Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 126–137

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 126–137

ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ ОДНОРІДНИХ ЗА ЧАСОМ ІЗОТРОПНИХ НА СФЕРІ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ. II

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК

Резюме. Ця стаття є продовженням статті [1]. Тому в ній продовжено нумерацію пунктів, теорем та формул. Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала від невідомих значень однорідного за часом ізотропного на сфері S_n випадкового поля $\xi(t,x)$ за даними спостережень поля $\xi(t,x)$ при $t<0$, $x\in S_n$. Знайдено найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала для різних класів спектральних щільностей.

5. Найменш сприятливі щільності в класі D_v^u

Нехай невідомі спектральні щільності належать класу

$$D_v^u=\left\{f(\lambda)\colon v_m(\lambda)\le f_m(\lambda)\le u_m(\lambda);\ \frac{1}{2\pi\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}h(m,n)\int_{-\infty}^{\infty}f_m(\lambda)\,d\lambda\le P\right\},$$

де $v_m(\lambda)$, $u_m(\lambda)$ — задані спектральні щільності. Щільності з класу D_v^u описують "смугову" модель випадкових полів. З умови $0\in\partial\Delta_D(f^0)$ для множини $D=D_v^u$ знаходимо такі рівняння для визначення компонент найменш сприятливої спектральної щільності $f^0(\lambda)=\{f_m^0(\lambda)\colon m=0,1,\dots\}$:

$$f_m^0(\lambda)=\alpha_m\sum_{l=1}^{h(m,n)}\left|\int_0^{\infty}\left(A_m^l d_m^0\right)(t)e^{it\lambda}\,dt\right|^2\left(\gamma_{m1}(\lambda)+\gamma_{m2}(\lambda)+1\right)^{-1},\tag{29}$$

де $\gamma_{m1}(\lambda)\le 0$ та $\gamma_{m1}(\lambda)=0$ при $f_m^0(\lambda)>v_m(\lambda)$, а $\gamma_{m2}(\lambda)\ge 0$ і $\gamma_{m2}(\lambda)=0$ при $f_m^0(\lambda)<u_m(\lambda)$. З рівняння (29) знаходимо компоненти найменш сприятливої щільності

$$f_m^0(\lambda)=\min\left\{\max\left\{\alpha_m\sum_{l=1}^{h(m,n)}\left|\int_0^{\infty}\left(A_m^l d_m^0\right)(t)e^{it\lambda}dt\right|^2,v_m(\lambda)\right\},u_m(\lambda)\right\}.\tag{30}$$

Щоб знайти невідомі α_m, $d_m^0(t)$, $0\le t<\infty$, $m=0,1,\dots$, використаємо рівняння факторизації (2), умову (16) та умову нормування (19).

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 60G25; Secondary 62M20, 93E10.

Робота виконана при частковому фінансуванні Фонду фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки і технологій

Позначимо через $\nu_{uv}P$ максимальне значення величини

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_m^l d_m \right\|^2,$$

де $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty\}$, $m = 0, 1, \dots$ — розв'язки системи рівнянь (20), що задовольняють умову (19) та нерівності

$$v_m(\lambda) \le \left| \int_0^\infty d_m(t) e^{-it\lambda}\, dt \right|^2 \le u_m(\lambda), \qquad m = 0, 1, \dots. \tag{31}$$

Через $\nu_{uv}^{+}P$ позначимо максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_m^l d_m \right\|^2$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty\}$, $m = 0, 1, \dots$, задають канонічну факторизацію (2) щільностей (30) і задовольняють умову (19).

Теорема 3. *Нехай функція $a(t, x)$ задовольняє умови (4). Спектральна щільність $f^0(\lambda) = \{ f_m^0(\lambda): m = 0, 1, \dots \}$ з компонентами (21) поля одностороннього рухомого середнього (22) буде найменш сприятливою в класі D_v^u при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо існує розв'язок $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t): 0 \le t < \infty\}$ рівняння (20) при $m = m_0$ такий, що $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ та*

$$\nu_{uv}P = \nu_{uv}^{+}P = \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{m_0}^l d_{m_0} \right\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty\}$ рівнянь (20), що задовольняють умову (19) та

$$\nu_{uv}P = \nu_{uv}^{+}P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_m^l d_m \right\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) поля (3) буде найменш сприятливою в класі D_v^u. При $\nu_{uv} < \nu_{uv}^{+}$ найменш сприятлива в D_v^u спектральна щільність визначається співвідношеннями (2), (16), (19), (30). Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ обчислюється за формулою (6).

