Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 103–108

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 103–108

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ ІЗ СТЕПЕНЕВИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

УДК 519.21

С. А. МЕЛЬНИК

Резюме. Доведені теореми існування ґлобальних та локальних за часом узагальнених розв'язків стохастичних параболічних рівнянь із степеневими нелінійностями.

Вивченню детермінованих рівнянь параболічного типу із степеневими нелінійностями присвячено багато робіт. Досить повний їх перелік можна знайти в роботі [1]. Деякі результати для відповідних стохастичних рівнянь надруковані у роботах автора [2, 3]. У даній статті доводяться теореми існування узагальнених (у розумінні С. Л. Соболєва) розв'язків першої початково-крайової задачі. Основні труднощі полягають у тому, що головна частина рівняння є сильно нелінійним немонотонним оператором. Це приводить до неможливості застосування відомих результатів [4].

Розглянемо задачу

$$\begin{gathered} du(t,x) = \operatorname{div}(a(x)|u(t,x)|^{\sigma}\nabla u(t,x)\,dt + b(t,x)|u(t,x)|^{\beta-1}u^{+}(t,x)\,dt \\ + c(t,x)|u(t,x)|^{\gamma-1}a^{+}(t,x)\,dw(t), \\ 0 \le t \le T, \qquad x \in G \subset \boldsymbol{R}^n, \end{gathered} \tag{1}$$

де G — обмежена область з кусково-гладкою межею δG, з крайовими умовами

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u(t,x)|_{x\in\delta G} = 0.$$

Тут σ, β, γ — додатні сталі, $u^{+} = \max(u,0)$, $a(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$, $w(t)$ — вінерів процес, $a_{ij}(x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$ — вимірні невипадкові обмежені функції.

Позначимо $G_t = [0;t]\times G$, $|||\cdot|||_{L_q(G_t)} = (\mathbf{M}\,\|\cdot\|^q_{L_q(G_t)})^{1/q}$.

Теорема 1. *Якщо* $za(x)z^{*} \ge a\|z\|^2$, $a > 0$, $u_0 \in L_{\sigma+2}(G)$, $\beta < \sigma+1$, $\gamma < \sigma/2+1$, *то існує узагальнений розв'язок задачі* (1), *причому*

$$\sup_t |||u(t,\cdot)|||^{\sigma+2}_{L_{\sigma+2}(G)} \le C, \qquad |||\nabla(|u|^{\sigma}u)|||_{L_2(G_T)} \le C,$$
$$|||u|||_{L_{\beta+\sigma+1}(G_T)} \le C, \qquad |||u|||_{L_{\sigma+2\gamma}(G_T)} \le C.$$

Доведення. Використаємо метод Ґальоркіна. За наближений розв'язок візьмемо

$$u_N(t,x) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{N} g_{jN}(t)w_j(x)\right)\left|\sum_{j=1}^{N} g_{jN}(t)w_j(x)\right|^{2/\sigma+2}, \tag{2}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15, 35R60; Secondary 35K10.

Робота виконана в межах проблеми № 8, яка фінансується Міністерством освіти України

де $w_j(x)$ — власні функції задачі

$$\operatorname{div}(a(x)\nabla w(x)) = -\lambda w(x), \qquad w(x)|_{x\in\delta G} = 0,$$

$g_{jN}(t)$ — розв'язки рівнянь

$$\begin{aligned} dg_{jN}(t) = &-\frac{\sigma+2}{2}\int \nabla(|u_N|^\sigma u_N)a(x)\nabla(|u_N|^{\sigma/2}w_j)\,dx\,dt \\ &+\frac{b(\sigma+2)}{2}\int |u_N|^{\sigma/2+\beta-1}u_N^+ w_j\,dx\,dt \\ &+\frac{c^2\sigma(\sigma+2)}{8}\int |u_N|^{\sigma/2+2\gamma-3}(u_N^+)^2\operatorname{sgn} u_N w_j\,dx\,dt \\ &+\frac{c(\sigma+2)}{2}\int |u_N|^{\sigma/2+\gamma-1}u_N^+ w_j\,dx\,dw(t), \\ g_{jN}(0) = &\int |u_{N0}(x)|^{\sigma/2}u_{N0}(x)w_j(x)\,dx, \end{aligned} \tag{3}$$

