Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 149–159

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 149–159

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ УЗАГАЛЬНЕНИХ ВИПАДКОВИХ СЛАБКО ОДНОРІДНИХ ПОЛІВ НА ЯДЕРНИХ ПРОСТОРАХ

УДК 519.21

О. І. ПОНОМАРЕНКО

Резюме. Вводяться узагальнені випадкові поля на локально опуклому просторі $\mathcal{Y}$, що є випадковими лінійними неперервними функціоналами на просторах основних мір на $\mathcal{Y}$, та визначаються основні операції над подібними полями. Вивчаються спектральні розклади одно- та багатовимірних узагальнених однорідних полів на ядерних просторах, лінійні перетворення таких полів та деякі їхні застосування.

1. Вступ

Природним розширенням класів узагальнених стаціонарних процесів і однорідних у широкому розумінні випадкових полів на n-вимірному просторі $\boldsymbol{R}^n$ [1, 2] є клас подібних полів на локально компактних групах [3, 4].

В даній статті розглядається інше розширення таких класів — однорідні у широкому розумінні випадкові поля на ядерних просторах. В п. 2 визначаються узагальнені випадкові поля другого порядку на локально опуклих просторах та основні операції над ними. В п. 3 вивчаються спектральні розклади одновимірних однорідних у широкому розумінні випадкових полів на ядерному просторі $\mathcal{Y}$. У наступному пункті ці результати поширюються на багатовимірні однорідні випадкові поля на $\mathcal{Y}$. У заключному пункті розглядаються лінійні перетворення узагальнених однорідних полів на $\mathcal{Y}$, включаючи поля типу рухомого середнього та деякі задачі оптимальної лінійної фільтрації однорідних полів на $\mathcal{Y}$.

2. Узагальнені випадкові поля на локально опуклих просторах та операції над ними

Нехай $\mathcal{Y}$ — локально опуклий простір, $\mathcal{Y}'$ — його спряжений простір та $\mathfrak{L}(\mathcal{Y}')$ — σ-алгебра, що породжується $\mathcal{Y}'$-циліндричними множинами в $\mathcal{Y}$. Розглянемо лінійний топологічний простір $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, що складається з комплекснозначних мір із скінченною варіацією на вимірному просторі $(\mathcal{Y}, \mathfrak{L}(\mathcal{Y}'))$. Простір $\mathcal{M}$ називається простором основних мір (див. [5], гл. IV, § 3), якщо виконуються такі умови:

1) топологія в $\mathcal{M}$ не слабкіша за топологію τ_f слабкої збіжності, тобто із збіжності $\mu_n \to \mu$ в $\mathcal{M}$ випливає

$$\int_{\mathcal{Y}} f(y)\mu(dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{Y}} f(y)\mu_n(dy), \qquad f \in C_B(\mathcal{Y})$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 60G20, 60G25.

(тут $C_B(\mathcal{Y})$ — простір неперервних обмежених функцій на $\mathcal{Y}$);

2) для кожного $z \in \mathcal{Y}'$ і $\mu \in \mathcal{M}$ маємо $\langle z, y\rangle\mu \in \mathcal{M}$, причому операція множення неперервна відносно z;
3) для кожного $z \in \mathcal{Y}'$ і $\mu \in \mathcal{M}$ маємо $\exp\{i\langle z, y\rangle\}\mu \in \mathcal{M}$ і ця операція множення неперервна відносно z;
4) при кожному $h \in \mathcal{Y}_0$, де $\mathcal{Y}_0$ — деякий підпростір простору $\mathcal{Y}$, операція зсуву $\mu \mapsto \mu_h$: $\mu_h(\Delta) = \mu(\Delta + h)$ визначена та неперервна в $\mathcal{M}$.

Прикладами подібних просторів є простори $\mathcal{M}_1(\mathcal{Y})$, $\mathcal{M}_{1,\infty}(\mathcal{Y})$ (див. [5], гл. IV, § 3).

Простір $\mathcal{M}'$, спряжений до $\mathcal{M}$ з топологією слабкої збіжності, називається простором узагальнених функцій на $\mathcal{Y}$. З умови 1) випливає, що сукупність обмежених неперервних функцій вкладена в $\mathcal{M}'$.

Випадковий неперервний лінійний функціонал другого порядку

$$\Xi \colon \mathcal{M} \mapsto L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}),$$

де $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — деякий імовірнісний простір, будемо називати узагальненим випадковим полем другого порядку на просторі $\mathcal{Y}$. Над узагальненими випадковими полями визначимо такі операції:

а) операцію зсуву на вектор $h \in \mathcal{Y}$: $\Xi_h(\mu) = \Xi(\mu_h)$, $\mu \in \mathcal{M}$;
б) якщо в $\mathcal{M}$ визначена та неперервна операція диференціювання $\mu \mapsto \mu'_h$ вздовж напрямку $h \in \mathcal{Y}$ (див. [5], гл. IV, § 2), то вона визначається і для поля Ξ рівністю
$$\Xi'_h(\mu) = -\Xi(\mu'_h), \qquad \mu \in \mathcal{M};$$
в) якщо функція $\varphi = \varphi(y)$ є мультиплікатором в $\mathcal{M}$, тобто операція $\mu \mapsto \varphi\mu$ неперервна в $\mathcal{M}$, то визначена операція множення $\Xi \mapsto \varphi\Xi$: $(\varphi\Xi)(\mu) = \Xi(\varphi\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$;
г) якщо операція згортки мір залишає $\mathcal{M}$ інваріантним і є неперервною по кожній з мір, то формула
$$(\Xi * \nu)(\mu) = \Xi(\mu * \nu^*), \qquad \nu, \mu \in \mathcal{M},$$
де $\nu^*(\Delta) = \nu(-\Delta)$, визначає згортку $\Xi * \nu$ поля Ξ та основної міри μ.

