Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 142–148

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 142–148

ПРО ТЕОРЕМУ ПРО ВІДЛІКИ ДЛЯ ОДНОРІДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

УДК 519.21

Т. ПОГАНІ ТА П.ПЕРУНІЧІЧ

РЕЗЮМЕ. Теорема про відліки[1] для однорідних випадкових полів з обмеженим на деякій смузі носієм досліджувалась багатьма авторами. Проте розглядались лише збіжність у середньому квадратичному вибіркових сум для полів з обмеженим носієм. У цій роботі ми узагальнюємо теореми про відліки для полів з необмеженим носієм. Ми отримуємо збіжність майже напевно для вибіркових сум відповідного розкладу для полів з обмеженим та необмеженим носієм.

1. Вступ

Ми визначаємо випадкове поле у n-вимірному аффінному просторі $\boldsymbol{R}^n$ як випадкову функцію $\xi(\omega,\boldsymbol{x})\colon \Omega\times T\to \boldsymbol{R}^k$, $T\subset \boldsymbol{R}^n$. Якщо $n=1$, то $\xi(\omega,\boldsymbol{x})=\xi(\boldsymbol{x})$ є випадковим процесом. Якщо $n>1$ та $k=1$, то $\xi(x)$ є скалярним випадковим полем, а, нарешті, при $k>1$ випадкове поле $\xi(x)$ є векторним (багатовимірним).

Нехай $\xi(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in T\subset \boldsymbol{R}^n$, це скалярне випадкове поле на ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathfrak{F},\mathsf{P})$. Поле $\xi(x)$ називається однорідним випадковим полем (ОВП у подальшому), якщо його математичне сподівання $\mathsf{E}\xi(x)$ є постійним (нулем для спрощення) та якщо його корреляційна функція $B(x,x')=\mathsf{E}\xi(x)\xi^*(x')$ залежить лише від вектора $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$, тобто $B(x,x')=B(\boldsymbol{r})$.

Спектральний розклад неперервного у середньому квадратичному ОВП $\xi(\boldsymbol{x})$ в n-вимірному полі $\boldsymbol{R}^n$ є

$$\xi(\boldsymbol{x})=\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle}\,Z(d\boldsymbol{u}), \tag{1.1}$$

де $\langle u,x\rangle = u_1x_1+\dots+u_nx_n$ — це скалярний добуток векторів $u=(u_1,\dots,u_n)$ та $\boldsymbol{x}$, du — це диференціал векторів u у n-вимірному просторі, а $Z(\cdot)$ — це деяка ортогональна міра на $\boldsymbol{R}^n$. Корреляційна функція $\xi(x)$ також може бути представлена інтегралом Фур'є–Стільтьєса

$$B(\boldsymbol{r})=\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{r}\rangle}\,dF(\boldsymbol{u}), \tag{1.2}$$

де $dF(u)=\mathsf{E}\,|Z(du)|^2$ це так звана спектральна функція розподілу поля $\xi(\boldsymbol{x})$. Якщо міра $F(\cdot)$ є абсолютно неперервною по відношенню до міри Лебега, тобто якщо існує щільність

$$f(\boldsymbol{u})=\frac{\partial^n F(\boldsymbol{u})}{\partial u_1\cdots\partial u_n}, \tag{1.3}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 60G99.

[1] В українській та російській літературі більше відома як теорема Котельнікова–Шеннона

то функція $f(u)$ називається спектральною щільністю. У цьому випад у (1.2) перетворюється у

$$B(r) = \int_{R^n} e^{i(u,r)} f(u)\, du_1 \cdots du_n. \tag{1.4}$$

Неперервне у середньому квадратичному ОВП $\xi(x)$ з дисперсією $\mathsf{D}\xi(x) = B(0) = \sigma^2$ називається полем з обмеженим носієм на смузі, яка визначається частотами w_j, $j = 1, \ldots, n$, якщо

$$B(r) = \int_{-w_1}^{w_1} \cdots \int_{-w_n}^{w_n} e^{i(u,r)}\, dF(u). \tag{1.5}$$

Спектральним розкладом ОВП $\xi(x)$ з обмеженим носієм є

$$\xi(x) = \int_{-w_1}^{w_1} \cdots \int_{-w_n}^{w_n} e^{i(u,r)}\, Z(du). \tag{1.6}$$