$u_{N0}(x)$ — скорочена сума розвинення $u_0(x)$ у ряд за функціями w_j. Тоді за формулою Іто для $g_{jN}^2(t)$ з урахуванням (3) маємо

$$\begin{aligned} dg_{jN}^2(t) = &-(\sigma+2)\int \nabla(|u_N|^\sigma u_N)a(x)\nabla\big(|u_N|^{\sigma/2}g_{jN}(t)w_j\big)\,dx\,dt \\ &+b(\sigma+2)\int |u_N|^{\sigma/2+\beta-1}u_N^+ w_j g_{jN}(t)\,dx\,dt \\ &+\frac{c^2\sigma(\sigma+2)}{4}\int |u_N|^{\sigma/2+2\gamma-3}(u_N^+)^2\operatorname{sgn} u_N g_{jN}(t)w_j\,dx\,dt \\ &+\frac{(\sigma+2)^2}{4}\left(\int c|u_N|^{\sigma/2+\gamma-1}u_N^+ w_j\,dx\right)^2 dt \\ &+c(\sigma+2)\int |u_N|^{\sigma/2+\gamma-1}u_N^+ g_{jN}(t)w_j(x)\,dx\,dw(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Помноживши (2) на $|u_N|^{\sigma/2}$, дістанемо

$$|u_N(t,x)|^{\sigma/2}u_N(t,x) = \sum_{j=1}^N g_{jN}(t)w_j(x), \qquad \text{тобто} \ \sum_{j=1}^N g_{jN}^2(t) = \int |u_N(t,x)|^{\sigma+2}\,dx.$$

Підсумовуючи (4) по j від 1 до N та інтеґруючи за часом, отримуємо

$$\begin{aligned} \int |u_N(t,x)|^{\sigma+2}\,dx = &-\int_0^t\int(\sigma+2)\Big\{\nabla(|u_N|^\sigma u_N)a(x)\nabla(|u_N|^\sigma u_N) \\ &+ b|u_N|^{\sigma+\beta-1}u_N u_N^+ + \frac{c^2\sigma}{4}u_N^{\sigma+2\gamma-2}(u_N^+)^2\Big\}\,dx\,ds \\ &+\frac{(\sigma+2)^2}{4}\int_0^t\sum_{j=1}^N\left(\int c|u_N|^{\sigma/2+\gamma-1}u_N^+ w_j\,dx\right)^2 ds \\ &+\int |u_{N0}(x)|^{\sigma+1}\,dx + \frac{(\sigma+2)}{2}\int_0^t\int c|u_N|^{\sigma/2+\gamma-1}u_N u_N^+\,dx\,dw(s). \end{aligned} \tag{5}$$

Одержимо апріорні оцінки для

$$|||u_N(t,\cdot)|||_{L_{\sigma+2}(G)}, \qquad |||u_N|||_{L_{\beta+\sigma+1}(G_T)}, \qquad |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G_T)}.$$

Для цього оцінимо кожний доданок у правій частині рівняння (5). Перший доданок перенесемо ліворуч. Далі за лемою 2 [5] оцінюємо другий доданок:

$$\mathcal{D}_N(t) = \mathbf{M}\int_0^t \int |u_N|^{\sigma+\beta-1} u_N u_N^+ \, dx\, ds \le C_1 \int_0^t |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G)}^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+1)} \, ds.$$