Для функціонала $A\xi(x_0)$ оператори $A_m^l = S_m^l(x_0)A$. Тому компоненти найменш сприятливої щільності мають вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \min\left\{ \max\left\{ \alpha_m \left| \int_0^\infty \left(A d_m^0\right)(t) e^{it\lambda}\, dt \right|^2, v_m(\lambda) \right\}, u_m(\lambda) \right\}. \tag{32}$$

Позначимо через $\nu_{uv}(x_0)P$ максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \|A d_m\|^2,$$

де $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty\}$, $m = 0, 1, \dots$ — розв'язки рівняння $Ad = \alpha\bar{d}$, що задовольняють умову (19) та нерівності (31). Через $\nu_{uv}^{+}(x_0)P$ позначимо максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \left\|A d_m\right\|^2,$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty,\}$, $m = 0, 1, \ldots$, задають канонічну факторизацію (2) щільностей (32) та $f(\lambda) = \{f_m(\lambda): m = 0, 1, \ldots\} \in D_v^u$.

Наслідок 6. *Якщо виконуються умови* (9), *то найменш сприятливою в класі* D_v^u *при оптимальному оцінюванні функціонала* $A\xi(x_0)$ *буде щільність* $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0, 1, \ldots\}$ *з компонентами* (21) *поля* (22), *якщо існує розв'язок* $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t): 0 \le t < \infty\}$ *рівняння* $Ad = \alpha\bar{d}$, *такий, що* $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ *та*

$$\nu_{uv}(x_0)P = \nu_{uv}^+(x_0)P = h(m_0, n)\|Ad_{m_0}\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty\}$ *рівняння* $Ad = \alpha\bar{d}$, *що задовольняють умову* (19) *та*

$$\nu_{uv}(x_0)P = \nu_{uv}^+(x_0)P = \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\|Ad_m\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) *поля* (3) *буде найменш сприятливою в класі* D_v^u. *При* $\nu_{uv} < \nu_{uv}^+$ *найменш сприятлива в* D_v^u *спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (19), (32). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\xi(x_0)$ *обчислюється за формулою* (10).

Якщо оцінюється функціонал $A_T\xi$, то співвідношення (30), (31) мають вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \min\left\{ \max\left\{\alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \int_0^T (\widetilde{A}_{mT}^l d_m^0)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2, v_m(\lambda)\right\}, u_m(\lambda)\right\}, \quad (33)$$

$$v_m(\lambda) \le \left| \int_0^T d_m(t) e^{-it\lambda}\, dt \right|^2 \le u_m(\lambda), \qquad m = 0, 1, \ldots. \quad (34)$$

Позначимо через $\nu_{uv}^T P$ максимальне значення величини

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{mT}^l d_m \right\|^2,$$

де $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots,$ — розв'язки системи рівнянь (25), (26), що задовольняють умову (24) та нерівності (34). Через $\nu_{uv}^{T+} P$ позначимо максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{mT}^l d_m \right\|^2$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, задають канонічну факторизацію (2) щільностей (33) і задовольняють умову (24).

Теорема 4. *Нехай функція* $a(t, x)$ $(a(t, x) = 0,\ t > T)$ *задовольняє умови* (4). *Спектральна щільність* $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0, 1, \ldots\}$ *з компонентами* (27) *поля одностороннього рухомого середнього* (28) *буде найменш сприятливою в класі* D_v^u *при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала* $A_T\xi$, *якщо існує розв'язок* $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t): 0 \le t \le T\}$ *рівняння* (25) *або* (26) *при* $m = m_0$, *такий, що* $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|_T^2 = P\omega_n$ *і виконується рівність*

$$\nu_{uv}^T P = \nu_{uv}^{T+} P = \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{m_0 T}^l d_{m_0} \right\|_T^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, *рівнянь* (25), (26), *що задовольняють умову* (24), *і виконується рівність*

$$\nu_{uv}^T P = \nu_{uv}^{T+} P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{mT}^l d_m \right\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) *поля* (3) *рухомого середнього* ($d_m(t) = 0$, $t > T$) *буде найменш сприятливою в класі* D_v^u. *При* $\nu_{uv}^T < \nu_{uv}^{T+}$ *найменш сприятлива в* D_v^u *спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (19), (33). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A_T\xi$ *обчислюється за формулою* (8).

