Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 116–125

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 116–125

О СТРОГОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНОК ДЛЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С БЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

УДК 519.21

Т. МИКОШ[1] И К. КЛЮППЕЛЬБЕРГ

Резюме. Эта статья является продолжением работы авторов по параметрическому оцениванию моделей с тяжелыми хвостами. Мы рассматриваем тут с точки зрения сходимости выборочную автокорреляцию и оценку Уиттла для линейных процессов по независимым одинаково распределенным случайным величинам с бесконечной дисперсией. Мы рассматриваем примеры, показывающие, что выборочные автокорреляции не сходятся п.н., однако они сходятся по специальной неслучайной подпоследовательности. Этот факт используется впоследствии, чтобы доказать сходимость п.н. оценки Уиттла по специальной неслучайной подпоследовательности.

1. Введение

В этой работе изучаются два связанных, но разных, объекта: строгая сходимость выборочных автокорреляций и оценок Уиттла для стационарного процесса. Мы рассматриваем всюду дискретный процесс скользящего среднего

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \qquad t \in \boldsymbol{Z}, \tag{1.1}$$

где $(Z_t)_{t\in \boldsymbol{Z}}$ это "шумовая" последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, не обязательно имеющих конечную дисперсию. В трех предыдущих работах (Klüppelberg и Mikosch (1993, 1994) и Mikosch, Gadrich, Klüppelberg, Adler (1994)) мы изучали асимптотическое поведение оценок типа периодограмм для процесса $(X_t)_{t\in \boldsymbol{Z}}$ при условии, что $Z = Z_0$ лежит в области нормального притяжения α-устойчивого закона для некоторого $\alpha \in (0, 2)$.

В Klüppelberg и Mikosch (1993, 1994) было показано, что квази-нормализованная периодограмма

$$\widetilde{I}_{n,X}(\lambda) = \left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-i\lambda t}\right|^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} X_t^2, \qquad -\pi < \lambda \le \pi,$$

сходится по распределению к

$$\frac{\left|\psi\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2}{\psi^2} \frac{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}{Y_0},$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 62M15, 62F10; Secondary 60G10, 62M10.

[1]Исследования поддержаны частично New Zealand FRST Grant (93-VIC-36-039)

где

$$\psi\left(e^{-i\lambda}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-i\lambda j}$$

это передаточная функция линейного фильтра $(\psi_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $\psi^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2$, а вектор $(\alpha(\lambda), \beta(\lambda), Y_0)$ имеет фиксированное устойчивое распределение, такое, что $(\alpha(\lambda), \beta(\lambda))$ являются совместно α-устойчивыми, Y_0 — $\frac{\alpha}{2}$-устойчивой. Более того, вектор ординат периодограммы $\left(\widetilde{I}_{n,X}(\lambda_i)\right)_{i=1,\dots,m}$ для различных частот $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < \pi$ слабо сходится, а компоненты предельного вектора имеют хвосты, убывающие с экспоненциальной скоростью, и некоррелированны. Мы также изучали смешанные варианты квази-нормализованной периодограммы и получили их слабую сходимость к квази-нормализованной степенной передаточной функции

$$\left|\psi\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2 / \psi^2.$$

В этой работе мы ослабляем существенно прежние условия на Z: мы только требуем, чтобы $\mathsf{E}|Z|^d < \infty$ для некоторого $d > 0$ и чтобы $\left(\sum_{t=1}^{n} Z_t^2\right)_{n\in N}$ удовлетворяла некоторое неограничительное условие плотности. Цена, которую мы должны за это платить, состоит в том, что в общем случае мы не можем вывести скорость сходимости.

Работа составлена следующим образом: предположения и обозначения вводятся в разделе 2. В разделе 3 мы изучаем выборочные автокорреляции. Мы упоминаем результаты Davis и Resnick (1986) и Mikosch et al. (1994). Мы показываем, что выборочные автокорреляции не сходятся, вообще говоря, п.н., однако они сходятся вдоль специальной неслучайной подпоследовательности целых чисел. В разделе 4 мы имеем дело с параметрическим оцениванием для процессов АРСС. Мы напоминаем понятия оценки Уиттла и некоторые связанные результаты. Используя строгую сходимость выборочных автокорреляций, мы показываем сходимость п.н. оценки Уиттла вдоль некоторой подпоследовательности при очень общих условиях.