Надалі до умов 1–4, що визначають простір основних мір, додамо ще умову

5) кожна інваріантна узагальнена функція $\psi \in \mathcal{M}'$, $\langle\psi, \mu\rangle = \langle\psi, \mu_h\rangle$ $\forall h \in \mathcal{Y}$, збігається з константою, $\langle\psi, \mu\rangle = c\mu(\mathcal{Y})$.

Поле другого порядку Ξ на $\mathcal{Y}$ будемо називати слабко однорідним, якщо його середнє $m(\mu) = \mathsf{E}\,\Xi(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$ та корреляційний функціонал $B(\mu, \nu) = \mathsf{E}\,\Xi(\mu)\overline{\Xi(\nu)}$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ інваріантні відносно зсувів, тобто для всіх $h \in \mathcal{Y}$ $m(\mu_h) = m(\mu)$ і $B(\mu_h, \nu_h) = B(\mu, \nu)$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}$.

Зауважимо, що корреляційний функціонал B однорідного поля визначає інваріантне додатно означене узагальнене ядро β на просторі $\mathcal{M}$ рівністю $\langle\beta, \mu\times\nu\rangle = B(\mu, \nu)$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, тобто для всіх $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ і $h \in \mathcal{Y}$

$$\langle\beta, \mu \times \overline{\mu}\rangle \geq 0, \qquad \langle\beta, \mu_h \times \nu_h\rangle = \langle\beta, \mu \times \nu\rangle.$$

Ядро β будемо називати корреляційним ядром поля Ξ.

3. Спектральні розклади одновимірних однорідних полів

Позначимо для локально опуклого простору $\mathcal{Y}$ з топологією α через $\tau_S(\mathcal{Y}, \alpha)$ ядерну топологію в $\mathcal{Y}$, що асоційована з α (див. [5], додаток до гл. 1). **Нагадаємо**, що простір $(\mathcal{Y}, \alpha)$ називається ядерним, якщо $\tau_S(\mathcal{Y}, \alpha) = \alpha$.

Теорема 1. *Нехай простір $\mathcal{Y}$ — ядерний. Тоді якщо корреляційне ядро β слабко однорідного узагальненого поля Ξ неперервне в ядерній топології τ_S простору $\mathcal{M}$ (зокрема, якщо простір $\mathcal{M}$ — ядерний), то поле Ξ дозволяє спектральне зображення*

$$\Xi(\mu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\Phi(dv), \qquad \mu \in \mathcal{M}, \tag{1}$$

де Φ — деяка σ-адитивна в $L_2(\Omega)$ ортогональна випадкова міра на $\mathcal{Y}'$ (випадкова спектральна міра Ξ) і $\hat{\mu}$ — перетворення Фур'є міри μ

$$\hat{\mu}(v) = \int_{\mathcal{Y}} \exp\{i\langle v, y\rangle\}\mu(dy), \qquad v \in \mathcal{Y}'. \tag{2}$$

При цьому корреляційний функціонал B поля Ξ дозволяє спектральне зображення вигляду

$$B(\mu,\nu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)}F(dv), \tag{3}$$

де F — σ-адитивна, взагалі кажучи, σ-скінченна міра на $\mathcal{Y}'$, пов'язана із випадковою спектральною мірою Φ співвідношенням

$$\mathsf{E}\,\Phi(\Delta)\overline{\Phi(\Delta')} = F(\Delta\cap\Delta'), \qquad \Delta,\Delta' \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y}). \tag{4}$$

Ядро β поля Ξ є різницевим, тобто існує така узагальнена функція $\rho \in \mathcal{M}'$ (корреляційна функція поля Ξ), що для всіх $\mu,\nu \in \mathcal{M}$

$$B(\mu, nu) = \langle \beta, \mu \times \overline{\nu}\rangle = \langle \rho, \mu \times \overline{\nu}^*\rangle. \tag{5}$$

Функціонал середнього $m(\mu)$ поля Ξ є сталим, тобто існує така стала c, що

$$m(\mu) = c\mu(\mathcal{Y}) = c\hat{\mu}(0), \qquad \mu \in \mathcal{M}. \tag{6}$$

Доведення. В умовах теореми інтеґральне зображення (3) корреляційного функціонала поля Ξ та різницевість його ядра (5) є наслідками теореми Далецького–Самойленка (див. [5], гл. 4, теорема 4.1; див. також [6]). Рівність (6) є наслідком припущення 5. Розглянемо лінійний підпростір $\mathcal{L}_\Xi = \{\,\Xi(\mu): \mu \in \mathcal{M}\,\}$ в $L_2(\Omega)$ та лінійний підпростір $\hat{\mathcal{M}} = \{\,\hat{\mu}: \mu \in \mathcal{M}\,\}$ в $L_2(\mathcal{Y}', F)$. Введемо в $\mathcal{L}$ та $\hat{\mathcal{M}}$ скалярні добутки

$$(\Xi(\mu) \mid \Xi(\nu))_{\mathcal{L}_\Xi} = (\hat{\mu} \mid \hat{\nu})_{\hat{\mathcal{M}}} = B(\mu,\nu), \tag{7}$$

(у випадку виродженості B попередньо треба взяти фактор-простори по підпросторах в $\mathcal{L}_\Xi$ та $\widehat{\mathcal{M}}$, для яких при відповідних μ функціонал B вироджується, $B(\mu,\mu) = 0$). Нехай H_Ξ і $\mathfrak{H}$ — ґільбертові простори, що є поповненням $\mathcal{L}_\Xi$ та $\widehat{\mathcal{M}}$ відносно добутків (7). Відображення $\hat{\mu} \mapsto \Xi(\mu)$ є ізометричним і дозволяє продовження до ізометричного відображення U простору $\mathfrak{H}$ на H_Ξ. Можуть бути два випадки:

1) $\mathfrak{H} = L_2(\mathcal{Y}', F)$;
2) $\mathfrak{H}$ — власний підпростір $L_2(\mathcal{Y}', F)$.

