Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 160–167

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 160–167

ПРО СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

УДК 519.21

М. Л. СВЕРДАН ТА Є. Ф. ЦАРКОВ

Резюме. Розглядаються питання дослідження на стійкість лінійних імпульсних стохастичних систем, доводяться теореми про необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості тривіального розв'язку згаданих вище систем у середньому квадратичному.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння в $\boldsymbol{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = A(\xi(t))x \tag{1}$$

де $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — однорідний феллерівський марковський процес на компакті $\mathbb{Y}$, $\{A(y), y \in \mathbb{Y}\}$ — неперервна матрична функція. Припустимо, що розв'язок (1) в моменти часу $t_k = k\Delta$, $k \in \boldsymbol{N}$, задовольняє умову

$$x(t_k + 0) = B(\eta_k)x(t_k), \tag{2}$$

де $\{\eta_k, k \in \boldsymbol{N}\}$ — феллерівський однорідний ланцюг Маркова на компакті $\mathbb{H}$, не залежний від $\{\xi(t)\}$. Домовимось вважати розв'язком (1), (2) на відрізку $[t_0, T]$ випадковий процес, який задовольняє (1) в кожному інтервалі $(t_k, t_{k+1}) \subset [t_0, T]$, продовжений за неперервністю зліва в точки $t_{k+1} \in (t_0, T)$ і задовольняє (2) в моменти часу $t_k \in [t_0, T]$.

Співвідношення типу (2) називають [1] імпульсним впливом на диференціальне рівняння (1).

Легко переконатись у тому, що для довільних $x \in \boldsymbol{R}^n$ і $s \geq 0$ існує єдиний випадковий процес, який задовольняє умову

$$x(s) = x \tag{3}$$

і систему (1), (2) при всіх $t \geq s$. Цей випадковий процес назвемо розв'язком (1)–(3) на півінтервалі $[s, \infty)$ і позначимо $x(t, s, x)$. Тривіальний розв'язок (1), (2) назвемо експоненціально стійким у середньому квадратичному, якщо для всіх $t > s \geq 0$ і $x \in \boldsymbol{R}^n$ виконується нерівність

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}, h \in \mathbb{H}} \mathsf{E}^{s,l}_{y,h}\{|x(t,s,x)|^2\} \leq Me^{-\gamma(t-s)}|x|^2 \tag{4}$$

для деяких $M > 0$ і $\gamma > 0$. Тут і далі індекси y і h біля математичного сподівання або ймовірності означають умову $\xi(s) = y$, $\eta_l = h$, де $l = [s/\Delta]$, $[a]$ — ціла частина числа a.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, 34F05; Secondary 34G20.

Для дослідження експоненціальної стійкості тривіального розв'язку (1), (2) застосуємо метод, запропонований для диференціальних рівнянь з марковськими коефіцієнтами в роботі [2]. Нехай $M_n(\boldsymbol{R})$ — простір матриць розміру $n \times n$ з дійсними коефіцієнтами, $\widetilde{M}_n(\boldsymbol{R})$ — підпростір симетричних матриць, $\mathbb{V}$ — простір неперервних відображень $\mathbb{Y} \times \mathbb{H}$ в $\widetilde{M}_n(\boldsymbol{R})$,

$$\mathbb{K} = \{\, q \in \mathbb{V} \colon x^T q(y,h) x \geq 0,\ \forall\, y \in \mathbb{Y},\ \forall h \in \mathbb{H},\ \forall\, x \in \boldsymbol{R}^n \,\},$$

$\overset{\circ}{\mathbb{K}}$ — множина внутрішніх точок $\mathbb{K}$. Визначимо оператор

$$[Aq](y,h) = \mathsf{E}^{s,l}_{y,h}\{X^T(t_{k+1},t_k)B^T(\eta_k)q[\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1}]B(\eta_k)X^T(t_{k+1},t_k)\}, \tag{5}$$

де $X(t,s)$ — матриця Коші (1), тобто матричний розв'язок (1), який задовольняє умову $X(s,s) = \mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ — одиниця в $M_n(\boldsymbol{R})$.

З однорідності процесу $\xi(t)$ і ланцюга η_k випливає незалежність правої частини (5) від $k \in \boldsymbol{N}$, а з їх феллеровості і компактності $\mathbb{Y} \times \mathbb{H}$ — включення $A \in L(\mathbb{V})$.

Як легко переконатися, послідовність $\{x(t_k),\xi(t_k),\eta_k, k \in \boldsymbol{N}\}$ утворює ланцюг Маркова на $\boldsymbol{R}^n \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H}$. Тут і далі $\{x(t)\}$ означає сукупність випадкових процесів, які визначаються співвідношеннями (1) і (2). Умовні ймовірності подій вигляду $x(t_{k+1}) \in C$ при фіксованих $x(t_k) = x$, $\xi(t_k) = y$, $\eta_k = h$ у відповідності з прийнятими раніше позначеннями можна записати у формі

$$\mathsf{P}[x(t_{k+1}) \in C/x,y,h] = \mathsf{P}^{s,l}_{y,h}[x(t_{k+1},t_k,x) \in C]. \tag{6}$$

Лема 1. *Якщо нерівність* (4) *виконується при всіх* $s \in (t_k, k \in \boldsymbol{N})$ *і* $t \in (t_k, k \in \boldsymbol{N})$, $t > s$, *то тривіальний розв'язок* (1), (2) *експоненціально стійкий у середньому квадратичному.*