Для функціонала $A_T\xi(x_0)$ оператори $\widetilde{A}_{mT}^l = S_m^l(x_0)\widetilde{A}_T$. Тому компоненти найменш сприятливої щільності мають вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \min\left\{ \max\left\{ \alpha_m \left| \int_0^T (\widetilde{A}_T d_m^0)(t) e^{-it\lambda}\, dt \right|^2, v_m(\lambda) \right\}, u_m(\lambda) \right\}. \tag{35}$$

Позначимо через $\nu_{uv}^T(x_0)P$ максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \|A_T d_m\|^2,$$

де $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, — розв'язки рівнянь $A_T d = \mu \bar{d}$, $\widetilde{A}_T d = \omega d$, що задовольняють умову (24) та нерівність (34). Через $\nu_{uv}^{T+}(x_0)P$ позначимо максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \|A_T d_m\|^2$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, задають канонічну факторизацію (2) щільностей (35) та задовольняють умову (24).

Наслідок 7. *Найменш сприятливою в класі* D_v^u *при оптимальному оцінюванні функціонала* $A_T\xi(x_0)$ *буде щільність* $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0, 1, \ldots\}$ *з компонентами* (27) *поля рухомого середнього* (28), *якщо існує розв'язок* $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t): 0 \le t \le T\}$ *рівняння* $A_T d = \mu \bar{d}$ *чи рівняння* $\widetilde{A}_T d = \omega d_{m_0}$ *такий, що* $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ *та*

$$\nu_{uv}^T(x_0)P = \nu_{uv}^{T+}(x_0)P = h(m_0, n)\|A_T d_{m_0}\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, *рівнянь* $A_T d = \mu \bar{d}$, $\widetilde{A}_T d = \omega d$, *що задовольняють умову* (24) *та*

$$\nu_{uv}^T P = \nu_{uv}^{T+} P = \sum_{m=0}^{\infty} h(m_0, n) \|A_T d_m\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) *поля* (3) *рухомого середнього буде найменш сприятливою в класі* D_v^u. *Якщо* $\nu_{uv}^T < \nu_{uv}^{T+}$, *то найменш сприятлива в* D_v^u *спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (24), (35). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A_T\xi$ *обчислюється за формулою* (12).

Наслідок 8. *Найменш сприятливою в класі D_v^u при оптимальному оцінюванні значення $\xi(T,x_0)$ буде щільність $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0,1,\dots\}$ поля рухомого середнього* (3). *Функції $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0,1,\dots$, визначаються з* (24) *та умови*

$$f(\lambda) = \left\{|\hat{d}_m(\lambda)|^2: m = 0,1,\dots\right\} \in D_v^u.$$

6. Найменш сприятливі щільності в класі D_ε

Нехай невідомі спектральні щільності належать класу

$$D_\varepsilon = \left\{f: f_m(\lambda) = (1-\varepsilon)v_m(\lambda) + \varepsilon u_m(\lambda), \frac{1}{2\pi\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n)\int_{-\infty}^{\infty} f_m(\lambda)\,d\lambda = P\right\},$$

де $v_m(\lambda)$ — відома, а $u_m(\lambda)$ — невідома спектральні щільності. Множина D_ε описує модель "ε-забруднення" випадкових полів. З умови $0 \in \partial\Delta_D(f^0)$ для множини $D = D_\varepsilon$ знаходимо такі співвідношення для визначення найменш сприятливої спектральної щільності $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0,1,\dots\}$:

$$f_m^0(\lambda) = \alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left|(\widehat{A_m^l d_m^0})(\lambda)\right|^2 (\beta_m(\lambda)+1)^{-1}, \tag{36}$$

де $\beta_m(\lambda) \le 0$ та $\beta_m(\lambda) = 0$ при $f_m^0(\lambda) > (1-\varepsilon)v_m(\lambda)$. З рівняння (36) знаходимо компоненти найменш сприятливої щільності

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{\alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left|\int_0^\infty \left(A_m^l d_m^0\right)(t)e^{it\lambda}\,dt\right|^2, (1-\varepsilon)v_m(\lambda)\right\}. \tag{37}$$

Щоб знайти невідомі α_m, $d_m^0(t)$, $0 \le t < \infty$, $m = 0,1,\dots$, використаємо рівняння факторизації (2), умову (16) та умову нормування (19).