Розглянемо перший випадок. Простору $\mathfrak{H}$ належать всі індикатори $\mathbf{1}_\Delta(v)$ множин $\Delta \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y})$ із скінченною мірою F. Позначаючи $U(\mathbf{1}_\Delta(v)) = \Phi(\Delta)$, одержуємо адитивну випадкову функцію на цих множинах, яку можна продовжити до випадкової міри Φ на $\mathfrak{L}(\mathcal{Y})$, для якої

$$\mathsf{E}\,\Phi(\Delta)\overline{\Phi(\Delta')} = \int_{\mathcal{Y}'} \mathbf{1}_\Delta(v)\mathbf{1}_{\Delta'}(v)F(dv) = F(\Delta\cap\Delta').$$

Враховуючи, що $\hat{\mu}(v)$ можна як завгодно точно наблизити в $L_2(\mathcal{Y}', F)$ сумами вигляду $\sum_k \hat{\mu}(v_k)\mathbf{1}_{\Delta_k}(v)$, $v_k \in \Delta_k$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, бачимо, що $\Xi(\mu)$ є границею в середньому квадратичному сум $\sum_k \hat{\mu}(v_k)\Phi(\Delta_k)$, тобто за означенням стохастичного інтеґрала справедливе зображення (1).

Розглянемо другий випадок. Нехай $\{g_\theta(v), \theta \in \Theta\}$, де $\Theta \cap \mathcal{M} = \varnothing$ — будь-яка система функцій, повна в $L_2(\mathcal{Y}', F) \ominus \mathfrak{H}$. Тоді існує випадкова функція $\{\Xi(\theta), \theta \in \Theta\}$, для якої

$$\mathsf{E}\,\Xi(\theta_1)\overline{\Xi(\theta_2)} = \int_{\mathcal{Y}'} g_{\theta_1}(v)\overline{g_{\theta_2}(v)}F(dv)$$

і $\mathsf{E}\,\Xi(\mu)\overline{\Xi(\theta)} = 0$ при $\mu \in \mathcal{M}$, $\theta \in \Theta$. Випадкова функція $\Xi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda = \mathcal{M} \cup \Theta$, визначена рівністю $\Xi(\lambda) = \Xi(\mu)$ при $\lambda = \mu \in \mathcal{M}$ і $\Xi(\lambda) = \Xi(\theta)$ при $\lambda = \theta \in \Theta$ має корреляційну функцію

$$b(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathcal{Y}'} f(\lambda_1, v)\overline{f(\lambda_2, v)}F(d\lambda), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda,$$

де $f(\lambda, v) = \hat{\mu}(v)$ при $\lambda = \mu \in \mathcal{M}$ і $f(\lambda, v) = g_\theta(v)$ при $\lambda = \theta \in \Theta$, причому сім'я функцій $\{f(\lambda, v), \lambda \in \Lambda\}$ є повною в $L_2(\mathcal{Y}', F)$. Тоді аналогічно першому випадку існує така випадкова міра Φ на $\mathfrak{L}(\mathcal{Y})$, пов'язана з F співвідношенням (4), що

$$\Xi(\lambda) = \int_{\mathcal{Y}'} f(\lambda, v)\Phi(dv), \qquad \lambda \in \Lambda,$$

звідки при $\lambda \in \mathcal{M}$ маємо зображення (1). Теорему доведено. □

Зауваження. З доведення теореми випливає, що в її умовах кожна випадкова величина η з простору значень H_Ξ узагальненого однорідного поля Ξ на ядерному просторі $\mathcal{Y}$ дозволяє спектральне зображення стохастичним інтеґралом за випадковою спектральною мірою Φ поля Ξ

$$\eta = \int_{\mathcal{Y}'} \varphi_\eta(v)\Phi(dv),$$

де $\varphi_\eta(v)$ — певна функція з $L_2(\mathcal{Y}', F)$, що називається спектральною характеристикою елемента $\eta \in H_\Xi$.

Поле другого порядку $\Xi(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$, будемо називати дійсним, якщо воно збігається із своїм спряженим полем $\overline{\overline{\Xi}}$, де

$$\overline{\overline{\Xi}}(\mu) = \overline{\Xi(\overline{\mu})}, \qquad \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}),$$

тобто $\Xi(\mu) = \overline{\overline{\Xi}}(\mu)$ для всіх $\mu \in \mathcal{M}$. У дійсного поля є дійсним корреляційний функціонал B, тобто

$$B(\mu, \nu) = \overline{B(\overline{\mu}, \overline{\nu})}, \qquad \mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y}).$$