2. Обозначения и предположения

Мы рассматриваем процесс скользящего среднего $(X_t)_{t\in Z}$, определяемый по (1.1). Чтобы сформулировать ограничения на шум $(Z_t)_{t\in Z}$, мы вводим следующие функции для $x > 0$:

$$G(x) = \mathsf{P}\left(Z^2 > x\right)$$
$$K(x) = x^{-2}\,\mathsf{E}\,Z^4 I\left(Z^2 \le x\right)$$
$$Q(x) = G(x) + K(x) = \mathsf{E}\left[1 \wedge \left(x^{-1}Z^2\right)^2\right].$$

Поскольку Q строго убывает и непрерывна на $(0,\infty)$, равенство

$$Q\left(a_n^2\right) = \frac{1}{n}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

определяет последовательность положительных чисел a_n, таких, что $a_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$. Далее, определим

$$\gamma_{n,Z}^2 = a_n^{-2} \sum_{t=1}^{n} Z_t^2, \qquad n \in \boldsymbol{N}. \tag{2.1}$$

Для процесса скользящего среднего в (1.1) мы вводим следующие предположения: существует некоторое $d > 0$, такое, что

(A1) $\mathsf{E}|Z|^d < \infty$;

(A2) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| \cdot |\psi_j|^\delta < \infty$ для $\delta = 1 \wedge d$;

(A3) $n/a_n^{2\delta} \to 0$, $n \to \infty$, для $\delta = 1 \wedge d$;

(A4) $\lim_{x\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\gamma_{n,Z}^2 \le x\right) = 0$.

(A5) Существует последовательность положительных чисел e_n, такая, что

$$\liminf_{n\to\infty} e_n^{-2} \sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = 1 \qquad \text{п.н.}, \tag{2.2}$$

где нормализующие константы e_n удовлетворяют следующим условиям: существует некоторое $\nu \in \boldsymbol{N}$, такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} \left(n_k e_{n_k}^{-2\delta} + e_{n_k}^{-\delta}\right) < \infty$ для $n_k = k^\nu$, $k \in \boldsymbol{N}$, и $\delta = 1 \wedge d$, а (e_n/e_{n_k}) отделено от 0 и ∞ равномерно по $n \in [n_k, n_{k+1}]$ для всех $k \in \boldsymbol{N}$.

Замечание 1. (A1) и (A2) влекут абсолютную сходимость п.н. ряда (1.1) для любого $t \in \boldsymbol{Z}$. Это следствие теоремы о трех рядах.

Замечание 2. Очевидно, что (A2) выполнено для любого АРСС(p, q) процесса. В этом случае ψ_j убывают экспоненциально.

Замечание 3. Условия $\mathsf{E} Z^2 < \infty$, (A3) и (A4) не могут выполняться одновременно, поскольку (A3) и УЗБЧ влекут $\gamma_{n,Z}^2 \xrightarrow{a.s} 0$, что противоречит (A4).

Замечание 4. Условие (A4) — это условие стохастической компактности для $\gamma_{n,Z}^2$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\gamma_{n,Z}^2$ были стохастически компактны, является

$$\liminf_{x\to\infty} K(x)/G(x) > 0$$

(см. Maller (1981)). Даже, если $\gamma_{n,Z}^2$ являются стохастически компактными, то существует некоторая константа $c > 0$, такая, что для всех $n \in \boldsymbol{N}$

$$\mathsf{P}\left(\gamma_{n,Z}^2 \le x\right) \le cx, \qquad x \ge 0,$$

(Griffin (1983)), что влечет (A4).

Замечание 5. Обзор результатов типа (2.2) можно найти в Pruitt (1990, с. 1149). Fristedt и Pruitt (1971) доказали при некоторых ограничениях, что если $\mathsf{E}|Z|^d < \infty$ для некоторого $d > 0$, то (2.2) выполняется при

$$e_n^2 = \frac{\ln\ln n}{\eta(\xi \ln\ln n/n)}$$

для некоторой константы $\xi > 1$, где $\eta(\cdot) = \left(-\ln Ee^{-\cdot Z^2}\right)^{\leftarrow}$ обозначает обобщенную обратную функцию к $-\ln \mathsf{E}\, e^{-\cdot Z^2}$.

