Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 138–141

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 138–141

# ДОСТАТНІ УМОВИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ІЗОТРОПНОГО РОЗПОДІЛУ

УДК 519.21

О. Ю. ПАСЕНЧЕНКО

Резюме. Для двовимірного ізотропного розподілу запропоновано достатні умови характеристичної функції. Вказано клас функцій, для яких достатні умови будуть і необхідними.

В теорії характеристичних функцій (х.ф.) відомий критерій Пойа х.ф. для одновимірної випадкової величини (в.в.) [1]. Цікавим є знаходження його багатовимірних аналогів (див. [2]).

Будемо розглядати випадок двовимірної ізотропної в.в. з щільністю розподілу

$$\hat{p}(x_1, x_2) = p(\rho), \qquad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{1}$$

Х.ф. шукаються серед функцій $\hat{f}(t_1, t_2)$ вигляду

$$\hat{f}(t_1, t_2) = f(r), \qquad r = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}. \tag{2}$$

Сформулюємо основний результат.

**Теорема.** *Нехай*

1) $f(r)$ — *неперервна, кусково-диференційовна на* $(0, +\infty)$ *функція*;
2) $f(0) = 1$, $r^{1/2} f(r) \to 0$, $r \to \infty$;
3) $r^{1/2} f'(r)$ *інтегровна на* $(0, +\infty)$;
4) $r^{1/2} f'(r) \uparrow 0$, $r \to +\infty$.

*Тоді* $\hat{f}(t_1, t_2) = f(r)$ — *х.ф. деякого абсолютно неперервного ізотропного розподілу в* $\boldsymbol{R}^2$.

*Зауваження.* Згідно з (2) $f(r)$ є профілем поверхні $\hat{f} = \hat{f}(t_1, t_2)$. З [1, с. 109] випливає, що умову диференційовності $f(r)$ можна замінити умовою її опуклості при $r > 0$. Порівнюючи з теоремою Пойа для одновимірного випадку [1, с. 108], бачимо, що з'явилися дві додаткові умови 3 і 4 на профіль $f(r)$.

Доведемо допоміжне твердження про функцію Бесселя $J_n(r)$ порядку $n = 1$ та її нулі $\mu_0 = 0$, $\mu_1$, ... .

Відомо [4], що нулі $J_1$ прості і накопичуються на $+\infty$.

---

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60E10.

**Лема.** *Для нулів $J_1$ виконана оцінка*

$$\pi\left(1-\frac{3}{4}\mu_{k+1}^{-2}\right)^{-1/2} \le \mu_{k+1}-\mu_k \le \pi\left(1-\frac{3}{4}\mu_k^{-2}\right)^{-1/2}, \qquad k=1,2,\ldots, \tag{3}$$

*та інтеґрали $I_k$ монотонно спадають:*

$$I_k = \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} r^{1/2}|J_1(r)|\,dr \downarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \qquad k\to+\infty. \tag{4}$$

*Доведення.* $J_1(r)$ задовольняє рівняння Бесселя з початковими умовами $J_1(\mu_k)=0$, $J_1'(\mu_k)\ne 0$:

$$r^2J_1''+rJ_1'+(r^2-1)J_1=0.$$

Зробимо заміну $u=r^{1/2}J_1(r)$. Тоді

$$u''+\left(1-\frac{3}{4}r^{-2}\right)u=0.$$

Якщо $\mu_k\le r\le\mu_{k+1}$, то $1-\frac{3}{4}\mu_k^{-2}\le 1-\frac{3}{4}r^{-2}\le 1-\frac{3}{4}\mu_{k+1}^{-2}$. За теоремою Штурма [3] маємо оцінку (3). Ліва частина (3) вірна і при $k=0$. З (3), зокрема, випливає, що $(\mu_{k+1}-\mu_k)\downarrow\pi$, $k\to+\infty$ — відомий результат про нулі $J_n(r)$ [4].

Позначимо $\omega_k^2=1-\frac{3}{4}\mu_k^{-2}$. Одержимо

$$u''+\omega_k^2u=\frac{3}{4}(r^{-2}-\mu_k^{-2})u, \tag{5}$$

де $u(\mu_k)=0$, $u'(\mu_k)=\alpha_k=\mu_k^{1/2}J_1'(\mu_k)\ne 0$, $k=1,2,\ldots,$ — початкові умови для $u(r)$ в точці $r=\mu_k$.

Методом варіації Лаґранжа з (5) одержимо для $u(r)$ інтеґральне рівняння

$$u=\frac{\alpha_k}{\omega_k}\sin\omega_k(r-\mu_k)+\frac{3}{4}(\mu_k^2\omega_k)^{-1}\int_{\mu_k}^{r}(\mu_k^2-s^2)s^{-2}u(s)\sin\omega_k(r-s)\,ds. \tag{6}$$

Розглядаючи (6) на відрізку $\mu_k\le r\le\mu_{k+1}$, маємо $0\le r-s\le\mu_{k+1}-\mu_k\le\pi/\omega_k$, тобто $\sin\omega_k(r-s)\ge 0$, звідки

$$|u(r)|\le\left|\frac{\alpha_k}{\omega_k}\sin\omega_k(r-\mu_k)\right|.$$

Аналогічно, розглядаючи (6) на відрізку $\mu_k-\pi/\omega_k\le r\le\mu_k$, дістаємо $0\le s-r\le\mu_k-(\mu_k-\pi/\omega_k)=\pi/\omega_k$, тобто $\sin\omega_k(r-s)\le 0$. Звідси

$$|u(r)|\ge\left|\frac{\alpha_k}{\omega_k}\sin\omega_k(r-\mu_k)\right|$$

на цьому відрізку, тобто

$$\int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k}|u(r)|\,dr\ge\int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}|u(r)|\,dr, \qquad k=1,2,\ldots,$$

і $I_k$ монотонно спадають.