Теорема 2. *Нехай узагальнене слабко однорідне випадкове поле $\Xi(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, на ядерному просторі має корреляційне ядро, неперервне відносно ядерної топології τ_S в $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$, та простір $\widehat{\mathcal{M}}(\mathcal{Y}')$ є скрізь щільним в $L_2(\mathcal{Y}', F)$, де F — спектральна міра Ξ. Тоді поле $\Xi(\mu)$ є дійсним тоді і лише тоді, коли його випадкова спектральна міра Φ є ермітово симетричною на $\mathfrak{L}(\mathcal{Y})$, $\Phi(\Delta) = \overline{\Phi(-\Delta)}$. При цьому міра F є симетричною на $\mathfrak{L}(\mathcal{Y})$, $F(\Delta) = F(-\Delta)$.*

Доведення. Легко перевірити, що для міри $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$ виконується рівність $\hat{\overline{\mu}}(v) = \overline{\hat{\mu}(-v)}$, $v \in \mathcal{Y}'$. Тоді з рівності $\Xi(\mu) = \overline{\overline{\Xi}}(\mu)$ випливає

$$\int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\Phi(dv) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\Phi(d(-v))} = \overline{\Xi(\overline{\mu})}, \qquad \mu \in \mathcal{M}, \tag{8}$$

звідки маємо $\Phi(\Delta) = \overline{\Phi(-\Delta)}$, $\Delta \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y})$. Навпаки, якщо Φ є ермітово симетричною, то виконується рівність (8), тобто $\Xi(\mu) = \overline{\Xi}(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$. Аналогічно до попереднього через дійсність корреляційного функціонала B дійсного поля при довільних $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$ виконується рівність

$$\overline{B(\overline{\mu}, \overline{\nu})} = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)} F(d(-v)) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)} F(dv),$$

звідки $F(\Delta) = F(-\Delta)$, $\Delta \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y})$. Теорему доведено. □

Розглянемо тепер зв'язок між узагальненими та звичайними випадковими однорідними полями на ядерних просторах.

Звичайне випадкове поле $\xi : \mathcal{Y} \mapsto L_2(\Omega)$ другого порядку на локально опуклому просторі $(\mathcal{Y}, \alpha)$ з топологією α, узгодженою з двоїстістю $\mathcal{Y}$ та $\mathcal{Y}'$, називається слабко однорідним, якщо воно має постійне середнє $\mathsf{E}\xi(y) = m$, $y \in \mathcal{Y}$, та корреляційну функцію B_ξ, що залежить тільки від різниці аргументів

$$\mathsf{E}\xi(y)\overline{\xi(x)} = B_\xi(y - x), \qquad y, x \in \mathcal{Y}.$$

Якщо виконується умова

а) простір $\mathcal{Y}$ є ядерним і випадкове поле $\xi(y)$, $y \in \mathcal{Y}$, неперервне у середньому квадратичному,

то справедливе наступне твердження, що уточнює для розглянутого випадку загальний результат про спектральні зображення однорідних випадкових полів на лінійних просторах з [7].

Теорема 3. *При умові* а) *однорідне поле* $\xi(y)$, $y \in \mathcal{Y}$, *та його корреляційна функція дозволяють такі спектральні зображення:*

$$\xi(y) = \int_{\mathcal{Y}'} \exp\{i\langle v, y\rangle\} \Phi_\xi(dv), \tag{9}$$

$$B_\xi(y) = \int_{\mathcal{Y}'} \exp\{i\langle v, y\rangle\} F_\xi(dv), \tag{10}$$

де F_ξ *— скінченна* σ*-адитивна невід'ємна міра на* $(\mathcal{Y}', \mathfrak{L}(\mathcal{Y}))$ (*спектральна міра* ξ), *а* Φ_ξ *—* σ*-адитивна ортогональна випадкова міра на* $(\mathcal{Y}', \mathfrak{L}(\mathcal{Y}))$ (*випадкова спектральна міра* ξ), *причому*

$$\mathsf{E}\,\Phi_\xi(\Delta)\overline{\Phi_\xi(\Delta')} = F_\xi(\Delta \cap \Delta'), \qquad \Delta, \Delta' \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y}).$$

Доведення. Нехай H_ξ — простір значень поля ξ, тобто підпростір $L_2(\Omega)$, породжений випадковими величинами $\{\xi(y), y \in \mathcal{Y}\}$. Тоді через однорідність поля ξ сім'ю операторів зсуву $\{U_y, y \in \mathcal{Y}\}$ значень поля ξ,

$$U_y\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \xi(x_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \xi(x_j + y), \qquad a_j \in \boldsymbol{C}, \quad x_j \in \mathcal{Y},$$

можна продовжити до унітарного неперервного зображення в гільбертовому просторі H_ξ простору $\mathcal{Y}$, що розглядається як топологічна адитивна група, тобто

$$U_{x+y} = U_x U_y, \qquad U_0 = I, \qquad U_y^* = U_y^{-1} = U_{-y}.$$

За теоремою 1.4, гл. III з [5] тоді справедливий спектральний розклад

$$U_y = \int_{\mathcal{Y}'} \exp\{i\langle v, y\rangle\} E(dv),$$

де E — сильно σ-адитивна ортоґональна проекторнозначна міра з H_ξ, звідки через рівності $\xi(y) = U_y\xi(0)$, $B_\xi(y) = \mathsf{E}(U_y\xi(0))\overline{\xi(0)}$ негайно випливають зображення (9), (10). Теорему доведено. □

Зауваження. З наведеного доведення та теореми 1.4, гл. III з [5] випливає, що спектральні зображення (9), (10) зберігаються у випадку, коли замість умови а) вважається, що $\mathcal{Y}$ — локально опуклий простір і поле $\xi(y)$ неперервне в середньому квадратичному в ядерній топології $\tau_S(\mathcal{Y}, \alpha)$.