Естественным классом "шумовых" переменных, удовлетворяющих (A1) и (A3)–(A5), является область притяжения некоторой α-устойчивой случайной величины, которую мы обозначили $DA(\alpha)$. Мы используем также обозначение $DNA(\alpha)$ для области нормального притяжения α-устойчивого закона. Определения и свойства α-устойчивых с.в., их области нормального притяжения, правильно и слабо меняющиеся функции можно найти в Feller (1971), Bingham, Goldie и Teugels (1987) или Petrov (1975).

Теперь, если $Z \in DA(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in (0, 2)$, то $Z^2 \in DA(\alpha/2)$ и

$$\lim_{x\to\infty} G(x)/K(x) = (4 - \alpha)/\alpha.$$

Тогда G является регулярно меняющейся функцией с показателем $-\alpha/2$, а иной выбор нормирующих констант в (2.2) дается выражением

$$a_n^2 = G^{\leftarrow}\left(n^{-1}\right) = \inf\left\{x\colon G(x) < n^{-1}\right\},$$

где $G^{\leftarrow}$ — обобщенная обратная функция к G. Это влечет, что $a_n^2 = n^{2/\alpha}L(n)$, где L есть слабо меняющаяся функция и $\gamma_{n,Z}^2 \xrightarrow{d} Y_0$ для некоторых положительных $\frac{\alpha}{2}$-устойчивых с.в. Y_0. Более того, $\mathsf{E}\,|Z|^d < \infty$ для $d < \alpha$.

Все эти свойства собраны в следующей лемме.

Lemma 2.1. *Предположим, что $Z \in DA(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in (0,2)$, тогда* (A1), (A3) *и* (A4) *выполняются при некотором $0 < d < \alpha$, а $a_n^2 = n^{2/\alpha}L(n)$, где L это слабо меняющаяся функция. Более того,* (A5) *выполнено для $d < \alpha$ и $e_n^2 = n^{2/\alpha}\widetilde{L}(n)$ для некоторой слабо меняющейся функции $\widetilde{L}$. Число ν в* (A5) *можно выбрать так, чтобы $\nu > \alpha/(2\delta - \alpha) \vee (\alpha/\delta)$ при условии $\delta > \alpha/2$.*

Следующее обозначение используется всюду в статье. Пусть $(A_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ это любая из последовательностей $(Z_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ или $(X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$. Выберем (a_n) как в (2.2). Тогда определим

$$\gamma_{n,A}^2 = a_n^{-2}\sum_{t=1}^{n} A_t^2,$$

$$I_{n,A}(\lambda) = a_n^{-2}\left|\sum_{t=1}^{n} A_t e^{-i\lambda t}\right|^2, \qquad \lambda \in (-\pi, \pi],$$

$$\widetilde{I}_{n,A}(\lambda) = I_{n,A}(\lambda)/\gamma_{n,A}^2 = \left|\sum_{t=1}^{n} \widetilde{A}_t e^{-i\lambda t}\right|^2, \qquad \lambda \in (-\pi, \pi].$$

3. Состоятельность выборочной автокорреляционной функции

Для $h \in \boldsymbol{Z}$, $h \neq 0$, определим

$$\widetilde{\gamma}_{n,X}(h) = \gamma_{n,X}(h)/\gamma_{n,X}^2, \qquad \widetilde{\gamma}(h) = \gamma(h)/\psi^2,$$

где

$$\gamma_{n,X}(h) = a_n^{-2}\sum_{t=1}^{n-|h|} X_t X_{t+|h|}, \qquad \gamma(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|h|}.$$

Если $\mathsf{E}\,Z^2 < \infty$, то хорошо известно, что $\widetilde{\gamma}_{n,X}(h)$ является состоятельной оценкой для автокорреляционной функции $\widetilde{\gamma}(h)$ для $(X_t)_{t\in Z}$. В развитие этого результата, Davis и Resnick (1986) доказали следующее: для $Z \in DA(\alpha)$, $\alpha \in (0,2)$, и симметричных Z