Позначимо через $\nu_\varepsilon P$ максимальне значення $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\|A_m^l d_m\right\|^2$, де $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty\}$, $m = 0,1,\dots$ — розв'язки системи рівнянь (20), що задовольняють умову (19) та нерівності

$$(1-\varepsilon)v_m(\lambda) \le \left|\int_0^\infty d_m(t)e^{-it\lambda}\,dt\right|^2, \qquad m = 0,1,\dots. \tag{38}$$

Через $\nu_\varepsilon^+ P$ позначимо максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\|A_m^l d_m\right\|^2$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t): 0 \le t < \infty\}$, $m = 0,1,\dots$, задають канонічну факторизацію (2) щільностей (37) і задовольняють умову (19).

Теорема 5. *Нехай функція $a(t,x)$ задовольняє умови* (4). *Спектральна щільність $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0,1,\dots\}$ з компонентами* (21) *поля одностороннього рухомого середнього* (22) *буде найменш сприятливою в класі D_ε при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо існує розв'язок $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t): 0 \le t < \infty\}$ рівняння* (20) *при $m = m_0$ такий, що $h(m_0,n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ та*

$$\nu_\varepsilon P = \nu_\varepsilon^+ P = \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\|A_{m_0}^l d_{m_0}\right\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t < \infty\}$ *рівнянь* (20), *що задовольняють умову* (19) *та*

$$\nu_\varepsilon P = \nu_\varepsilon^+ P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_m^l d_m \right\|^2,$$

то щільність (2) *поля* (3) *буде найменш сприятливою в класі* D_ε. *При* $\nu_\varepsilon < \nu_\varepsilon^+$ *найменш сприятлива в* D_ε *спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (19), (37). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\xi$ *обчислюється за формулою* (6).

Для функціонала $A\xi(x_0)$ компоненти найменш сприятливої щільності мають вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{\alpha_m \left| \int_0^\infty \left(Ad_m^0\right)(t) e^{it\lambda}\, dt \right|^2, (1-\varepsilon) v_m(\lambda)\right\}, \tag{39}$$

Позначимо через $\nu_\varepsilon(x_0)P$ максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \left\| Ad_m \right\|^2,$$

де $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t < \infty\}$, $m = 0, 1, \ldots,$ — розв'язки рівняння $Ad = \alpha\bar{d}$, що задовольняють умову (19) та нерівності (38). Через $\nu_\varepsilon^+(x_0)P$ позначимо максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \left\| Ad_m \right\|^2$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t < \infty\}$, $m = 0, 1, \ldots,$ задають канонічну факторизацію (2) щільностей (39) та $f(\lambda) = \{f_m(\lambda)\colon m = 0, 1, \ldots\} \in D_\varepsilon$.

Наслідок 9. *Якщо виконуються умови* (9), *то найменш сприятливою в класі* D_ε *при оптимальному оцінюванні функціонала* $A\xi(x_0)$ *буде щільність* $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda)\colon m = 0, 1, \ldots\}$ *з компонентами* (21) *поля* (22), *якщо існує розв'язок* $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t)\colon 0 \le t < \infty\}$ *рівняння* $Ad = \alpha\bar{d}$ *такий, що* $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ *та*

$$\nu_\varepsilon(x_0)P = \nu_\varepsilon^+(x_0)P = h(m_0, n)\|Ad_{m_0}\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t < \infty\}$, $m = 0, 1, \ldots,$ *рівняння* $Ad = \alpha\bar{d}$, *що задовольняють умову* (19) *та*

$$\nu_\varepsilon(x_0)P = \nu_\varepsilon^+(x_0)P = \sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \left\| Ad_m \right\|^2,$$

то щільність (2) *поля* (3) *буде найменш сприятливою в класі* D_ε. *При* $\nu_{uv} < \nu_{uv}^+$ *найменш сприятлива в* D_ε *спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (19), (39). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\xi(x_0)$ *обчислюється за формулою* (10).

Якщо оцінюється функціонал $A_T\xi$, то співвідношення (37), (38), мають вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{\alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \int_0^T (\widetilde{A}_{mT}^l d_m^0)(t) e^{-it\lambda}\, dt \right|^2, (1-\varepsilon) v_m(\lambda)\right\}, \tag{40}$$

$$(1-\varepsilon) v_m(\lambda) \le \left| \int_0^T d_m(t) e^{-it\lambda}\, dt \right|^2, \qquad m = 0, 1, \ldots. \tag{41}$$

Позначимо через $\nu_\varepsilon^T P$ максимальне значення величини

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{mT}^l d_m \right\|^2 ,$$

де $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$ — розв'язки рівнянь $A_T d = \mu \bar{d}$, $\widetilde{A}_T d = \omega d$, що задовольняють умову (24) та нерівності (41). Через $\nu_\varepsilon^{T+} P$ позначимо максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{mT}^l d_m \right\|^2$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, задають канонічну факторизацію (2) щільностей (40) і задовольняють умову (24).