Якщо ОВП $\xi(x)$ має обмежений носій, то воно може бути апроксимоване у середньому квадратичному, тобто $\xi(x)$ можна представити лінійною комбінацією $\xi(x^m)$, де x^m позначає точки гратки

$$\mathcal{L}at(W) = \left\{ x^m \colon \left(\frac{\pi m_1}{w_1}, \ldots, \frac{\pi m_n}{w_n} \right), m_k \in \boldsymbol{Z} \right\}. \tag{1.7}$$

Ця лінійна комбінація визначається як

$$\sum_{m=(m_1,\ldots,m_n)} \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}(w_k x_k - \pi m_k)\, \xi(x^m), \tag{1.8}$$

де $\operatorname{sinc}(x) = x^{-1}\sin(x)$, m_k пробігає множину цілих чисел, а вираз (1.8) (так званий розклад вибіркових сум) збігається у середньому квадратичному до ОВП $\xi(x)$ з обмеженим носієм для всіх $x \in \boldsymbol{R}^n$, якщо $F(\cdot)$ є неперервною у точках $(\pm w_1, \ldots, \pm w_n)$ [5, 10, 11]. Багато авторів (й не тільки в інженерній літературі) не вживали це зауваження про неперервність, тому їх розклади не є цілком точними [3, 8, 9, 18]. Проблему неперервності можна усунути підходом Беляєва про більш широку смугу.

Splettstößer розглядав проблеми вибіркової апроксимації для стаціонарних у слабкому розумінні випадкових процесів (не обов'язково з обмеженим носієм) [14]. Він використовував ту властивість неперервних у середньому квадратичному стаціонарних у слабкому розумінні випадкових процесів, що їх корреляційні функції є рівномірно неперервними та обмеженими на $\boldsymbol{R}$. Оскільки похибка апроксимації може бути представлена через корреляційну функцію, Splettstößer отримав свої результати апроксимуючи вирази для корреляційної функції (див. теорему . .2 [14], лему 2.2 з розділу 3 [15]).

Гапошкін знайшов необхідні та достатні умови на спектральну міру випадкового процесу з обмеженим носієм для того, щоб майже напевно виконувалась вибіркова апроксимація. Він не досліджував сигнали з необмеженим носієм та апроксимацію майже напевно однорідних однорідних випадкових полів [2].

Ця робота Гапошкіна та його результати були узагальнені Клесовим на випадок однорідних полів з обмеженим носієм, тобто він отримав умови збіжності для кратних вибіркових рядів. Більше того, були отримані необхідні та достатні умови для відновлення по відліках у середньому квадратичному (див. теорему 1 з роботи [5]). Для гауссових однорідних випадкових полів з обмеженим носієм див. теорему 3 з роботи [5] та роботу [7], де наведені достатні умови. Нарешті, відновлення по відліках у середньому квадратичному розглядалась теоремах 1 та 3 з роботи [5] за деяких умов на корреляційну функцію розглядуваного ОВП.

Відзначимо також, що узагальнення добре відомого результату Беляєва про збіжність майже напевно на випадок ОВП з обмеженим носієм було отримано незалежно Халікуловим [19]. Можна зауважити, що його результат випливає з загальної теореми Клесова (див. [6], стор. 80).

Наш підхід є у деякій мірі іншим. Ми не накладаємо жодної додаткової умови ні на спектральну функцію (або на спектральну міру), ні на гладкість ОВП. У цій роботі ми отримуємо головний результат апроксимуючи ядро $\exp\langle u, x\rangle$ його рядом Фур'є.

Таким чином, нашою метою у цій роботі є узагальнити певним новим чином метод Беляєва, який працює для випадкових процесів з обмеженим носієм, на однорідні випадкові поля з обмеженим та необмеженим носієм.

2. Збіжність майже напевно

Нехай

$$\xi_{m,n}(x) = \sum_{|j|\le m} \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}(\widetilde{w}_k x_k - \pi j_k)\, \xi(x^j). \tag{2.1}$$

Тут $j = (j_1, \ldots, j_n)$, x^j позначає точку з гратки $\mathcal{L}at(W)$, а $|j| \le m$ є скороченням для $|j_k| \le m_k$, $k = 1, \ldots, n$, де m_k — це k-та координата вектора m, а $\widetilde{w}_k > w_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Неважко показати, що

$$\xi(x) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi_{m,n}(x). \tag{2.2}$$

Цей результат для випадкових процесів був отриманий Беляєвим [1]. Перед тим як розглядати збіжність майже напевно, ми отримаємо швидкість збіжності у (2.2). Наступне твердження узагальнює верхню оцінку Беляєва для апроксимації у середньому квадратичному однорідних випадкових полів з обмеженим носієм.