$$\begin{aligned} &\left(\left(nL(n)\right)^{1/\alpha}\left(\widetilde{\gamma}_{n,X}(h) - \widetilde{\gamma}(h)\right)\right)_{h=1,\dots,m} \\ &\quad\xrightarrow{d} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\widetilde{\gamma}(j+h) - \widetilde{\gamma}(j-h) - 2\widetilde{\gamma}(j)\widetilde{\gamma}(h)\right)\frac{Y_j}{Y_0}\right)_{h=1,\dots,m}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где L — это слабо меняющаяся функция, $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ — независимые с.в., Y_0 — положительная $\frac{\alpha}{2}$-устойчивая с.в., а $(Y_j)_{j\in N}$ — это н.о.р. α-устойчивые с.в. Условие (3.1) влечет, что $\widetilde{\gamma}_{n,X}(h)$ есть слабо состоятельна с пределом $\widetilde{\gamma}(h)$, а скорость сходимости в (3.1) есть даже лучше, чем $\sqrt{n}$ в случае конечной дисперсии. Точный результат типа (4.1) не следует ожидать при наших более общих условиях (A1)–(A4). В Mikosch et al. (1994) мы доказали следующий результат о слабой состоятельности:

Предложение 3.1. *Предположим, что* $(X_t)_{t\in Z}$ *удовлетворяет* (A1)–(A4), *тогда*

$$\widetilde{\gamma}_{n,X}(h) \xrightarrow{P} \widetilde{\gamma}(h), \qquad h \in \boldsymbol{N},\ n \to \infty.$$

Сходимость по распределению $\widetilde{\gamma}_{n,X}(h)$ может быть усилена до сходимости п.н. при условии, что второй момент Z существует. Это неверно в случае бесконечной дисперсии, как показывает следующий пример. Похожие примеры можно построить для любого процесса скользящего среднего конечного порядка и любой автокорреляции с задержкой, большей, чем 1.

Пример. Рассмотрим процесс СС(1)

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \qquad t \in \boldsymbol{Z},\ |\theta| < 1,$$

для симметричной α-устойчивой Z, $\alpha \in (0,2)$. Тогда, как отмечалось в разделе 2, (A1)–(A5) выполнены для некоторых $0 < d < \alpha$ и (e_n) можно выбрать в виде

$$e_n = n^{1/\alpha} (\ln\ln n)^{-(2-\alpha)/(2\alpha)}.$$

Теперь мы рассматриваем

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_{n,X}(1) &= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+1} + \theta Z_t)}{\sum_{t=1}^{n} (Z_t + \theta Z_{t-1})^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} Z_t Z_{t+1} + \theta \sum_{t=1}^{n-1} Z_{t-1} Z_{t+1} + \theta \sum_{t=1}^{n-1} Z_t^2 + \theta^2 \sum_{t=1}^{n-1} Z_{t-1} Z_t}{\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 + \theta^2 \sum_{t=1}^{n} Z_{t-1}^2 + 2\theta \sum_{t=1}^{n} Z_{t-1} Z_t}.\end{aligned}$$

Из Rosinski и Woyczynski (1987) вытекает, что при некотором $c > 0$

$$\mathsf{P}(Z_1 Z_2 > x) \le c x^{-\alpha} \left(1 + \ln^+ x^{-1}\right),$$

где $\ln^+ y = \max(0, \ln y)$, $y > 0$. Рассуждения, похожие на те, что используются в доказательстве УЗБЧ Хейди (см. Stout (1974)) и тот факт, что

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(Z_1 Z_2 > e_n^2\right) < \infty$$

влекут

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n^{-2} \sum_{t=1}^{n-1} \left(Z_t Z_{t+1} + \theta^2 Z_t Z_{t-1} + \theta Z_{t-1} Z_{t+1}\right)}{e_n^{-2} \sum_{t=1}^{n-1} Z_t^2} = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Следовательно

$$\widetilde{\gamma}_{n,X}(1) = \frac{\theta + o(1)}{\theta^2 + 1 + \left(Z_n^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n-1} Z_t^2\right) + o(1)} \qquad \text{п.н.}$$