Наступна теорема дає умову регулярності узагальненого однорідного поля в ядерному просторі $\mathcal{Y}$, який ми будемо вважати сепарабельним для спрощення формулювання результатів.

Теорема 4. I. *Якщо виконуються умови теореми* 3, *то звичайне слабко однорідне поле* $\xi(y)$, $y \in \mathcal{Y}$, *породжує узагальнене слабко однорідне поле* Ξ_ξ,

$$\Xi_\xi(\mu) = \int_{\mathcal{Y}} \xi(y)\mu(dy), \qquad \mu \in \mathcal{M}, \tag{11}$$

із скінченною спектральною мірою F_ξ.

II. *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і спектральна міра* F *узагальненого однорідного поля* Ξ *є скінченною, то це поле породжується звичайним однорідним полем* $\xi(y)$ *вигляду*

$$\xi(y) = \int_{\mathcal{Y}'} \exp\{i\langle v, y\rangle\}\Phi(dv),$$

де Φ — *випадкова спектральна міра поля* Ξ.

Доведення. Твердження I випливає з того, що інтнґрал (11) є неперервним в середньому квадратичному лінійним випадковим функціоналом в просторі $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$, для якого виконуються рівності

$$\mathsf{E}\,\Xi_\xi(\mu) = \int_{\mathcal{Y}} (\mathsf{E}\,\xi(y))\mu(dy),$$

$$\mathsf{E}\,\Xi_\xi(\mu)\overline{\Xi_\xi(\nu)} = \int_{\mathcal{Y}}\int_{\mathcal{Y}} B_\xi(y - x)\mu(dy)\nu(dx).$$

Твердження II випливає з рівності

$$\Xi_\xi(\mu) = \int_{\mathcal{Y}} \left\{ \int_{\mathcal{Y}'} \exp\{i\langle v, y\rangle\}\Phi(dv) \right\} \mu(dy) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\Phi(dv) = \Xi(\mu), \qquad \mu \in \mathcal{M}.$$

Теорему доведено. □

4. Багатовимірні узагальнені однорідні поля на ядерному просторі

Багатовимірним узагальненим випадковим полем другого порядку $\boldsymbol{\Xi}(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$, на локально опуклому просторі $\mathcal{Y}$ називається лінійне неперервне відображення

$$\boldsymbol{\Xi}\colon \mathcal{M}(\mathcal{Y}) \mapsto (L_2(\Omega))^n,$$

тобто $\boldsymbol{\Xi}(\mu) = \{\Xi_j(\mu)\}_{j=1}^n$, де j-та компонента $\Xi_j(\mu)$ є скалярним узагальненим полем другого порядку.

Позначимо через $\mathfrak{M}(\mu)$ векторну функцію середніх значень поля $\boldsymbol{\Xi}(\mu)$, $\mathfrak{M}(\mu) = \{\mathsf{E}\,\Xi_j(\mu)\}_{j=1}^n$, і через $\mathcal{B}(\mu, \nu)$ матрицю корреляційних функціоналів поля

$$\mathcal{B}(\mu, \nu) = \left\{\mathsf{E}\,\Xi_j(\mu)\overline{\Xi_r(\nu)} = B_{jr}(\mu, \nu)\right\}_{j,r=1}^n.$$

Зауважимо, що $B(\mu,\nu)$ має властивість сильної додатної визначеності: для довільних натуральних n і m, довільних комплексних чисел a_{jr}, $1 \le j \le n$, $1 \le r \le m$, і довільних мір $\mu_j \in \mathcal{M}$, $1 \le j \le m$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{m} B_{jk}(\mu_r, \mu_s) a_{ir} \overline{a_{ks}} \ge 0. \tag{12}$$

З властивості (12) випливає додатна визначеність для довільного вектора

$$a = \{a_j\}_{j=1}^{n} \in C^n$$

білінійного функціонала

$$B^a(\mu,\nu) = \sum_{j,k=1}^{n} a_j \overline{a_k} B_{jk}(\mu,\nu).$$

Слабка однорідність багатовимірного поля $\Xi(\mu) = \{\Xi_j(\mu)\}_{j=1}^{n}$ означає, що всі його компоненти є слабко однорідними полями на $\mathcal{Y}$ і, крім того, вони однорідно пов'язані між собою, тобто всі білінійні функціонали $B_{jr}(\mu,\nu) = \mathsf{E}\,\Xi_j(\mu)\overline{\Xi_r(\nu)}$ інваріантні відносно всіх зсувів на $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$.

Теорема 5. *Нехай $\mathcal{Y}$ — ядерний простір. Якщо елементи матриці корреляційних функціоналів $B(\mu,\nu)$ слабко однорідного поля $\Xi(\mu) = \{\Xi_j(\mu)\}_{j=1}^{n}$ неперервні в ядерній топології τ_S простору $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ (зокрема, якщо простір $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ — ядерний), то поле $\Xi(\mu)$ дозволяє спектральне зображення вигляду*

$$\Xi(\mu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v) \Phi(dv),$$

де $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=1}^{r}$ — векторнозначна ортогональна σ-адитивна випадкова міра на $\mathfrak{L}(\mathcal{Y})$, а матриця корреляційних функціоналів $B(\mu,\nu)$ поля $\Xi(\mu)$ дозволяє спектральне зображення вигляду

$$B(\mu,\nu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v) \overline{\hat{\nu}(v)} \mathfrak{F}(dv),$$

