,h) - \sum_{j=1}^{N} h(t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} g^2(t)\, dt \right) \Rightarrow Y,$$

де $Y = (y^1, \ldots, y^d)^T$ — *гауссів випадковий вектор з* $\mathsf{E}\, Y = 0$,

$$\mathsf{E}\, y^k y^j = 2 \int_0^1 h^k(t) h^j(t) (g(t))^4\, dt.$$

Доведення. Нехай $a = h^l$, $l = 1 \div d$. Позначимо $A = \sup|a(\cdot)|$, $F = \sup_t |f(x(t),t)|$. Випадкова величина F є скінченною м.н., оскільки процес x вибірково неперервний на $[0,1]$. Тоді $B_N(x,a) = J_1^N + 2J_2^N + J_3^N$, де

$$J_1^N = \sum_{j=1}^N a(t_{j-1}) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(u),u)\,du \right)^2,$$

$$J_2^N = \sum_{j=1}^N a(t_{j-1}) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(u),u)\,du \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(u)\,dw(u) \right),$$

$$J_3^N = \sum_{j=1}^N a(t_{j-1}) \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g(u)\,dw(u) \right)^2.$$

Оцінимо кожний доданок. Для J_1^N, очевидно,

$$|J_1^N| \le \sum_{j=1}^N AF^2(t_j - t_{j-1})^2 \le AF^2 N^{-1}. \tag{3}$$

Отже, $J_1^N = o(N^{-1})$ м.н. Оцінимо J_2^N. Позначимо

$$\eta_j^N = \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(u)\,du, \qquad J_2^N = J_{21}^N + J_{22}^N,$$

де

$$J_{21}^N = \sum_{j=1}^N a(t_{j-1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(u),u) - f(x(t_{j-1}),t_{j-1})\,du \cdot \eta_j^N,$$

$$J_{22}^N = \sum_{j=1}^N a(t_{j-1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(t_{j-1}),t_{j-1})\,du \cdot \eta_j^N.$$

Зауважимо, що $\tilde{J}_2 = \max_j |\eta_j^N| \le \Lambda N$ м.н. Дійсно, позначивши $\sigma_j = G\sqrt{t_j - t_{j-1}}$, $z_j = C\varepsilon_N/\sigma_j$, дістанемо $|J_2^N| \le AF\tilde{J}_2^N$, де $\tilde{J}_2 = \max_j \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(s)\,dw(s) \right|$ і $p_N = \mathsf{P}\{\sup_a J_2/(AF) > C\varepsilon_N\} \le 1 - (1 - 2\exp(-z_j^2/2)/z_j)^N$, $p_N = O(2N/\ln N \cdot N^{-C\ln N/G^2})$ для довільного $C > 0$. Отже, $\sum_N p_N < \infty$. Тому за лемою Бореля–Кантеллі, $J_N^2 \le \Lambda\varepsilon_N$ м.н.

Таким чином, для J_{21}^N, враховуючи ліпшіцевість функцій f та x, маємо

$$|J_{21}^N| \le \Lambda \sum_{k=1}^N N^{-\alpha^2} \sup|g| N^{-1} \max_j |\eta_j^N| \le \Lambda N^{-\alpha^2} \sqrt{\frac{\ln N}{N}} = o(N^{-1/2}).$$

Суму J_{22}^N знову розіб'ємо на два доданки. Задамо деяке число M, $0 < M < \infty$, і покладемо

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо для кожного } s,\ 0 < s \le t,\ |f(x(s),s)| \le M; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тепер $J_{22}^N = \tilde{J}_{21}^N + \hat{J}_{22}^N$, де

$$\tilde{J}_{21}^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a(t_{j-1}) f(\tilde{x}(t_{j-1}), t_{j-1})\eta_j^N,$$

$$\hat{J}_{22}^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a(t_{j-1})(f(x(t_{j-1}), t_{j-1}) - f(\tilde{x}(t_{j-1}), t_{j-1}))\eta_j^N.$$

Задамо довільне $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. Оскільки x — неперервна на $[0,1]$ функція, а f — обмежена, то

$$\mathsf{P}\left\{\sqrt{N}\hat{J}_{22}^N \geq \frac{\delta}{2}\right\} \leq \mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,1]} |f(x(t),t)| \geq M\Big\} \to 0$$

при $M \to \infty$. Отже, вибравши достатньо велике M, маємо $\mathsf{P}\{\sqrt{N}\hat{J}_{22}^N \geq \delta/2\} \leq \varepsilon/2$. Зафіксуємо M і оцінимо

$$\mathsf{E}(\tilde{J}_{21}^N)^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} a(t_{k-1})a(t_{l-1})\,\mathsf{E}\, f(\tilde{x}(t_{l-1}), t_{l-1}) f(\tilde{x}(t_{k-1}), t_{k-1})\eta_k^N\eta_l^N.$$