Твердження 1. *Нехай $\xi(x)$ — це ОВП з обмеженим носієм. Тоді*

$$\mathsf{E}\,|\xi(x) - \xi_{m,n}(x)|^2 = O\left(m_+^{-2n}\right), \tag{2.3}$$

де $m_+ = \min_{1\le j\le n}(m_j)$.

Доведення. З (1.6) та (2.1) ясно, що

$$\mathsf{E}\,|\xi(x) - \xi_{m,n}(x)|^2 = \int_{-w_1}^{w_1} \cdots \int_{-w_n}^{w_n} \left| e^{i\langle u,x\rangle} - \sum_{|j|\le m} \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}(\widetilde{w}_k x_k - \pi j_k)\, e^{i\langle u,x\rangle} \right|^2 dF(u).$$

Ми залишаємо читачеві перевірку того, що для всіх $m > 0$ існує абсолютна константа $M > 0$, така, що

$$\begin{aligned}
&\left| e^{i\langle u,x\rangle} - \sum_{|j|\le m} \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}(\widetilde{w}_k x_x - \pi j_k)\, e^{i\langle u,x^j\rangle} \right| \\
&\qquad \le M \prod_{k=1}^{n} \left| e^{iu_k x_k} - \sum_{|j_k|\le m_k} e^{iu_k j_k \pi/\widetilde{w}_k} \operatorname{sinc}(\widetilde{w}_k x_k - \pi j_k) \right|.
\end{aligned}$$

Оскільки [11], [4], [12]

$$\left| \sum_{|a|>b} e^{iau\pi/\widetilde{w}} \operatorname{sinc}(\widetilde{w}x - a\pi) \right| \le \frac{8}{\pi b}\left(1 + \frac{\widetilde{w}|x|}{\pi}\right)\left(1 - \frac{|u|}{\widetilde{w}}\right)^{-1},$$

ми маємо

$$\left| \sum_{|j|>m} e^{i\langle u,x^j\rangle} \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}(\widetilde{w}_k x_k - \pi j_k) \right| \le M \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{w}_k |x_k| + \pi}{m_k (1 - |u_k|/\widetilde{w}_k)}.$$

Нарешті ми отримуємо

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,|\xi(x) - \xi_{m,n}(x)|^2 &= \int_{-w_1}^{w_1} \cdots \int_{-w_n}^{w_n} \left| \sum_{|j|>m} e^{i\langle u,x^j\rangle} \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}(\widetilde{w}_k x_k - \pi j_k) \right|^2 \\ &\le \sigma^2 M^2 \left(\frac{64}{\pi^4}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{(\widetilde{w}_k |x_k| + \pi)^2}{m_k^2 (1 - w_k/\widetilde{w}_k)^2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Це й доводить (2.3). □

Теорема 1. *При зроблених позначеннях*

$$\xi_{m,n}(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi(x) \quad \text{м.н.} \tag{2.5}$$

Доведення. З (2.4) для

$$C(x) = \sigma^2 M^2 \left(\frac{64}{\pi^4}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{(\widetilde{w}_k |x_k| + \pi)^2}{m_k^2 (1 - w_k/\widetilde{w}_k)^2}$$

за допомогою нерівності Чебишева ми можемо легко оцінити ймовірність

$$p_{m,n} = \mathsf{P}\{|\xi(x) - \xi_{m,n}(x)| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathsf{E}\,|\xi(x) - \xi_{m,n}(x)|^2 \le \frac{C(x)}{\varepsilon^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k^2}.$$

Очевидно, що ряд $\sum_{m_+=1}^{\infty} p_{m,n}$ збігається, де $m_+ = \min_{1\le j\le n}(m_j)$. Тепер за лемою Бореля–Кантеллі

$$\mathsf{P}\{|\xi(x) - \xi_{m,n}(x)| \ge \varepsilon \text{ нескінченну кількість раз}\} = 0.$$

Це й завершує доведення теореми. □

Розклади ОВП з необмеженим носієм

У цьому розділі ми розглядаємо клас однорідних випадкових полів, які мають повний спектр (іншими словами, однорідні випадкові поля з необмеженим носієм), тобто такі поля, для яких не існує n-вимірного прямокутника, на якому спектральна міра $Z(\cdot)$ дорівнює 0 тотожно. У цьому випадку ОВП $\xi(x)$ з необмеженим носієм має спектральний розклад вигляду (1.1), а його корреляційна функція $B(r)$ може бути представлена у вигляді (1.2) (або (1.4), якщо існує спектральна щільність $f(u)$).