Мы покажем, что любое действительное число между 0 и ∞ является п.н. предельной точкой последовательности $\left(Z_n^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n-1} Z_t^2\right)$, что доказывает, что множество п.н. предельных точек для $(\widetilde{\gamma}_{n,X}(1))$ совпадает при $\theta > 0$ с интервалом $[0, \theta/(1+\theta^2)]$ или при $\theta < 0$ — с $[\theta/(1+\theta^2), 0]$. (Заметим, что $\widetilde{\gamma}(1) = \theta/(1+\theta^2)$.) Определим для положительных $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $\varepsilon_3 < \varepsilon_4$

$$A_n := \left\{\varepsilon_2 > Z_n^2 n^{-2/\alpha} > \varepsilon_1\right\}, \qquad B_n := \left\{\varepsilon_4 > n^{2/\alpha} \Big/ \sum_{t=1}^{n-1} Z_t^2 > \varepsilon_3\right\},$$

тогда

$$\mathrm{P}\left(\varepsilon_2\varepsilon_4 > Z_n^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n-1} Z_t^2 > \varepsilon_1\varepsilon_3 \text{ б.ч.}\right) \geq \mathrm{P}\left(A_n \cap B_n \text{ б.ч.}\right).$$

Заметим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty$ и $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n) > 0$. Поскольку для каждого $n \geq 1$, события A_n и $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ независимы, то применение стандартной леммы Бореля–Кантелли (см. Petrov (1975), лемма 5, раздел IX.2) дает $\mathrm{P}(A_n \cap B_n \text{ б.ч.}) > 0$, значит $\mathrm{P}(A_n \cap B_n \text{ б.ч.}) = 1$ и $Z_n^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n-1} Z_t^2$ посещает бесконечно часто с вероятностью 1 любой конечный интервал $(\varepsilon_1\varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_4)$. Это показывает, что любое положительное действительное число является п.н. предельной точкой. Модификация предыдущих рассуждений дает, что 0 и ∞ также должны быть п.н. предельными точками.

В дальнейшем мы покажем, заменяя условия (A3) и (A4) на немного более ограничительное условие (A5), что сходимость п.н. $\widetilde{\gamma}_{n,X}(h)$ к $\widetilde{\gamma}(h)$ может быть доказана вдоль той же подпоследовательности (n_k), которая определяется в (A5). В частности, это условие выполняется для $Z \in DA(\alpha)$, $\alpha \in (0, 2)$.

Следующий результат дополняет предложение 3.1.

Предложение 3.2. *Предположим, что* $(X_t)_{t\in \mathbf{Z}}$ *удовлетворяет* (A1), (A2) и (A5). *Тогда*

$$\widetilde{\gamma}_{n_k,X}(h) \xrightarrow{a.s.} \widetilde{\gamma}(h), \qquad h \in \boldsymbol{N},\ n \to \infty.$$

Доказательство. Мы имеем разложение

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t+h} - \widetilde{\gamma}(h)\sum_{t=1}^{n} X_t^2 &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{i\neq j} \psi_i\left(\psi_{j+h} - \widetilde{\gamma}(h)\psi_j\right) Z_{t-i}Z_{t-j} \\ &\quad + \sum_{t=1}^{n}\sum_{i} \psi_i\left(\psi_{i+h} - \widetilde{\gamma}(h)\psi_i\right)\left(Z_{t-i}^2 - Z_t^2\right) \\ &=: V_1 + V_2,\end{aligned} \tag{3.2}$$

где мы использовали тот факт, что $\sum_i \psi_i\left(\psi_{i+h} - \widetilde{\gamma}(h)\psi_i\right) = 0$. Значит мы получили

$$\max_{n\in[n_k,n_{k+1}]} |V_1| \leq \sum_{t=1}^{n_{k+1}} \sum_{i\neq j} \left|\psi_i\left(\psi_{j+h} - \widetilde{\gamma}(h)\psi_j\right)\right| \cdot \left|Z_{t-i}Z_{t-j}\right|.$$

Из (A1), (A2) и (A5) мы получаем для всех $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\Big(\max_{n\in[n_k,n_{k+1}]} |V_1| > \varepsilon e_{n_k}^2\Big) &\leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} e_{n_k}^{-2\delta}\, \mathrm{E} \max_{n\in[n_k,n_{k+1}]} |V_1|^{\delta} \\ &\leq c_2 \sum_{k=1}^{\infty} e_{n_k}^{-2\delta} n_{k+1} < \infty\end{aligned}$$