Теорема 6. *Нехай функція $a(t,x)$ $(a(t,x) = 0,\ t > T)$ задовольняє умови (4). Спектральна щільність $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda)\colon m = 0, 1, \ldots\}$ з компонентами (27) поля одностороннього рухомого середнього (28) буде найменш сприятливою в класі D_ε при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_T\xi$, якщо існує розв'язок $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t)\colon 0 \le t \le T\}$ рівняння (25) або (26) при $m = m_0$ такий, що $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|_T^2 = P\omega_n$ і виконується рівність*

$$\nu_\varepsilon^T P = \nu_\varepsilon^{T+} P = \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{m_0 T}^l d_{m_0} \right\|_T^2 .$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, рівнянь (25), (26), що задовольняють умову (24) і виконується рівність

$$\nu_\varepsilon^T P = \nu_\varepsilon^{T+} P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\| A_{mT}^l d_m \right\|^2 ,$$

то щільність (2) поля (3) рухомого середнього буде найменш сприятливою в класі D_ε. При $\nu_\varepsilon^N < \nu_\varepsilon^{N+}$ найменш сприятлива в D_ε спектральна щільність визначається співвідношеннями (2), (16), (19), (40). Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T\xi$ обчислюється за формулою (8).

Для функціонала $A_T\xi(x_0)$ компоненти найменш сприятливої щільності мають вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{ \alpha_m \left| \int_0^T \left(\widetilde{A}_T d_m^0\right)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 , (1-\varepsilon) v_m(\lambda) \right\}. \tag{42}$$

Позначимо через $\nu_\varepsilon^T(x_0)P$ максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \left\| A_T d_m \right\|^2 ,$$

де $d_m = \{d_m(t)\colon 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$ — розв'язки рівняння $A_T d = \mu \bar{d}$ або рівняння $\widetilde{A}_T d = \omega d$, що задовольняють умову (24) та нерівність (41). Позначимо через $\nu_\varepsilon^{T+}(x_0)P$ максимальне значення

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \left\| A_T d_m \right\|^2$$

за умови, що $d_m = \{d_m(t): 0 \leq t \leq T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, задають канонічну факторизацію (2) щільностей (42) та задовольняють умову (24).

Наслідок 10. *Найменш сприятливою в класі D_ε при оптимальному оцінюванні функціонала $A_T\xi(x_0)$ буде щільність $f^0(\lambda) = \{ f^0_m(\lambda): m = 0, 1, \ldots\}$ з компонентами* (27) *поля рухомого середнього* (28), *якщо існує розв'язок $d = \{d(t): 0 \leq t \leq T\}$ рівняння $A_T d = \mu \bar{d}$, чи рівняння $\widetilde{A}_T d = \omega d$ такий, що $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|^2_T = P\omega_n$ та*

$$\nu^T_\varepsilon(x_0)P = \nu^{T+}_\varepsilon(x_0)P = h(m_0, n)\|A_T d_{m_0}\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t): 0 \leq t \leq T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, рівнянь $A_T d = \mu \bar{d}$, $\widetilde{A}_T d = \omega d$, що задовольняють умову (24) *та*

$$\nu^T_\varepsilon P = \nu^{T+}_\varepsilon P = \sum_{m=0}^{\infty} h(m_0, n)\, \|A_T d_m\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) *поля рухомого середнього буде найменш сприятливою в класі D_ε. При $\nu^T_\varepsilon < \nu^{T+}_\varepsilon$ найменш сприятлива в D_ε спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (24), (42). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T\xi$ обчислюється за формулою* (12).

Якщо оцінюється невідоме значення $\xi(T, x_0)$ поля (задача лінійної екстраполяції поля $\xi(t, x)$), то маємо такий наслідок з теореми.