Оскільки $\beta < \sigma + 1$, то $(\beta+\sigma+1)/(2(\sigma+1)) < 1$. Тоді за нерівністю Юнґа

$$\mathcal{D}_N(t) \le C_1 \varepsilon_1^{(\beta+\sigma+1)/(2(\sigma+1))} \frac{\beta+\sigma+1}{2(\sigma+1)} \int_0^t |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G)}^2 \, ds + \frac{C_1 t(\sigma+1-\beta)}{2(\sigma+1)\varepsilon_1^{(\beta+\sigma+1)/(2(\sigma+1))}}.$$

Візьмемо ε_1 таким, щоб було

$$a - C_1 \frac{\beta+\sigma+1}{2(\sigma+1)} \varepsilon_1^{(\beta+\sigma+1)/(2(\sigma+1))} b > 0,$$

і перенесемо інтеґрал з ґрадієнтом у ліву частину (5). $\mathbf{M}\int_0^t \int |u_N|^{\sigma+2\gamma-2}(u_N^+)^2 \, dx\, ds$ оцінимо аналогічно попередньому, поклавши $\beta = 2\gamma - 1$.

Оскільки за умовою $\gamma < \sigma/2 + 1$, то $2\gamma - 1 < \sigma + 1$ і

$$\mathbf{M}\int_0^t \int |u_N|^{\sigma+2\gamma-2}(u_N^+)^2 \, dx\, ds \le C_2 \varepsilon_2^{(2(\sigma+1))/(2\gamma+\sigma)} \frac{2\gamma+\sigma}{2(\sigma+1)} |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G_t)}^2 + \frac{\sigma+2-2\gamma}{2(\sigma+1)} \varepsilon_2^{-(2(\sigma+1))/(\sigma+2-2\gamma)}.$$

Обравши ε_2 таким, щоб

$$a - C_1 \frac{\beta+\sigma+1}{2(\sigma+1)} b \varepsilon_1^{(2(\sigma+1))/(\beta+\sigma+1)} - \frac{c^2(\sigma+1)}{2} C_2^{2\gamma+\sigma} \frac{2\gamma+\sigma}{2(\sigma+1)} \varepsilon_2^{(2(\sigma+1))/(2\gamma+\sigma)} = C_3 > 0,$$

перенесемо інтеґрал з ґрадієнтом у ліву частину (5). Наступний доданок після використання нерівності Бесселя оцінюється за тією ж схемою.

Таким чином, одержуємо нерівність

$$|||u_N(t,\cdot)|||_{L_{\sigma+2}(G)}^{\sigma+2} + C_3 |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G_t)}^2 \le C_4 t + |||u_0|||_{L_{\sigma+2}(G)}^{\sigma+2}.$$

Звідси безпосередньо одержуємо оцінки

$$\sup_t |||u_N(t,\cdot)|||_{L_{\sigma+2}(G)}^{\sigma+2} \le C_4 T + |||u_0|||_{L_{\sigma+2}(G)}^{\sigma+2},$$

$$|||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G_T)}^2 \le C_3^{-1}\left(C_4 T + |||u_0|||_{L_{\sigma+2}(G)}^{\sigma+2}\right),$$

а за лемою 2 [5]

$$|||u_N|||_{L_{\beta+\sigma+1}(G)} \le C, \qquad |||u_N|||_{L_{\sigma+2\gamma}(G)} \le C.$$

Доведемо, що розв'язок рівняння (3) існує. Для цього використаємо теорему 3.1 із [1].

Коерцитивність. Оцінюваний вираз $2(A(z), z) + \|B(z)\|^2$ є правою частиною рівності (4) без стохастичного члена. Як доведено вище, цей вираз обмежений.