де $\mathfrak{F}$ — матричнозначна міра на $\mathfrak{L}(\mathcal{Y})$, $\mathfrak{F} = \{F_{jr}\}_{j,r=1}^{n}$, така, що при довільних $\Delta, \Delta' \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y})$ і $j, r \in \{1,\dots,n\}$

$$\mathsf{E}\,\Phi_j(\Delta)\overline{\Phi_r(\Delta')} = F_{jr}(\Delta \cap \Delta').$$

При цьому для довільного $\Delta \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y})$ матриця $\mathfrak{F}(\Delta)$ є ермітовою невід'ємною і виконуються співвідношення

$$F_{jr}(\Delta) = \frac{1}{2}\big[F^{a'}(\Delta) - iF^{a''}(\Delta) - (1-i)(F_{jj}(\Delta) + F_{rr}(\Delta))\big],$$

де F^a — спектральна міра одновимірного узагальненого однорідного поля $\Xi^a(\mu) = \sum_{j=1}^{n} a_j \Xi_j(\mu)$, $a = (a_j)_{j=1}^{n}$, а $a'_j = 1$, $a'_r = 1$ і $a'_k = 0$ при $k \ne j, r$ і $a''_j = 1$, $a''_r = 1$ і $a''_k = 0$ при $k \ne j, r$.

Доведення цієї теореми подібне до доведення спорідненої теореми 2 з [8]. □

5. Лінійні перетворення узагальнених однорідних полів на ядерному просторі

Узагальнене поле $\Xi_2(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, на ядерному просторі $\mathcal{Y}$ будемо називати лінійним перетворенням узагальненого однорідного поля $\Xi_1(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, з випадковою спектральною мірою Φ_1 та спектральною мірою F_1, якщо існує така $\mathfrak{L}(\mathcal{Y})$-вимірна функція $\varphi(v)$, $v \in \mathcal{Y}'$, що для всіх $\mu \in \mathcal{M}$ $\hat{\mu}(v)\varphi(v) \in L_2(\mathcal{Y}', F_1)$ і

$$\Xi_2(\mu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\varphi(v)\Phi_1(dv), \qquad \mu \in \mathcal{M}. \tag{13}$$

Теорема 6. *Лінійне перетворення Ξ_2 однорідного поля Ξ_1 є корреляційно однорідним полем, що однорідно пов'язане з полем Ξ_1. При цьому випадкова спектральна міра Φ_2 та спектральна міра F_2 поля Ξ_2, а також взаємна спектральна міра F_{21} полів Ξ_2 і Ξ_1 пов'язані з спектральними мірами Φ_1 і F_1 поля Ξ_1 формулами*

$$\Phi_2(dv) = \varphi(dv)\Phi_1(dv), \qquad F_2(dv) = |\varphi(v)|^2 F_1(dv), \qquad F_{21}(dv) = \varphi(v)F_1(dv). \tag{14}$$

Доведення. Оскільки $\hat{\mu}_h(v) = \exp\{-i\langle v, h\rangle\}\hat{\mu}(v)$, $h \in \mathcal{Y}$, $v \in \mathcal{Y}'$, то маємо, що поле $\zeta(h) = \Xi_2(\mu_h)$, $h \in \mathcal{Y}$, при фіксованій мірі μ є неперервним корреляційно однорідним полем, яке має зображення

$$\zeta(h) = \int_{\mathcal{Y}'} \exp\{-i\langle v, h\rangle\}\Phi_\zeta(dv)$$

з випадковою спектральною мірою $\Phi_\zeta(dv) = \hat{\mu}(v)\varphi(v)\Phi_2(dv)$. Звідси при будь-яких $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, $h \in \mathcal{Y}$

$$\mathsf{E}\,\zeta(\mu_h)\overline{\zeta(\nu_h)} = \mathsf{E}\,\zeta(\mu)\overline{\zeta(\nu)} = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)}|\varphi(v)|^2 F_1(dv),$$
$$\mathsf{E}\,\zeta(\mu_h)\overline{\zeta(\nu_h)} = \mathsf{E}\,\zeta(\mu)\overline{\zeta(\nu)} = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)}\varphi(v)F_1(dv).$$

Твердження теореми випливає з (13) та одержаних рівностей. $\square$

Теорема 7. *Нехай $\varphi(v)$, $v \in \mathcal{Y}'$ — така функція, що при всіх $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$ $\hat{\mu}(v)\varphi(v) \in L_2(\mathcal{Y}', F_1)$. Тоді якщо $\Xi_2(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$ є корреляційно однорідним полем, яке однорідно пов'язане з полем Ξ_1, та його спектральні міри F_2 і F_{21} задовольняють останні рівності в (14), то поле $\Xi_2(\mu)$ є лінійним перетворенням поля $\Xi_1(\mu)$ із спектральною характеристикою $\varphi(v)$.*

Доведення. Визначимо допоміжне узагальнене поле

$$\Xi_3(\mu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\varphi(v)\Phi_1(dv)$$

з корреляційним функціоналом

$$B_3(\mu, \nu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)}|\varphi(v)|^2 F_1(dv) = B_{\Xi_2}(\mu, \nu).$$

Очевидно, що випадкові величини $\Xi_3(\mu)$ належать простору значень H_{Ξ_1} поля Ξ_1 і утворюють його лінійний підпростір $\mathcal{L}_{\Xi_3} = \{\Xi_3(\mu)\colon \mu \in \mathcal{M}\}$. Розглянемо оператор T, що визначається на $\mathcal{L}_{\Xi_3}$ і $\mathcal{L}_{\Xi_1}$ рівностями $T(\Xi_3(\mu)) = \Xi_2(\mu)$, $T(\Xi_1(\mu)) = \Xi_1(\mu)$.