для некоторых c_1, $c_2 > 0$, зависящих от ε. Из леммы Бореля–Кантелли вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \max_{n\in[n_k,n_{k+1}]} |V_1|\, e_n^{-2} = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Теперь, чтобы оценить V_2, положим

$$f_i = \psi_i\left(\psi_{i+h} - \widetilde{\gamma}(h)\psi_i\right).$$

Тогда

$$V_2 = \sum_{i>0} f_i \sum_{t=1}^{n} \left(Z_{t-i}^2 - Z_t^2\right) + \sum_{i<0} f_i \sum_{t=1}^{n} \left(Z_{t-i}^2 - Z_t^2\right)$$
$$= V_3 + V_4.$$

Мы ограничиваемся доказательством того, что $\lim_{k\to\infty} e_{n_k}^{-2} V_3 = 0$ п.н., доказательство для $e_{n_k}^{-2} V_4$ является аналогичным. Имеем

$$V_3 = \sum_{i>n} f_i \sum_{t=1-i}^{n-i} Z_{t-i}^2 - \sum_{i>n} f_i \sum_{t=1}^{n} Z_t^2 + \sum_{1\le i\le n} f_i \sum_{t=1-i}^{0} Z_t^2 - \sum_{1\le i\le n} f_i \sum_{t=n-i+1}^{n} Z_t^2$$
$$= V_5 - V_6 + V_7 - V_8.$$

Докажем, что $\lim_{k\to\infty} e_{n_k}^{-2} V_7 = 0$ п.н., доказательство для V_5, V_6 и V_8 аналогично. Снова по (A1), (A2) и (A5) мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E} \left| e_{n_k}^{-2} V_7 \right|^{\delta/2} \le c \sum_{k=1}^{\infty} e_{n_k}^{-\delta} \sum_{i>0} |f_i|^{\delta/2} |i| < \infty,$$

а применение леммы Бореля–Кантелли дает желаемый результат. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$e_{n_k}^{-2} \sum_{t=1}^{n_k} X_t^2 = e_{n_k}^{-2} \psi^2 \sum_{t=1}^{n_k} Z_t^2 + o(1) \qquad \text{п.н.}$$

Это, (3.2) и (A5) влекут

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}_{n,X}(h) - \widetilde{\gamma}(h) &= \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t+h} - \widetilde{\gamma}(h) \sum_{t=1}^{n} X_t^2}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} - \frac{\sum_{t=n-h+1}^{n} X_t X_{t+h}}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} \\ &= \frac{V_1 + V_2}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} - \frac{\sum_{t=n-h+1}^{n} X_t X_{t+h}}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} = o(1) \qquad \text{п.н.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

В соотношениях (8.3) мы использовали (A1)–(A5) и аналогичные предыдущим рассуждения, чтобы показать, что $a_n^{-2} \sum_{t=n-h+1}^{n} X_t X_{t+h} \to 0$ п.н. для любого $h > 0$. □

4. Параметрическое оценивание для АРСС(p, q) процессов

Мы рассматриваем обратимый АРСС(p, q) процесс $(X_t)_{t\in \mathbf{Z}}$, удовлетворяющий для любого t следующее уравнение АРСС

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

при н.о.р. $(Z_t)_{t\in \mathbf{Z}}$. Положим

$$\beta = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)^T$$

и

$$\varphi(z, \beta) = 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p,$$
$$\theta(z, \beta) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q.$$

Тогда передаточная функция АРСС процесса имеет представление

$$\psi\left(e^{-i\lambda}, \beta\right) \equiv \varphi(e^{-i\lambda}, \beta) / \theta(e^{-i\lambda}, \beta).$$

Мы вводим параметрическое множество

$$C = \Big\{\beta \in \Gamma^{p+q}; \varphi_p \neq 0, \theta_q \neq 0, \varphi(z) \text{ и } \theta(z) \text{ не имеют общих нулей,}$$
$$\varphi(z)\theta(z) \neq 0 \text{ для } |z| \leq 1\Big\}.$$

Обозначим через $g(\lambda, \beta)$ передаточную функцию мощности, соответствующую $\beta \in C$; т.е.

$$g(\lambda, \beta) = \left|\frac{\varphi\left(e^{-i\lambda}, \beta\right)}{\theta\left(e^{-i\lambda}, \beta\right)}\right|^2 = \left|\psi\left(e^{-i\lambda}, \beta\right)\right|^2$$