Наслідок 11. *Найменш сприятливою в класі D_ε при оптимальному оцінюванні значення $\xi(T, x_0)$ буде щільність $f^0(\lambda) = \{f^0_m(\lambda): m = 0, 1, \ldots\}$ поля рухомого середнього* (3). *Функції $d_m = \{d_m(t): 0 \leq t \leq T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, визначаються з* (24) *та умови*

$$f(\lambda) = \{\|\hat{d}_m(\lambda)\|^2: m = 0, 1, \ldots\} \in D_\varepsilon.$$

7. Найменш сприятливі щільності в класі $D_{1\delta}$

Нехай невідомі спектральні щільності належать класу

$$D_{1\delta} = \left\{ f: \frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(\lambda) - v_m(\lambda)|\, d\lambda \leq \delta \right\},$$

де $f_m(\lambda)$ — задана обмежена спектральна щільність. Множина $D_{1\delta}$ описує модель "δ-околу" в просторі L_1. З умови $0 \in \partial\Delta_D(f^0)$ для множини $D = D_{1\delta}$ знаходимо такі співвідношення для визначення найменш сприятливої спектральної щільності $f^0(\lambda) = \{f^0_m(\lambda): m = 0, 1, \ldots\}$:

$$f^0_m(\lambda) = \alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left|(\widehat{A^l_m d^0_m})(\lambda)\right|^2 \beta_{m2}(\lambda), \tag{43}$$

де $|\beta_{m2}(\lambda)| \leq 1$ і $\beta_{m2}(\lambda) = \operatorname{sign}(f^0_m(\lambda) - v_m(\lambda))$ при $f^0_m(\lambda) \neq v_m(\lambda)$. З рівняння (43) знаходимо компоненти найменш сприятливої щільності

$$f^0_m(\lambda) = \max\left\{ \alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \int_0^{\infty} (A^l_m d^0_m)(t) e^{it\lambda} dt \right|^2, v_m(\lambda) \right\}. \tag{44}$$

Для визначення невідомих α_m та $d_m^0(t)$, $0 \le t < \infty$, $m = 0, 1, \ldots$, використаємо рівняння факторизації (2), умову (16) та умову нормування (19), де

$$P = \frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \int_{-\infty}^{\infty} v_m(\lambda)\, d\lambda = \delta.$$

Якщо оцінюється функціонал $A_T\xi$, то співвідношення (44) має вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{\alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \int_0^T (\widetilde{A}_{mT}^l d_m^0)(t) e^{-it\lambda}\, dt \right|^2, v_m(\lambda)\right\}. \tag{45}$$

Позначимо через $\nu_{1\delta}P$, $\nu_{1\delta}^{+}P$, $\nu_{1\delta}^{T}P$, $\nu_{1\delta}^{T+}P$ такі ж величини як і для множини D_ε за умови, що $\varepsilon = 0$ у співвідношеннях (37)–(41).

Теорема 7. *Нехай функція $a(t,x)$ задовольняє умови (4). Спектральна щільність $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda) \colon m = 0, 1, \ldots\}$ з компонентами (21) поля одностороннього рухомого середнього (22) буде найменш сприятливою в класі $D_{1\delta}$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо існує розв'язок $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t) \colon 0 \le t < \infty\}$ рівняння (20) при $m = m_0$ такий, що $h(m_0,n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ та*

$$\nu_{1\delta}P = \nu_{1\delta}^{+}P = \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\|A_{m_0}^l d_{m_0}\right\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t) \colon 0 \le t < \infty\}$ рівнянь (20), що задовольняють умову (19) та

$$\nu_{1\delta}P = \nu_{1\delta}^{+}P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\|A_m^l d_m\right\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) поля (3) буде найменш сприятливою в класі $D_{1\delta}$. При $\nu_{1\delta} < \nu_{1\delta}^{+}$ найменш сприятлива в $D_{1\delta}$ спектральна щільність визначається співвідношеннями (2), (16), (19), (44). Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ обчислюється за формулою (6).

Теорема 8. *Нехай функція $a(t,x)$ $(a(t,x) = 0, t > T)$ задовольняє умови (4). Спектральна щільність $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda) \colon m = 0, 1, \ldots\}$ з компонентами (27) поля одностороннього рухомого середнього (28) буде найменш сприятливою в класі $D_{1\delta}$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A_T\xi$, якщо існує розв'язок $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t) \colon 0 \le t \le T\}$ рівняння (25) або (26) при $m = m_0$ такий, що $h(m_0,n)\|d_{m_0}\|_T^2 = P\omega_n$ і виконується рівність*

$$\nu_{1\delta}^{T}P = \nu_{1\delta}^{T+}P = \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\|A_{m_0T}^l d_{m_0}\right\|_T^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t) \colon 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \ldots$, рівнянь (25), (26), що задовольняють умову (24) та

$$\nu_{1\delta}^{T}P = \nu_{1\delta}^{T+}P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left\|A_{mT}^l d_m\right\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) поля (3) рухомого середнього $(d_m(t) = 0, t > T)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{1\delta}$. При $\nu_{1\delta}^{T} < \nu_{1\delta}^{T+}$ найменш сприятлива в $D_{1\delta}$ спектральна щільність визначається співвідношеннями (2), (16), (24), (45).

Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцін и функціонала $A_T\xi$ *обчислюється за формулою* (8).

Для функціоналів $A\xi(x_0), A_T\xi(x_0)$ компоненти найменш сприятливої щільності мають вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{\alpha_m\left|\int_0^\infty \left(Ad_m^0\right)(t)e^{it\lambda}\,dt\right|^2, v_m(\lambda)\right\}, \tag{46}$$

$$f_m^0(\lambda) = \max\left\{\alpha_m\left|\int_0^T \left(\widetilde{A}_T d_m^0\right)(t)e^{-it\lambda}\,dt\right|^2, v_m(\lambda)\right\}. \tag{47}$$

Позначимо через $\nu_{1\delta}(x_0)P$, $\nu_{1\delta}^+(x_0)P$, $\nu_{1\delta}^T(x_0)P$, $\nu_{1\delta}^{T+}(x_0)P$ такі ж величини як і для множини D_ε за умови, що $\varepsilon = 0$ у співвідношеннях (38)–(42).

Наслідок 12. *Якщо виконуються умови* (9), *то найменш сприятливою в класі* $D_1\delta$ *при оптимальному оцінюванні функціонала* $A\xi(x_0)$ *буде щільність* $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0, 1, \dots\}$ *з компонентами* (21) *поля* (22), *якщо існує розв'язок* $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t): 0 \le t < \infty\}$ *рівняння* $Ad = \alpha\bar{d}$ *такий, що* $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ *та*

$$\nu_{1\delta}(x_0)P = \nu_{1\delta}^+(x_0)P = h(m_0, n)\|Ad_{m_0}\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t):\ 0 \le t < \infty\}$, $m = 0, 1, \dots$, *рівняння* $Ad = \alpha\bar{d}$, *що задовольняють умову* (19) *та*

$$\nu_{1\delta}(x_0)P = \nu_{1\delta}^+(x_0)P = \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\,\|Ad_m\|^2,$$

то щільність з компонентами (2) *поля* (3) *буде найменш сприятливою в класі* $D_{1\delta}$. *При* $\nu_{uv} < \nu_{uv}^+$ *найменш сприятлива в* $D_{1\delta}$ *спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (19), (46). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\xi(x_0)$ *обчислюється за формулою* (10).

В тому разі, коли оцінюється величина $A_T\xi(x_0)$, справджується таке твердження.

Наслідок 13. *Щільність* (27) *поля рухомого середнього* (28) *буде найменш сприятливою в класі* $D_{1\delta}$ *при оптимальному оцінюванні величини* $A_T\xi(x_0)$, *якщо існує розв'язок* $d_{m_0} = \{d_{m_0}(t): 0 \le t \le T\}$ *рівняння* $A_T d = \mu\bar{d}$ *чи рівняння* $\widetilde{A}_T d = \omega d$ *такий, що* $h(m_0, n)\|d_{m_0}\|^2 = P\omega_n$ *та*

$$\nu_{1\delta}^T(x_0)P = \nu_{1\delta}^{T+}(x_0)P = h(m_0, n)\|A_T d_{m_0}\|^2.$$

Якщо існують розв'язки $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$ *рівнянь* $A_T d = \mu\bar{d}, \widetilde{A}_T d = \omega d$, *що задовольняють умову* (24) *та*

$$\nu_{1\delta}^T P = \nu_{1\delta}^{T+} P = \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\,\|A_T d_m\|^2,$$

то щільність (2) *поля рухомого середнього буде найменш сприятливою в класі* $D_{1\delta}$. *При* $\nu_{1\delta}^T < \nu_{1\delta}^{T+}$ *найменш сприятлива в* $D_{1\delta}$ *спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (24), (47). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A_T\xi$ *обчислюється за формулою* (12).

Якщо оцінюється невідоме значення $\xi(T, x_0)$ поля (задача лінійної екстраполяції поля $\xi(t, x)$), то маємо такий наслідок з теореми.