Цей оператор через рівності (14) є ізометричним на $\mathcal{L}_{\Xi_3} \cup \mathcal{L}_{\Xi_1}$, бо

$$\left(T(\Xi_3(\mu)) \mid T(\Xi_3(\nu))\right)_{L_2(\Omega)} = (\Xi_3(\mu) \mid \Xi_3(\nu))_{L_2(\Omega)} = (\Xi_2(\mu) \mid \Xi_2(\nu))_{L_2(\Omega)},$$

$$\left(T(\Xi_3(\mu)) \mid T(\Xi_1(\nu))\right)_{L_2(\Omega)} = (\Xi_3(\mu) \mid \Xi_1(\nu))_{L_2(\Omega)} = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)}\varphi(v)F_1(dv).$$

Отже, його можна продовжити на весь простір H_{Ξ_1} із збереженням ізометричності. Оскільки на множині $\mathcal{L}_{\Xi_1}$, що є скрізь щільною в H_{Ξ_1}, він тотожній, то $\Xi_3(\mu) = \Xi_2(\mu)$ для всіх $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$. □

Поняття лінійного перетворення легко поширити на багатовимірні узагальнені однорідні поля. Будемо говорити, що однорідне поле $\Xi^2(\mu) = \{\Xi_j^2(\mu)\}_{j=1}^m$ одержується з однорідного поля $\Xi^1(\mu) = \{\Xi_r^1(\mu)\}_{r=1}^n$ з випадковою спектральною мірою $\mathbf{\Phi}_1 = \{\Phi_r^1\}_{r=1}^n$ та спектральною мірою $\mathfrak{F}^1 = \{F_{jr}\}_{j,r=1}^n$ лінійним перетворенням, якщо

$$\Xi^2(\mu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\varphi(v)\mathbf{\Phi}^1(dv), \tag{15}$$

де матрична функція $\varphi(v) = \{\varphi_{jr}(v)\}_{j=1,m}^{r=1,n}$ (спектральна характеристика перетворення) задовольняє умову $\{\hat{\mu}(v)\varphi_{jr}(v)\}^{r=1,n} \in L_2(\mathcal{Y}', \mathfrak{F}^1)$, де $L_2(\mathcal{Y}', \mathfrak{F}^1)$ — простір таких вимірних вектор-функцій $g = \{g_r\}^{r=1,n}$ на $\mathcal{Y}'$, які інтерпретуються як вектор-рядки, що

$$\int_{\mathcal{Y}'} g(v)\mathfrak{F}^1(dv)g^*(v) < \infty$$

(див. щодо опису подібних просторів [3, 8]).

З (15) випливає, що компоненти однорідних полів Ξ^1 і Ξ^2 однорідно пов'язані. Нехай $G = \{G_{jr}\}_{j=1,m}^{r=1,n}$ — матриця взаємних спектральних мір цих полів, $G_{jr}(\Delta \cap \Delta') = \mathsf{E}\,\Phi_j^1(\delta)\overline{\Phi_r^2(\Delta')}$ і $\mathfrak{F}^2 = \{F_{jr}^2\}_{j,r=1}^m$ — матриця спектральних мір поля Ξ^2. Тоді подібно до розглянутого вище випадку скалярних полів, справедлива така теорема.

Теорема 8. *Якщо поле $\Xi^2(\mu)$ є лінійним перетворенням поля $\Xi^1(\mu)$ із спектральною характеристикою $\varphi(v)$, то*

$$\mathfrak{F}^2(dv) = \varphi(v)\mathfrak{F}^1(dv)\varphi^*(v), \qquad G(dv) = \varphi(v)\mathfrak{F}^1(dv). \tag{16}$$

Навпаки, якщо виконуються рівності (16) *для однорідних та однорідно пов'язаних полів $\Xi^1(\mu)$ та $\Xi^2(\mu)$, то поле $\Xi^2(\mu)$ є лінійним перетворенням поля $\Xi^1(\mu)$ із спектральною характеристикою $\varphi(v)$.*

Наведемо декілька важливих прикладів лінійних перетворень.

Приклад 1 (перетворення рухомого середнього). Нехай $\Xi_1(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, — скалярне однорідне поле на сепарабельному ядерному просторі $\mathcal{Y}$, виконуються умови теореми 1, λ — σ-скінченна міра на $\mathfrak{L}(\mathcal{Y}')$ і функція $c(h) \in L_1(\mathcal{Y}, \lambda)$. Поле $\Xi_2(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$, будемо називати рухомим середнім поля $\Xi_1(\mu)$, якщо воно має вигляд

$$\Xi_2(\mu) = \int_{\mathcal{Y}} c(h)\Xi_1(\mu_{-h})\lambda(dh), \tag{17}$$

де інтеграл розуміється як інтеграл Бохнера. Існування інтеграла (17) випливає з того, що $\zeta(h) = \Xi_1(\mu_{-h})$, $h \in \mathcal{Y}$, є неперервним однорідним полем з випадковою спектральною мірою $\Phi_\zeta(dv) = \hat{\mu}(v)\Phi_1(dv)$, де Φ_1 — випадкова спектральна міра поля Ξ_1. З вказаного вище випливає

$$\Xi_2(\mu) = \int_{\mathcal{Y}} c(h) \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v) \exp\{i\langle v, h\rangle\}\Phi_1(dv)\lambda(dh)$$
$$= \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\left\{\int_{\mathcal{Y}} \exp\{i\langle v, h\rangle\}c(h)\lambda(dh)\right\}\Phi_1(dv).$$