Позначимо через $\mathbf{I}_A(u)$ характеристичну функцію області $A \subset \boldsymbol{R}^n$. Ми визначаємо лінійне перетворення (або фільтр) L від ОВП $\xi(x)$ з необмеженим носієм як

$$L\xi(x) = L\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\langle u,x\rangle}\, Z(du) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i\langle u,x\rangle}\, \mathbf{I}_\Pi(u)\, Z(du) = \int_{-w_1}^{w_1} \cdots \int_{-w_n}^{w_n} e^{i\langle u,x\rangle}\, Z(du), \tag{3.1}$$

де $\mathbf{I}_\Pi(u)$ це так звана спектральна характеристика фільтру L, а Π — це відкритий n-вимірний куб $\{u = (u_1, \dots, u_n)\colon -w_k < u_k < w_k\}$. Тобто, $L\xi(x)$ є ОВП з обмеженим носієм. Звичайно, якщо $\xi(x)$ визначене на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, то й $L\xi(x)$ визначене на тому ж самому ймовірнісному просторі.

Зрізане інтегральне зображення Фур'є, тобто зображення (3.1), ОВП $\xi(x)$ може бути отримане як відгук ідеального низько частотного фільтру, який застосовується до входу $\xi(x)$. У цій інтерпретації ми отримуємо частковий випадок процесів згортки, розглянутих Splettstößer'ом [15, 16], але ідею такої інтерпретації можна знайти також у роботі Zakai [17].

Мета цього розділу полягає у тому, щоб дати результати про вибіркове відновлення сигналів майже напевно без додаткових умов на спектральну міру ОВП $\xi(x)$ з необмеженим носієм та без умов на гладкість розглядуваного поля (підхід Splettstößer'a з [14]). Наш підхід дозволяє отримати нові результати про відновлення майже напевно ОВП з необмеженим носієм за допомогою ймовірнісних міркувань.

Нехай $\{w_{kj}\}$, $k = 1, \ldots, n$, $j \in \boldsymbol{N}$, це додатні монотонно зростаючі до ∞ дійсні послідовності. Ми маємо наступні факти

(i) послідовність кубів $\Pi(j) = \{u\colon u_k \in [-w_k, w_k], k = 1, \ldots, n$, є зростаючою$\}$,

(ii) $\mathbf{1}_{\Pi(j)} \longrightarrow_{j\to\infty} \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^n}(u) \equiv 1$ поточково по відношенню до u,

(iii) фільтри $\{L_j, j \geq 1\}$ з спектральними характеристиками $\{\mathbf{1}_{\Pi(j)}(x), j \geq 1\}$ мають вигляд

$$L_j\xi(x) = \int_{\Pi(j)} e^{i(u,x)}\, Z(du) \tag{3.2}$$

для ОВП $\xi(x)$ з необмеженим носієм, причому

$$\mathsf{E}\,|\xi(x) - L_j\xi(x)|^2 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.3}$$

За теоремою 1 для ОВП з обмеженим носієм (1.8) ми маємо

$$L_j\xi(x) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_m \prod_{k=1}^{n} \mathrm{sinc}(w_{kj}k_k - \pi m_k) L_j\xi(x). \tag{3.4}$$

Більше того, з (2.2) ми отримуємо

$$L_j\xi(x) = \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, L_j^a\xi(x) \tag{3.5}$$

та

$$L_j^a\xi(x) = \sum_{|m|\leq a} \prod_{k=1}^{n} \mathrm{sinc}\left(\widetilde{w}_{kj}x_k - \pi m_k\right) L_j\xi\left(x^m\right), \tag{3.6}$$

де $\widetilde{w}_{kj} > w_{kj}$, $k = 1, \ldots, n$. Таким чином, теорему про відліки можна застосовувати до послідовності однорідних випадкових полів $\{L_j\xi(x), j \geq 1\}$, які мають обмежені носії. Ця процедура при $j \to \infty$ дає нам теорему про відліки у середньому квадратичному для однорідних випадкових полів з необмеженим носієм.