и определим

$$\sigma_n^2(\beta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widetilde{I}_{n,X}(\lambda)}{g(\lambda, \beta)} d\lambda, \qquad \bar{\sigma}_n^2(\beta) = \frac{2\pi}{n} \sum_j \frac{\widetilde{I}_{n,X}(\lambda_j)}{g(\lambda_j; \beta)},$$

где сумма берется по всем частотам Фурье

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{n} \in (-\pi, \pi].$$

Предположим, что $\beta_0 \in C$ это неизвестный параметрический вектор. Тогда две естественные оценки для β_0 задаются как

$$\beta_n = \operatorname*{argmin}_{\beta \in C} \sigma_n^2(\beta), \qquad \bar{\beta}_n = \operatorname*{argmin}_{\beta \in C} \bar{\sigma}_n^2(\beta).$$

При условии $\sigma_n^2(\beta) \sim \bar{\sigma}_n^2(\beta)$, кажется естественным, что и есть на самом деле, что $\beta_n \sim \bar{\beta}_n$ и поэтому две оценки являются асимптотически эквивалентными. Ясно, что на практике можно применить только $\bar{\beta}_n$, поскольку интеграл, определяющий $\sigma_n^2(\beta)$, всегда нуждается в аппроксимации суммами.

Выбор этих оценок вызван тем, что функция

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\lambda, \beta_0)}{g(\lambda, \beta)} d\lambda$$

имеет минимум в $\beta = \beta_0$ из C (см. Brockwell и Davis (1991), предложение 10.8.1.) и тем, что $\widetilde{I}_{n,X}(\lambda)$ можно рассматривать как оценку $g(\lambda, \beta_0)$.

Для гауссовских $(X_t)_{t \in Z}$ оценка β_n тесно связана с оценками наименьших квадратов и максимального правдоподобия и является естественной для АРСС процессов с конечной дисперсией. Идея восходит к работе Whittie (1953), см. также Dzhaparidze (1986), Fox и Taqqu (1986) и Dahlhaus (1989). Хорошо известно, что в классическом случае β_n состоятельна и асимптотически нормальна (ср. Brockwell и Davis (1991)). Мы показали в Mikosch et al. (1994), что β_n также слабо состоятельная оценка для неизвестного вектора β_0 в случае АРСС процессов с бесконечной дисперсией (см. также Gadrich (1993) для случая $\bar{\beta}_n$):

Предложение. *Предположим, что $(X_t)_{t \in Z}$ обратимый АРСС(p,q) процесс и условия* (A1)-(A4) *выполнены. Тогда*

$$\beta_n \xrightarrow{P} \beta_0 \quad \text{и} \quad \sigma_n^2(\beta_n) \xrightarrow{P} 2\pi\psi^{-2}(\beta_0), \qquad n \to \infty.$$

Более того, те же предельные соотношения выполнены и для $\bar{\beta}_n$ и $\bar{\sigma}_n^2$.

Для АРСС(p,q) процессов с конечной дисперсией β_n является асимптотически нормальной со скоростью сходимости порядка $n^{1/2}$. Аналогичный результат дает в случае $Z \in DNA(\alpha)$, $\alpha < 2$, скорость сходимости порядка $(n/\ln n)^{1/\alpha}$, т.е. скорость сходимости является заметно быстрее. Это и есть основной результат в Mikosch et al. (1994):

Предложение 4.1. *Предположим, что $(X_t)_{t\in Z}$ это $APCC(p,q)$ процесс и, что $(Z_t)_{t\in Z}$ — это н.о.р. симметричные случайные величины, причем $Z \in DNA(\alpha)$ для некоторого $\alpha < 2$. Тогда*

$$\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/\alpha}(\beta_n - \beta_0) \xrightarrow{d} 4\pi W^{-1}(\beta_0)\frac{1}{Y_0}\sum_{k=1}^{\infty} Y_k b_k, \tag{4.1}$$

где $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ независимые с.в., Y_0 — положительная $\frac{\alpha}{2}$-устойчивая, $(Y_t)_{t\in N}$, — н.о.р. симметричные α-устойчивые, $W^{-1}(\beta_0)$ — обратная матрица к

$$W(\beta_0) = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\partial \ln g(\lambda,\beta_0)}{\partial\beta}\right]\left[\frac{\partial \ln g(\lambda,\beta_0)}{\partial\beta}\right]^T d\lambda,$$