Оскільки при $k > l$, η_k^N не залежить ні від η_l^N, ні від $f(\tilde{x}(t_{l-1}), t_{l-1})$, ні від $f(\tilde{x}(t_{k-1}), t_{k-1})$, то у цій сумі всі доданки з $k \neq l$ дорівнюють 0. Отже,

$$\mathsf{E}(\tilde{J}_{21}^N)^2 \leq \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} (\sup|a|)^2 M^2\,\mathsf{E}(\eta_k^N)^2 \leq \frac{\sup|a|^2 M^2 \sup|g|^2}{N^2}.$$

І за нерівністю Чебишова

$$\mathsf{P}\left\{\sqrt{N}\tilde{J}_{22}^N \geq \frac{\delta}{2}\right\} \leq \frac{4\,\mathsf{E}(\tilde{J}_{22}^N)^2 N}{\delta^2} \to 0$$

при $N \to \infty$. Тому при достатньо великих N, $\mathsf{P}\{\sup N\tilde{J}_{21}^N \geq \delta/2\} \geq \varepsilon/2$. Поєднуючи це з оцінкою для $\hat{J}_{22}^N$, отримуємо

$$\mathsf{P}\{\sqrt{N}J_{22}^N \geq \delta\} \leq \varepsilon,$$

тобто (внаслідок довільності δ та ε) $\sqrt{N}J_{22}^N \to 0$ за ймовірністю.

Залишилось переконатись, що

$$\sqrt{N}J_3^N = \sum_{j=1}^{N} h(t_{j-1})\big((\eta_j^N)^2 - \mathsf{E}(\eta_j^N)^2\big) \Rightarrow Y.$$

Зрозуміло, що $\mathsf{E}\sqrt{N}J_3^N = 0$ і

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\, N\sum_{k,j=1}^{N} h^l(t_{j-1})\big((\eta_j^N)^2 - \mathsf{E}(\eta_j^N)^2\big)h^m(t_{k-1})(\eta_k^2 - \mathsf{E}\,\eta_k^2)\\
&\quad = N\sum_{j=1}^{N} h^l(t_{j-1})h^m(t_{j-1})\,\mathsf{E}\,\big((\eta_j^N)^2 - \mathsf{E}(\eta_j^N)^2\big)^2\\
&\quad = 2\sum_{j=1}^{N} h^l(t_{j-1})h^m(t_{j-1})N\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (g(t))^2\,dt\right)^2 \to 2\int_0^1 h^l(t)h^m(t)(g(t))^4\,dt.
\end{aligned}$$

Оцінюючи $\mathsf{E}(\sqrt{N}J_3^N)^4$ і використовуючи умову Ляпунова, переконуємось, що центральна гранична теорема виконується.

Теорему доведено. □

Тепер повернемось до питання про асимптотичну нормальність $\sqrt{N}(\vartheta_N - \vartheta)$. Будемо позначати $g^2(t,\alpha) = h(t,\alpha)$, $h'_i(t,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha^i}h(t,\alpha)$, $h''_{ij}(t,\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}h(t,\alpha)$, $h'(t) = (h'_1(t,\vartheta),\dots,h'_d(t,\vartheta))^T$, $h''(t) = (h''_{ij}(t,\vartheta))_{ij=1}^d$,

$$\rho(\alpha,\gamma) = \int_0^1 \left(g^2(t,\alpha) - g^2(t,\gamma)\right)^2 dt.$$

Сформулюємо умови, які будуть потрібні при доведенні асимптотичної нормальності:

i) Θ є компактом у псевдометриці $\rho(\alpha,\gamma)$ і для будь-якого $\alpha \in \Theta$, $\alpha \neq \vartheta$, $\rho(\alpha,\vartheta) > 0$;
ii) $\exists\, \beta > 0$, $f \in \mathrm{Lip}_\beta$, $h'_i \in \mathrm{Lip}_\beta$;
iii) функції $h(\cdot,\alpha)$, $h'(\cdot,\alpha)$, $h''(\cdot,\alpha)$ є рівномірно (по $\alpha \in \Theta$) обмеженими функціями з рівномірно обмеженою варіацією;
iv) інтеграли
$$z_{ij}(\alpha) = \int_0^1 h'_i(t,\alpha)h'_j(t,\alpha)\,dt$$
та
$$u_{ij}(\alpha) = \int_0^1 h''_{ij}(t,\alpha)h(t,\alpha)\,dt$$
існують і $z_{ij}(\alpha) \to z_{ij}(\vartheta)$, $u_{ij}(\alpha) \to u_{ij}(\vartheta)$ при $\alpha \to \vartheta$;
v) $\tilde{}(\cdot) \in \mathrm{Lip}_\beta$ м.н.;
vi) матриця $Z = (z_{ij}(\vartheta))_{i,j=1}^d$ — невироджена.