Оскільки спектральна функція $F(u)$ є неспадною, множина її точок розриву є зліченою. Тому послідовності $\{w_{kj}\}$ та $\{\widetilde{w}_{kj}\}$ можна вибрати таким чином, щоб вони не належали множині точок розриву.

Твердження 2.

$$\xi(x) - L_j\xi(x) \perp L_j\xi(x) - \xi_{m,n}(x), \qquad j, m \in \boldsymbol{N}. \tag{3.7}$$

Доведення. Маємо

$$\mathsf{E}\left[\xi(x) - L_j\xi(x)\right]\left[L_j\xi(x) - \xi_{m,n}(x)\right]^* = \int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} \mathbf{1}_{\Pi(j)}(u)\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^n\setminus\Pi(j)}(u)\ \mathsf{E}\, Z(du)Z^*(u) \equiv 0,$$

що й доводить необхідне твердження. □

Теорема 2. *Нехай* $\xi(x)$ *— це ОВП з необмеженим носієм,* $m = (m_1, \ldots, m_n)$. *Якщо*

a) $\prod_{k=1}^{n} (\widetilde{w}_{kj}/m_k) \longrightarrow 0$ *при* $j, m \to \infty$,

b) $w_{kj}/\widetilde{w}_{kj} \longrightarrow \alpha_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$, *при* $j \to \infty$,

то

$$\mathsf{E}\,|\xi(x) - L_j^m \xi(x)|^2 \underset{j,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.8}$$

Доведення. Неважко показати, що відповідно до (3.7)

$$\mathsf{E}\,|\xi(x) - L_j^m\xi(x)|^2 = \mathsf{E}\,|\xi(x) - L_j\xi(x)|^2 + \mathsf{E}\,|L_j\xi(x) - L_j^m\xi(x)|^2$$
$$\le \int_{\boldsymbol{R}^n} \left(1 - \mathbf{I}_{\Pi(j)}(u)\right)\, dF(u) + \sigma^2 \left(\frac{64}{\pi^4}\right)^n M^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{(\widetilde{w}_{kj}|x_k| + \pi)^2}{m_k^2\,(1 - w_{kj}/\widetilde{w}_{kj})^2}.$$

Позначимо через $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ σ-алгебру борелевих множин з $\boldsymbol{R}^n$. Оскільки $F(\cdot)$ є скінченою борелевою мірою на $\boldsymbol{R}^n$ та $F(B) = \int_B dF(u)$, $B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$, міра $\{\sigma^{-2}F(B)\colon B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)\}$ є ймовірнісною. Поклавши $P\{\cdot\} = \sigma^{-2}F(\cdot)$, ми отримуємо

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_{\boldsymbol{R}^n} \mathbf{I}_{\Pi(j)}(u)\, dF(u) = \frac{1}{\sigma^2} F(\Pi(j)) = P(\Pi(j)).$$

Остаточно ми маємо

$$\mathsf{E}\left|\xi(x) - L_j^m\xi(x)\right|^2 \le \sigma^2 \left(P\left\{\boldsymbol{R}^n \setminus \Pi(j)\right\} + C^*(x) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\widetilde{w}_{kj}}{m_k}\right)^2\right), \tag{3.9}$$

де

$$C^*(x) = \left(\frac{64}{\pi^4}\right)^n M^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(|x_k| + \pi/\widetilde{w}_{k1}\right)^2}{(1 - \alpha_k)^2}.$$

Умови a) та b) дають (3.8) й твердження теореми через те, що $P\left\{\boldsymbol{R}^n \setminus \Pi(j)\right\}$ прямує до 0 при $j \to \infty$ (див. властивість (ii) вище). $\square$

Зауваження. Основним результатом попереднього вивчення полів з необмеженим носієм є верхня оцінка для похибки апроксимації. Цей результат дає корисну оцінку для застосувань. Нерівність (3.9) є узагальненням схожої верхньої оцінки для стаціонарних у слабкому розумінні процесів з необмеженим носієм (див. [11] та [12]). Таким же чином ми виводимо теорему про відліки для однорідних випадкових полів з необмеженим носієм при дуже слабких припущеннях.

Теорема 3. *Існують послідовності частот* $\{w_{kj}\}$ *та розмірів смуги* $\{\widetilde{w}_{kj}\}$, *такі, що*

$$L_j^m\xi(x) \underset{j,m\to\infty}{\longrightarrow} \xi(x) \quad \text{м.н.},$$

де $L_j^m\xi(x)$ *позначає часткову суму розкладу* (3.6).