и, для $k \in N$, b_k — это вектор

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} g(\lambda,\beta_0)\frac{\partial\left(g^{-1}(\lambda,\beta_0)\right)}{\partial\beta} d\lambda.$$

Более того, (5.2) *выполняется и в том случае, если β_n заменить на $\bar{\beta}_n$.*

Предельный вектор в (5.2) является отношением α-устойчивого $(p+q)$-мерного вектора и $\frac{\alpha}{2}$-устойчивой с.в. Нетрудно увидеть, что для АР(p) процессов β_n это просто формальный аналог оценок Юла–Уокера. Их слабое предельное поведение было получено в Davis и Resnick (1986), используя корреляционные методы во временной области.

Рассматривая доказательство строгой состоятельности оценки Уиттла в классическом случае (см. Brockwell и Davis (1991), часть 10.8), мы видим, что этот результат зависит только от строгой состоятельности выборочных автоковариаций (или, выборочных автокорреляций). Поэтому то же доказательство применимо и в том случае, когда условия предложения 3.2 выполнены, но мы ограничиваемся сходимостью вдоль подпоследовательности (n_k), определенной в (A5):

Предложение 4.3. *Предположим, что $(X_t)_{t\in Z}$ удовлетворяет* (A1), (A2), и (A5). *Тогда*

$$\beta_{n_k} \xrightarrow{a.s.} \beta_0 \quad и \quad \sigma^2_{n_k}(\beta_{n_k}) \xrightarrow{a.s.} 2\pi\psi^{-2}(\beta_0), \qquad k\to\infty.$$

Более того, те же предельные соотношения выполнены и для $\bar{\beta}_{n_k}$ и $\bar{\sigma}^2_{n_k}$.

Лiтература

1. N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge.
2. P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods, 2nd ed.*, Springer Verlag, Berlin.
3. R. Dahlhaus, *Efficient parameter estimation for self-similar processes*, Ann. Statist. **17**, 1749–1766.
4. R. A. Davis and S. I. Resnick, *Limit theory for the sample covariance and correlation functions of moving averages*, Ann. Statist. **14**, 533–558.
5. K. Dzhaparidze, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series*, Springer Verlag, New York.
6. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 2nd ed.*, vol. II, Wiley, New York.
7. R. Fox and M. S. Taqqu, *Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series*, Ann. Statist. **14**, 517–532.

8. B. E. Fristedt and W. E. Pruitt, *Lower functions for increasing random walks and subordinators*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **18**, 167–182.
9. T. Gad ich, *Parameter Estimation for ARMA Processes with Symmetric Stable Innovations, D. Sc. Thesis*, Technion. (Hebrew)
10. P. S. Griffin, *Probability estimates for the small deviations of d-dimensional random walk*, Ann. Probab. **11**, 939–952.
11. C. Klüppelberg and T. Mikosch, *Spectral estimates and stable processes*, Stoch. Proc. Appl. **47**, 323–344.
12. ———, *Some limit theory for the self-normalized periodogram of stable processes*, Scand. J. Statist. **21**, 485–492.
13. R. A. Maller, *Some properties of stochastic compactness*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **30**, 264–277.
14. T. Mikosch, T. Gadrich, C. Klüppelberg, and R. Adler, *Parameter estimation for ARMA processes with infinite variance innovations*, Ann. Statist. **23**, 305–326.
15. V. V. Petrov, *Sums of Independent Random Variables*, Springer Verlag, New York.
16. W. E. Pruitt, *The rate of escape of random walk*, Ann. Probab. **18**, 1417–1461.
17. J. Rosinski and W. A. Woyczynski, *Multilinear forms in Pareto-like random variables and product random measures*, Colloquium Mathematicum **51**, 303–313.
18. W. A. Stout, *Almost Sure Convergence*, Academic Press, New York.
19. P. Whittle, *Estimation and information in stationary time series*, Ark. Mat. **2**, 423–434.

Department of Mathematics, P.O. Box 800, University of Gröningen, NL–9700 AV Gröningen, The Netherlands
Електронна адреса: t.mikosch@math.rug.nl

Department of Mathematics, Johannes Gutenbers University, D–55099 Mainz, Germany
Електронна адреса: cklu@ikaros.mathematik.uni-mainz.de

Надійшла 29/APR/94