Локальна монотонність. Всі доданки у правій частині (3) є степеневими виразами відносно u_N і відповідно $g_{jN}(t)$. Це означає, що їх можна оцінити за формулою Лаґранжа

$$(|u|^\alpha - |v|^\alpha)(u-v) = \alpha \int_0^1 |\tau u + (1-\tau)v|^{\alpha-1}\, d\tau |u-v|^2.$$

В області $|u| < R$ цей вираз обмежений величиною $\alpha R^{\alpha-1}|u-v|^2$. Підсумовуючи, маємо, що за теоремою 3.1 [1] розв'язок (3) існує і єдиний, причому

$$\mathbf{M} \sup_t |g_{jN}(t)|^2 \le C.$$

Остання нерівність забезпечує існування стохастичного інтеґрала у (3) і рівність нулю математичного сподівання стохастичного інтеґрала в (4).

Одержані апріорні оцінки дозволяють вибрати з послідовності $u_N(t,x)$ підпослідовність (яку також будемо позначати $u_N(t,x)$), яка слабко збігається у просторах $L_{\beta+\sigma+1}(G_T)$, $L_{\sigma+2\gamma}(G_T)$, $L_\infty([0,T]; L_2(G))$, а також $|u_N|^\sigma u_N$ слабко збігається у $L_2([0,T]; \overset{0}{H}{}^1(G))$. Враховуючи зв'язок між нормами цих просторів, бачимо, що всі слабкі границі для $u_N(t,x)$ співпадають. Це дозволяє перейти до границі у рівності (3) і тим самим довести існування розв'язку рівняння

$$\begin{aligned} d(|u|^{\sigma/2}u) &= \frac{\sigma+2}{2}|u|^{\sigma/2} \operatorname{div}\left(a(x)\nabla(|u|^\sigma u)\right) dt + \frac{b(\sigma+2)}{2}|u|^{\sigma/2+\beta-1}u^+\, dt \\ &+ \frac{c^2\sigma(\sigma+2)}{8} \operatorname{sgn} u |u|^{\sigma/2+2\gamma-3}(u^+)^2\, dt + \frac{c(\sigma+2)}{2}|u|^{\sigma/2+\gamma-1}u^+\, dw(t), \\ &u(0,x) = u_0(x), \qquad u(t,x)|_{x\in\delta G} = 0. \end{aligned}$$

Звідси за допомогою формули Іто маємо, що $u(t,x)$ є розв'язком задачі (1). Теорема 1 доведена. □

Наслідок 1. *Якщо виконані умови теореми* 1 *і* $u_0(x) > 0$ *для* $x \in G$, *то існує розв'язок задачі*

$$\begin{aligned} &du(t,x) = \operatorname{div}(a(x)\nabla u^{\sigma+1})\, dt + b(t,x)u^\beta\, dt + c(t,x)u^\gamma\, dw(t), \\ &0 \le t \le T, \qquad u(0,x) = u_0(x) > 0, \qquad u(t,x)|_{x\in\delta G} = 0. \end{aligned}$$

Доведення випливає з принципу максимуму, доведеного в [3]. □

Доведена теорема забезпечує існування ґлобального за часом розв'язку рівняння (1). Наступна теорема дає умови, коли при відсутності ґлобального існує локальний розв'язок.

Теорема 2. *Якщо* $za(x)z^* \ge a|z|^2$, $a > 0$, $\sigma + 1 \le \beta < ((n+2)(\sigma+1)+2)/2$, $(\sigma+2)/2 \le \gamma < ((n+2)(\sigma+2))/(2n)$, $u_0 \in L_{\sigma+2}(G)$, *то існує локальний за часом розв'язок рівняння* (1).

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, скористаємось методом Ґальоркіна. Однак, оскільки умови леми 2 [5] не виконані, оцінки треба знаходити іншим шляхом. Розглянемо рівність (5). Як і раніше, перший доданок перенесемо ліворуч, а інші оцінимо за допомогою леми 4 [5]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} \int_0^t \int |u_N|^{\sigma+\beta-1} u_N u_N^+\, dx\, ds \\ &\quad \le C_5 \int_0^t |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G)}^{2\nu_1(\beta+\sigma+1)} |||u_N|||_{L_{\sigma+2}(G)}^{(1-2\nu_1(\sigma+1))(\beta+\sigma+1)}\, ds, \end{aligned}$$

де $\nu_1 = n(\beta - 1)(\beta + \sigma + 1)^{-1}[2(\sigma + 2) + n\sigma]^{-1}$.