Наслідок 14. *Найменш сприятливою в класі $D_{1\delta}$ при оптимальному оцінюванні значення $\xi(T, x_0)$ буде щільність $f^0(\lambda) = \{f_m^0(\lambda): m = 0, 1, \dots\}$ поля рухомого середнього* (3). *Функції $d_m = \{d_m(t): 0 \le t \le T\}$, $m = 0, 1, \dots$, визначаються з* (24) *та умови*

$$f(\lambda) = \{|\hat{d}_m(\lambda)|^2: m = 0, 1, \dots\} \in D_{1\delta}.$$

8. Найменш сприятливі щільності в класі $D_{2\delta}$

Знайдемо вигляд найменш сприятливої спектральної щільності в класі

$$D_{2\delta} = \left\{ f: \frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(\lambda) - v_m(\lambda)|^2 \, d\lambda \le \delta \right\},$$

де $v_m(\lambda)$ — задана обмежена спектральна щільність. Множина $D_{2\delta}$ описує модель "δ-околу" в просторі L_2. З умови $0 \in \partial\Delta_D(f^0)$ для множини $D = D_{2\delta}$ знаходимо, що компоненти найменш сприятливої щільності задовольняють рівняння

$$f_m^0(\lambda) = \frac{v_m(\lambda)}{2} + \left[\frac{(v_m(\lambda))^2}{4} + \alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \int_0^{\infty} \left(A_m^l d_m^0\right)(t) e^{it\lambda} dt \right|^2 \right]^{1/2}. \tag{48}$$

Для визначення невідомих α_m та $d_m^0(t)$, $0 \le t < \infty$, $m = 0, 1, \dots$, використаємо рівняння факторизації (2), умову (16) та умову нормування:

$$\frac{1}{2\pi\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(\lambda) - v_m(\lambda)|^2 \, d\lambda = \delta. \tag{49}$$

Якщо оцінюється функціонал $A_T\xi$, то співвідношення (48) має вигляд

$$f_m^0(\lambda) = \frac{v_m(\lambda)}{2} + \left[\frac{(v_m(\lambda))^2}{4} + \alpha_m \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| \int_0^{T} (\widetilde{A}_{mT}^l d_m^0)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 \right]^{1/2}. \tag{50}$$

Теорема 9. *Нехай функція $a(t, x)$ задовольняє умови* (4). *Найменш сприятлива в класі $D_{2\delta}$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$ спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (48), (49) (*співвідношеннями* (2), (16), (49), (50) *для функціонала $A_T\xi$*). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ обчислюється за формулою* (6) (*за формулою* (8) *для функціонала $A_T\xi$*).

Якщо оцінюються функціонали $A_T\xi(x_0)$, $A\xi(x_0)$, то співвідношення (48), (50) мають вигляд:

$$f_m^0(\lambda) = \frac{v_m(\lambda)}{2} + \left[\frac{(v_m(\lambda))^2}{4} + \alpha_m \left| \int_0^{\infty} \left(Ad_m^0\right)(t) e^{it\lambda} dt \right|^2 \right]^{1/2}. \tag{51}$$

$$f_m^0(\lambda) = \frac{v_m(\lambda)}{2} + \left[\frac{(v_m(\lambda))^2}{4} + \alpha_m \left| \int_0^{T} (\widetilde{A}_T^l d_m^0)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 \right]^{1/2}. \tag{52}$$

Наслідок 15. *Нехай виконуються умови* (9). *Найменш сприятлива в класі $D_{2\delta}$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi(x_0)$ спектральна щільність визначається співвідношеннями* (2), (16), (49), (51) (*співвідношеннями* (2), (16), (49), (52) *для функціонала $A_T\xi(x_0)$*). *Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi(x_0)$ обчислюється за формулою* (10) (*за формулою* (12) *для функціонала $A_T\xi(x_0)$*).

Наслідок 16. *Найменш сприятлива в класі $D_{2\delta}$ спектральна щільніст ь при оптимальному оцінюванні величини $\xi(T, x_0)$ визначається з рівняння*

$$f_m^0(\lambda) = \frac{v_m(\lambda)}{2} + \left[\frac{(v_m(\lambda))^2}{4} + \alpha_m \left| \int_0^T d_m^0(t) e^{-it\lambda}\, dt \right|^2 \right]^{1/2}$$

та умови нормування (49).

Література

1. М. П. Моклячук, *Екстраполяція однорідних за часом ізотропних на сфері випадкових полів*, Теорія ймовірност. та математ. статист. 51 (1994), 131–139.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 28.09.93