Використовуючи асимптотику функцій Бесселя [4], легко знайти границю (4), до якої спадають $I_k$. Лема доведена. □

*Доведення теореми.* З того, що $\hat{f}(t_1,t_2)$ парна відносно кожної змінної окремо, маємо

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{R^2}\hat{f}(t_1,t_2)\cos(t_1x_1+t_2x_2)\,dt_1\,dt_2 \tag{7}$$

та

$$\hat{f}(t_1,t_2) = \iint_{R^2} \hat{p}(x_1,x_2)\cos(t_1x_1+t_2x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Переходячи в (7) до полярних координат, знаходимо, що $p(\rho)$ та $f(r)$ зв'язані парою інтеґральних перетворень Ґанкеля [5]:

$$p(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty rf(r)J_0(r\rho)\,dr, \tag{8}$$

$$f(r) = 2\pi\int_0^\infty \rho p(\rho)J_0(r\rho)\,d\rho,$$

$J_0(r)$ — функція Бесселя порядку $n=0$.

Інтеґруючи (8) частинами та враховуючи асимптотику $J_1(r)$ і умови теореми, знаходимо

$$p(\rho) = -\frac{1}{2\pi\rho}\int_0^\infty rf'(r)J_1(r\rho)\,dr. \tag{9}$$

З умови 2 теореми випливає

$$\iint_{R^2} \hat{p}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\pi\int_0^\infty \rho p(\rho)\,d\rho = 1. \tag{10}$$

Пересвідчимось, що при виконанні умови 4 теореми $p(\rho)\ge 0$.

Покладемо $g(r) = -r^{1/2}f'(r)$. Тоді $g(r)$ кусково-неперервна, абсолютно інтеґровна на $(0,+\infty)$ і $g(r)\downarrow 0$, $r\to\infty$. З (9) одержимо

$$p(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^\infty g(r)r^{1/2}J_1(r\rho)\,dr = \frac{1}{2\pi\rho}\sum_{k=0}^\infty\int_{a_k}^{a_{k+1}} r^{1/2}g(r)J_1(r\rho)\,dr, \qquad a_k=\mu_k/\rho. \tag{11}$$

Оскільки $g(r)\ge 0$, то ряд (11) знакозмінний:

$$p(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\int_{a_k}^{a_{k+1}} r^{1/2}g(r)|J_1(r\rho)|\,dr. \tag{12}$$

В (12) виконаємо заміну $r\rho\to r$. З леми одержимо

$$\int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} g\left(\frac{r}{\rho}\right)r^{1/2}|J_1(r)|\,dr \ge g\left(\frac{\mu_k}{\rho}\right)I_k \ge g\left(\frac{\mu_k}{\rho}\right)I_{k+1} \ge \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} g\left(\frac{r}{\rho}\right)r^{1/2}|J_1(r)|\,dr,$$

тобто члени ряду (12) монотонно спадають. З умови 4 теореми і з леми, очевидно, випливає, що члени ряду (12) прямують до нуля.

Таким чином, ряд (12) є рядом типу Лейбніца та

$$p(\rho) \ge \frac{1}{2\pi}\rho^{-5/2}\int_0^{\mu_2} g\left(\frac{r}{\rho}\right)r^{1/2}J_1(r)\,dr \ge 0.$$

Умова нормування (10) виконана і $\hat{p}(x_1,x_2)=p(\rho)$ — щільність деякого двовимірного розподілу. Теорема доведена. □

**Приклад.** Розглянемо конусні "капелюшки" вигляду

$$f(r) = \begin{cases} 1-r^\alpha, & 0<r<1; \\ 0, & r\ge 1, \end{cases} \qquad \alpha>0. \tag{13}$$

Маємо

$$-r^{1/2}f'(r) = \begin{cases} \alpha r^{\alpha-1/2}, & 0<r<1; \\ 0, & r\ge 1. \end{cases}$$

При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ умови теореми виконані, тобто функція (13) — х.ф. деякого абсолютно неперервного розподілу.

Зазначимо, що з (8), використовуючи таблиці інтеґральних перетворень Ґанкеля [5], можна отримати, що функції (13) не будуть х.ф. при $\alpha > \frac{1}{2}$. Очевидно, що в цьому випадку не виконана і умова 4 теореми, бо $-r^{1/2}f'(r)$ не монотонно спадає до нуля. Тобто для функцій (13) достатні умови теореми є і необхідними.

Відмітимо також, що враховуючи аналоґію між корреляційними та характеристичними функціями, основний результат статті можна сформулювати для корреляційної функції двовимірного однорідного ізотропного ґауссового випадкового поля.

## Література


1. Е. Лукач, *Характеристические функции*, "Наука", Москва, 1979.
2. А. И. Великоиваненко, *Многомерные аналоги теоремы Пойа*, Теория вероятнос. и математ. статист. (1986), № 34, 36–43.
3. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, "Мир", Москва, 1970.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, vol. 2, Москва, "Наука", 1974.
5. ———, *Таблицы интегральных преобразований*, vol. 2, "Наука", Москва, 1970.


252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 14.03.94