Оскільки $2\beta < (n + 2)(\sigma + 1) + 2$, то $\nu_1(\beta + \sigma + 1) < 1$. Тоді нерівність Юнґа дає оцінку

$$\mathbf{M} \int_0^t \int |u_N|^{\beta+\sigma-1} u_N u_N^+ \, dx \, ds$$

$$\leq C_5 p_1^{-1} \varepsilon_3^{p_1} |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||^2_{L_2(G_+)} + C_5 \varepsilon_3^{-q_1} q_1^{-1} \int_0^t |||u_N(s, \cdot)|||^{\frac{(\beta+\sigma+1)(1-2\nu_1(\sigma+1)}{1-\nu_1(\beta+\sigma+1))}} \, ds,$$

де $p_1 = [\nu_1(\beta + \sigma + 1)]^{-1}$, $q_1 = [1 - \nu_1(\beta + \sigma + 1)]^{-1}$. Виберемо ε_3 такі м, щоб $a - C_5 \varepsilon_1^{p_1} b p_1^{-1} > 0$, та перенесемо інтеґрал з ґрадієнтом у ліву частину рівності (5).

Розглянемо показник степеня другого доданку у правій частині останньої нерівності: $(\beta + \sigma + 1)(1 - 2\nu_1(\beta + \sigma + 1))^{-1} = (\sigma + 2)(1 + \delta_1)$, де $\delta_1 = (2(\beta - 1))/((n + 2) \times (\sigma + 1) - n\beta + 2)$. Виникає питання: при яких β величина σ_1 буде додатною? Оскільки $\beta > \sigma + 1$ за умовами теореми 2, то показник степеня більший за $(\sigma + 2)$.

Оцінюємо інший доданок:

$$\mathbf{M} \int_0^t \int |u_N|^{\sigma+2\gamma-2} (u_N^+)^2 \, dx \, ds$$

$$\leq C_6 \varepsilon_4^{p_2} p_2^{-1} |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||^2_{L_2(G_+)} + C_6 \varepsilon_4^{-q_2} q_2^{-1} \int_0^t |||u_N(s, \cdot)|||^{1+\delta_2}_{L_{\sigma+2}(G)} \, ds,$$

де $p_2 = [\nu_2(\sigma + 2)\gamma)]^{-1}$, $q_2 = [1 - \nu_2(\sigma + 2\gamma)]^{-1}$, $\delta_2 = 4(\gamma - 1)/((n + 2)(\sigma + 2) - 2n\gamma) > 0$, $\nu_2 = 2n(\gamma - 1)(\sigma + 2\gamma)^{-1}[2(\sigma + 2) + n\sigma]^{-1}$. Аналогічно оцінюються і інші доданки в правій частині (5).

Отже, після всіх оцінювань з (5) одержимо нерівність

$$y'(t) \leq C\left(y^{1+\delta_1}(t) + y^{1+\delta_2}(t)\right), \qquad y(t) = |||u_N(t, \cdot)|||_{L_{\sigma=2}(G)}.$$

Позначимо $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\Delta = \max(\delta_1, \delta_2)$, $v(t) = y^\Delta(t)$, тоді $v'(t) \leq \Delta C(v^2(t) + v^{1+\delta/\Delta}(t)) \leq C(1 + v^2)$, де C — якась додатна стала. Розв'язуючи, знаходимо

$$\arctan v(t) \leq \arctan v(0) + Ct.$$

Функція арктанґенс монотонно зростає, $v(0) < +\infty$, значить, $\arctan v(0) < \frac{\pi}{2}$, і при малих t: $\arctan v(0) + Ct < \frac{\pi}{2}$, тобто $v(t) \leq \tan(\arctan v(0) + Ct) < +\infty$. Це означає, що при малих t: $|||u_N(t, \cdot)|||_{L_{\sigma+2}(G)} < +\infty$.