Приклад 2 (фільтрація поля за його спостереженнями з адитивним некоррельованим шумом). Нехай $\Xi_1(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$ — однорідне поле, для якого виконуються умови теореми 1, і λ — σ-скінченна міра на $\mathcal{L}(\mathcal{Y})$, відносно якої абсолютно неперервна спектральна міра F_1 поля Ξ_1. Щільність $dF_1(v)/d\lambda = f_1(v)$ будемо називати спектральною щільністю поля Ξ_1 відносно λ. Нехай також $\Xi_2(\mu)$ — однорідне поле із спектральною щільністю $f_2(v)$ відносно λ, ортогональне полю Ξ_1, $\mathsf{E}\,\Xi_1(\mu)\overline{\Xi_2(\nu)} = 0$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, і спостерігається поле $\Xi_3(\mu) = \Xi_1(\mu) + \Xi_2(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$. Потрібно знайти оптимальну в середньому квадратичному лінійну оцінку $\hat{\Xi}_1(\mu)$ значення $\Xi_1(\mu)$ поля Ξ_1.

Із зауваження до теореми 1 випливає, що оптимальну оцінку $\hat{\Xi}_1(\mu)$ можна шукати у вигляді лінійного перетворення поля Ξ_3 з невідомою спектральною характеристикою $\varphi(v)$, $v \in \mathcal{Y}'$. Якщо елемент $\eta \in H_{\Xi_3}$ має спектральну характеристику $\psi(v)\hat{\mu}(v)$, то

$$\mathsf{E}\,|\Xi_1(\mu) - \eta|^2 = \int_{\mathcal{Y}'} |\hat{\mu}(v)|^2 \big[(1 - \psi(v))^2 f_1(v) + |\psi(v)|^2 f_2(v)\big]\lambda(dv).$$

Неважко переконатися, що останній вираз набуває найменшого значення при

$$\psi(v) = \varphi(v) = \frac{f_1(v)}{f_1(v) + f_2(v)}.$$

При цьому похибка $\sigma_\mu^2 = \mathsf{E}\,|\Xi_1(\mu) - \hat{\Xi}_1(\mu)|^2$ оптимальної оцінки задається виразом

$$\sigma_\mu^2 = \int_{\mathcal{Y}'} \frac{|\hat{\mu}(v)|^2 f_1(v) f_2(v)}{f_1(v) + f_2(v)}\lambda(dv).$$

Приклад 3 (фільтрація для випадку коррельованого шуму). В більш загальному, ніж у попередньому прикладі, випадку, сигнал $\Xi_1(\mu)$ та шум $\Xi_2(\mu)$ утворюють двовимірне однорідне поле $(\Xi_1(\mu), \Xi_2(\mu))$, мають спектральні щільності відносно λ і взаємну спектральну щільність $f_{21}(\lambda)$, тобто

$$\mathsf{E}\,\Xi_2(\mu)\overline{\Xi_1(\nu)} = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)\overline{\hat{\nu}(v)} f_{21}(v)\lambda(dv).$$

Потрібно за спостереженнями поля $\Xi_3(\mu) = \Xi_1(\mu) + \Xi_2(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}$, знайти оптимальну лінійну оцінку $\hat{\Xi}_1(\mu)$ значення $\Xi_1(\mu)$. Якщо $\psi(v)\hat{\mu}(v)$ — спектральна характеристика елемента $\zeta \in H_{\Xi_3}$, то

$$\mathsf{E}\,|\Xi_1(\mu) - \zeta|^2 = \int_{\mathcal{Y}'} |\hat{\mu}(v)|^2 \big[f_1(v) + |\psi(v)|^2 f_2(v) - 2\,\mathrm{Re}\,\psi(v) f_{21}(v)\big]\lambda(dv).$$

Оскільки останній вираз набуває найменшого значення при

$$\psi(v) = f_{21}(v)/f_2(v),$$

то оптимальна оцінка $\hat{\Xi}_1(\mu)$ є лінійним перетворенням поля Ξ_3 вигляду

$$\hat{\Xi}_1(\mu) = \int_{\mathcal{Y}'} \hat{\mu}(v)(f_{21}(v)/f_2(v))\Phi_3(dv).$$

При цьому середньоквадратична похибка оптимальної фільтрації σ_μ^2 задається виразом

$$\sigma_\mu^2 = \int_{\mathcal{Y}'} |\hat{\mu}|^2 \frac{f_2(v)f_1(v) - |f_{21}(v)|^2}{f_2(v)} \lambda(dv).$$

Література

1. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, "Физматгиз", Москва, 1961.
2. А. М. Яглом, *Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам*, Теория вероятностей и ее применения **2** (1957), № 3, 292–338.
3. А. И. Пономаренко, *Гармонический анализ обобщенных однородных в широком смысле случайных полей на коммутативной локально компактной группе*, Теория вероятностей и математическая статистика (1970), № 3, 117–134.
4. ———, *Обобщенные случайные поля второго порядка на локально компактных группах*, Теория вероятност. и математ. статист. (1983), № 29, 100–109.
5. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, "Наука", Москва, 1983.
6. Ю. Л. Далецкий, Ю. С. Самойленко, *Спектральное разложение положительно определенных бираспределений*, Доклады АН СССР **213** (1973), № 3, 515–518.
7. А. И. Пономаренко, *Спектральное представление некоторых классов бесконечномерных однородных случайных полей*, Математический сборник, "Наукова думка", Киев, 1976, стор. 37–39.
8. ———, *Спектральний аналіз квазіінваріантних випадкових розподілів на гільбертових просторах*, Теорія ймовірност. та математ. статист. (1994), № 51.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 25.03.94