Теорема 3. *Якщо ϑ є внутрішньою точкою Θ і виконані умови* i)–vi), *то*

$$\sqrt{N}(\hat\vartheta_N - \vartheta) \Rightarrow Z^{-1}Y,$$

де $Y = (y^1,\dots,y^d)^T$ — гауссів вектор, $\mathsf{E}Y = 0$,

$$\mathsf{E}\,y^iy^j = 2\int_0^1 h'_i(t,\vartheta)h'_j(t,\vartheta)(g(t))^4\,dt.$$

Доведення. З умови i) випливає, що

$$\hat\vartheta_N = \arg\min_{\alpha\in\Theta} R_N^*(h(\cdot,\alpha))$$

існує. Позначимо

$$R_N^i = \frac{\partial}{\partial\alpha^i}R_N^*(h(\cdot,\alpha)), \qquad R_N^{ij} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}R_N^*(h(\cdot,\alpha)),$$
$$R'_N(\alpha) = (R_N^1(\alpha),\cdot,R_N^d(\alpha))^T, \qquad R''_N(\alpha) = (R_N^{ij}(\alpha))_{i,j=1}^d.$$

З теореми 1 випливає, що $\hat\vartheta_N \to \vartheta$ м.н. при $N \to \infty$. Отже, $\hat\vartheta_N$ — внутрішня точка Θ при достатньо великих N. Тому $R'_N(\vartheta_N) = 0$ і, отже,

$$-\sqrt{N}R'_N(\vartheta) = \sqrt{N}Z_N(\vartheta_N - \vartheta),$$

де $Z_N = (R_N^{ij}(\zeta_{ij}))_{ij=1}^d$, ζ_{ij} — проміжні точки між ϑ_N та ϑ. Доведемо, що $Z_N \to 2Z$ за ймовірністю, а $-\sqrt{N}R'_N(\vartheta) \Rightarrow 2Y$. З цього й випливатиме твердження теореми.

Оскільки $\vartheta_N \to \vartheta$, то і $\zeta_{ij} \to \vartheta$ при $N \to \infty$. Далі

$$R_N^{ij}(\alpha) = 2u_{ij}(\alpha) + 2z_{ij}(\alpha) - 2B(x, h''_{ij}(\cdot, \alpha)).$$

Перші два доданки збігаються до $2u_{ij}(\vartheta) + 2z_{ij}(\vartheta)$ за умовою теореми, а

$$B(x, h''_{ij}(\cdot, \zeta_{ij})) \to u_{ij}(\vartheta)$$

за теоремою 1. Отже, $Z_N \to 2Z$. Тепер зауважимо, що

$$R'_N(\vartheta) = 2\int_0^1 h'(t,\vartheta) g^2(t) dt - 2B_N(x, h'(\cdot,\vartheta)) \Rightarrow Y$$

за теоремою 2. Оскільки h' та g^2 — функції обмеженої варіації, то

$$\int_0^1 h'(t,\vartheta) g^2(t,\vartheta)\, dt - \sum_{j=1}^N h(t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} g^2(t)\, dt = O(N^{-1}).$$

Теорему доведено. □

З умов i)–vi) найменш зрозумілою виглядає п'ята. Її можна перевірити за допомогою наступної леми.

Лема. *Нехай x є розв'язком стохастичного рівняння* (1), $\sup\{f(x,t), t \in [0,1], |x| < R\} < \infty$ *для всіх* $R < \infty$, g — *функція обмеженої варіації і* $g \in \mathrm{Lip}_\alpha[0,1]$. *Тоді* $x \in \mathrm{Lip}_\beta[0,1]$ *для будь-якого* $0 < \beta < \min\{\alpha, \frac{1}{2}\}$.

Доведення. Оскільки x є розв'язком (1), то

$$\begin{aligned}|x(t) - x(s)| &\le \left|\int_s^t f(x(u), u)\, du\right| + \left|\int_s^t g(u)\, dw(u)\right| \\ &\le \sup_u |f(x(u), u)| \cdot |t-s| + |g(t)w(t) - g(s)w(s)| \\ &\quad + \sup_u |w(u)| \sup_{s \le u, v \le t} |g(v) - g(u)|.\end{aligned}$$

Твердження леми тепер випливає з того, що $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}_\beta[0,1]$ для $0 < \beta < \frac{1}{2}$. □

Література

1. М. Арато, А. Н. Колмогоров, Я. Г. Синай, *Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса*, ДАН СССР **146** (1962), № 4, 747–750.
2. Е. П. Бесклинская, Р. Е. Майборода, *О скорости сходимости некоторых оценок параметров стационарных гауссовских случайных процессов*, Теория вероятн. и мат. статист. (1990), № 43, 13–19.
3. Р. Е. Майборода, *Оценки интенсивности шума для неоднородных диффузионных процессов*, Укр. мат. журн. **47** (1995), № 7, 944–949.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 16.05.94