Таким чином, всі необхідні оцінки для малих t справедливі. Тоді, повторюючи міркування, наведені при доведенні теореми 1, завершуємо доведення теореми 2. □

Зауваження. Відсутність ґлобального за часом розв'язку в умовах теореми 2 є наслідком його відсутності у детермінованому випадку.

Теорема 3. *Якщо* $za(x)z^* \geq a|z|^2$, $a > 0$, $u_0 \in L_{\sigma+2}(G)$, $\beta = \sigma + 1$, $\gamma = \sigma/2 + 1$,

$$a - \left(\frac{c^2(\sigma + 1)}{2} + b\right) \frac{(\operatorname{diam} G)^2}{2} > 0,$$

то існує ґлобальний за часом розв'язок рівняння (1).

Доведення. З (5) одержуємо нерівність

$$
\begin{aligned}
|||u_N(t,\cdot)|||^{\sigma+2}_{L_{\sigma+2}(G)} &\le -a(\sigma+2)|||(\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||^2_{L_2(G_+)} \\
&\quad + (\sigma+2)\left(\frac{c^2(\sigma+1)}{2}+b\right)|||u_N|||^{2(\sigma+1)}_{L_{2(\sigma+1)}(G_+)} + |||u_0|||^{\sigma+2}_{L_{\sigma+2}(G)} \\
&\le (\sigma+2)\left(\left(\frac{c^2(\sigma+1)}{2}+b\right)\frac{(\operatorname{diam} G)^2}{2}-a\right)|||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||^2_{L_2(G_+)} \\
&\quad + |||u_0|||^{\sigma+2}_{L_{\sigma+2}(G)}.
\end{aligned}
$$

В останньому випадку застосовано нерівність Фрідріхса.

З одержаної нерівності маємо оцінки

$$
\sup_t |||u_N(t,\cdot)|||^{\sigma+2}_{L_{\sigma+2}(G)} \le C, \qquad |||u_N|||_{L_{2(\sigma+1)}(G_T)} \le C, \qquad |||\nabla(|u_N|^\sigma u_N)|||_{L_2(G_T)} \le C,
$$

які дозволяють виконати граничний перехід і довести існування ґлобального за часом розв'язку. □

Наслідок 2. *Якщо* $\beta = \sigma + 1$, $\gamma < \sigma/2 + 1$, *то в умовах теореми* 3 *замість* (6) *можна вимагати виконання нерівності*

$$
a - b\frac{(\operatorname{diam} G)^2}{2} > 0.
$$

Наслідок 3. *Якщо* $\beta < \sigma + 1$, $\gamma = \sigma/2 + 1$, *то в умовах теореми* 3 *замість* (6) *можна вимагати виконання нерівності*

$$
a - \frac{c^2(\sigma+1)}{4}(\operatorname{diam} G)^2 > 0.
$$

Література

1. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, "Наука", Москва, 1981.
2. С. А. Мельник, *Автомодельные решения для некоторых стохастических уравнений горения*, Деп. в УкрИНТЕИ 6.04.92, № 433-Ук 92.
3. С. А. Мельник, *Принцип максимума для стохастических уравнений горения*, Деп. в УкрИНТЕИ 6.04.92, № 434-Ук 92.
4. Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский, *Об эволюционных стохастических уравнениях*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14, ВИНИТИ, Москва, 1979, стр. 71–147.
5. В. А. Галактионов, *Об одной краевой задаче для линейного параболического уравнения* $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^\beta$, Дифференциальные уравнения 17, № 5, 836–842.

340055, Донецьк, вул. Університетська, 24, Донецький університет

Надійшла 5.05.93