Доведення. Розглянемо збіжність майже напевно послідовності $L_j^m\xi(x)$ до ОВП $\xi(x)$ з необмеженим носієм. Оскільки

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{m\to\infty} L_j^m\xi(x) = L_j\xi(x)\right\} = 1,$$

(це випадок обмеженого носія, теорема 1), нам необхідно дослідити збіжність майже напевно $L_j\xi(x)$ до $\xi(x)$ при $j \to \infty$. Проте ми маємо

$$\mathsf{E}\,|\xi(x) - L_j\xi(x)|^2 = \sigma^2 P\left\{\boldsymbol{R}^n \setminus \Pi(j)\right\}.$$

У випадку необмеженого носія збіжність майже напевно залежить від вибору послідовностей $\{w_{kj}\}$, $j \in \boldsymbol{N}$, $k = 1, \ldots, n$. Оскільки $\sigma^{-2}F(\cdot)$ є ймовірнісною мірою на $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$, відповідний вибір таких $\{w_{kj}\}$ дає нам

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\{\boldsymbol{R}^n \setminus \Pi(j)\} < \infty$$

й за лемою Бореля–Кантеллі

$$L_j^m \xi(x) \underset{j,m\to\infty}{\longrightarrow} \xi(x) \qquad \text{м.н..} \qquad \square$$

4. Подяка

Автори висловлюють вдячність рецензенту за те, що той звернув їх увагу до робіт Клесова про відновлення за відліками однорідних випадкових полів з обмеженим носієм [5]–[7] та до результату Халікулова [19].

Література

1. Ю. К. Беляев, *Аналитические случайные процессы*, Теория вероятност. и её применен. 3 (1959), № 4, 113–123.
2. В. Ф. Гапошкин, *Одна теорема о сходимости почти везде последовательности измеримых функций и её применения к последовательностям стохастических интегралов*, Матем. сборник **33** (1977), 1–17.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, "Наука", Москва, 1977.
4. O. Gulyaś, *Discretization methods of the continuous parameter processes*, Idösorok analizise (G. Tusnaády and M. Ziermann, eds.), 1986, pp. 119–140. (Hungarian)
5. О. І. Клесов, *Про умови відновлення сигналів по дискретним відлікам*, Доповіді АН УРСР, сер. А, **11** (1983), 15–17.
6. ———, *О сходимости почти наверное рядов Котельникова–Шеннона*, Проблемы передачи информации **20** (1984), № 3, 79–93.
7. ———, *Восстановление гауссова случайного поля с конечным спектром по отсчётам на решетке*, Кибернетика (1985), № 4, 41–46.
8. W. D. Montgomery, *K-order sampling of N-dimensional band-limited functions*, Internat. J. Control **1** (1965), № 1, 7–12.
9. A. Papoulis, *Limits on band-limited signals*, Proc. IEEE **55** (1994), № 10, 1677–1685.
10. E. Parzen, *A simple proof and some extensions of the sampling theorem*, Technical reports **7** (1956), Stanford University, Stanford, CA, 1–7.
11. T. Pogańy, *An approach to the sampling theorem for continuous time processes*, Austral. J. Statist. **31** (1989), № 3, 427–432.
12. T. Pogańy and P. Peruničić, *On the multidimensional sampling theorem*, Glas. Mat. Ser **III** (to appear).
13. B. Szökefalvi-Nagy, *Real analysis and functional series*, Akadémiai Könyvkiado, Budapest, 1972. (Hungarian)
14. W. Splettstößer, *Sampling series approximation of continuous weak sense stationary processes*, Inform. Control **50** (1981), 228–241.
15. ———, *On the approximation of random processes by convolution processes*, Z. Angew. Math. Mech. **61** (1981), 235–241.
16. ———, *Sampling approximation of continuous functions with multidimensional domain*, IEEE Trans. Inform. Theory **5** (1982), № IT-28, 809–814.
17. M. Zakai, *Band-limited functions and the sampling theorem*, Inform. Control **8** (1965), 143–158.
18. М. Й. Ядренко, *Спектральная теория случайных полей*, "Вища школа", Киев, 1980.
19. С. І. Халікулов, *Про апроксимацію однорідних випадкових полів з обмеженим спектром*, Теорія ймовірност. та математ. статист. **50** (1994), 125–128.

Maritime Faculty, University of Rijeka, 51000 Rijeka, Studentska 2, Croatia

Надійшла 10.01.94