Доведення. Нехай $s \in (t_k, t_{k+1})$, $t \in (t_m, t_{m+1})$, $m > k$. Позначивши

$$a = \sup_{y\in\mathbb{Y}} e^{2\|A\|\Delta}, \qquad b = \sup_{h\in\mathbb{H}} \|B(h)\|^2,$$

легко отримати оцінки

$$\begin{gathered} |x(t_{k+1},s,x)|^2 \leq a, \\ |x(t,t_m,x(t_m,s,x))|^2 \leq ab|x(t_m,s,x)|^2, \end{gathered} \tag{7}$$

В силу марковської властивості послідовності $\{x(t_k),\xi(t_k),\eta_k, k \in \boldsymbol{N}\}$ можна записати

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\{|x(t_m,t_{k+1},x(t_{k+1},s,x))|^2/\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1}\} \\ &\quad = \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{|x(t_m,t_{k+1},z)|^2\big|_{z=x(t_{k+1},s,x)}/\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1}\right\}\right\} \\ &\quad = \mathsf{E}^{t_{k+1},k+l}_{\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1}}\{|x(t_m,t_{k+1},z)|^2\}\big|_{z=x(t_{k+1},s,x)}, \end{aligned}$$

і тому з оцінок (7) і припущень леми випливає нерівність

$$\begin{aligned} \mathsf{E}^{s,l}_{y,h}\{|x(t,s,x)|^2\} &\leq ab\,\mathsf{E}^{s,l}_{y,h}\{|x(t_m,s,x)|^2\} = ab\,\mathsf{E}^{s,l}_{y,h}\{|x(t_m,t_{k+1},x(t_{k+1},s,x))|^2\} \\ &= ab\,\mathsf{E}^{s,l}_{y,h}\left\{\mathsf{E}^{t_{k+1},k+l}_{\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1}}\{|x(t_m,t_{k+1},x(t_{k+1},s,x))|^2\}\right\} \\ &\leq abMe^{-\gamma(t_m-t_{k+1})}\,\mathsf{E}^{s,l}_{y,h}\{|x(t_{k+1},s,x)|^2\} \leq a^2bMe^{-\gamma(t_m-t_{k+1})}|x|^2 \\ &\leq a^2be^{2\gamma\Delta}Me^{-\gamma(t-s)}|x|^2 \end{aligned}$$

для всіх $y \in \mathbb{Y}$ і $h \in \mathbb{H}$. Лема доведена. $\square$

Теорема 1. *Тривіальний розв'язок* (1), (2) *експоненціально стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли існує таке число* $\rho \in (0,1)$, *що* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C}: |\lambda| < \rho\}$.

Доведення. Для будь-яких $k \in \boldsymbol{N}$, $l \in \boldsymbol{N}$, $k < l$, можна записати

$$x(t_{k+1}, t_l, x) = B(\eta_k)X(t_{k+1}, t_k)x(t_k, t_l, x).$$

Якщо $q \in \mathbb{V}$, то з марковської властивості і означення оператора A (5) випливає рівність

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{y,h}^{t_l,l}\{x^T(t_{k+1}, t_l, x)q[\xi(t_{k+1}, \eta_{k+1})]x(t_{k+1}, t_l, x)\} \\
&\quad = \mathsf{E}_{y,h}^{t_l,l}\left\{\mathsf{E}_{\xi(t_k),\eta_k}^{t_k,k}\left\{x^T(t_{k+1}, t_k, x(t_k, t_l, x)q[\xi(t_{k+1}, \eta_{k+1}]x(t_{k+1}, t_k, x(t_k, t_l, x))\right\}\right\} \\
&\quad = \mathsf{E}_{y,h}^{t_l,l}\Big\{\mathsf{E}_{\xi(t_k),\eta_k}^{t_k,k}\left\{x^T(t_{k+1}, t_l, x)X^T(t_{k+1}, t_k)B^T(\eta_k)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\times\, q[\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}]B(\eta_k)X(t_{k+1}, t_k)x(t_k, t_l, x)\right\}\Big\} \\
&\quad = \mathsf{E}_{y,h}^{t_l,l}\Big\{x^T(t_{k+1}, t_l, x)\,\mathsf{E}_{\xi(t_k),\eta_k}^{t_k,k}\left\{X^T(t_{k+1}, t_k)B^T(\eta_k)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\times\, q[\xi(t_{k+1}, \eta_{k+1}]B(\eta_k)X(t_{k+1}, t_k)\right\}x(t_k, t_l, x)\Big\} \\
&\quad = \mathsf{E}_{y,h}^{t_l,l}\left\{x^T(t_{k+1}, t_l, x)[Aq][\xi(t_k), \eta_k]x(t_k, t_l, x)\right\}.
\end{aligned}$$

За індукцією маємо

$$\mathsf{E}_{y,h}^{t_l,l}\left\{x^T(t_{k+1}, t_l, x)q[\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}]x(t_k, t_l, x)\right\} = x^T[A^{k-l}q](y,h)x \tag{8}$$

для всіх $q \in \mathbb{V}$, $k > l$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ і $x \in \boldsymbol{R}^n$. Якщо $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C}: |\lambda| < \rho\}$, то [4] знайдеться таке число $M > 0$, що $\|A^m\| \le M\rho^m$ для всіх $m \in \boldsymbol{N}$. Отже, поклавши у (8) $q(y,h) \equiv 1$, одержимо нерівність

$$\mathsf{E}_{y,h}^{t_l,l}\{|x(t_{k+1}, t_l, x)|^2\} \le M\|I\|\rho^{k-l}|x|^2,$$

яка в силу $\rho \in (0,1)$ і результатів леми еквівалентна експоненціальній стійкості в середньому квадратичному.

Нехай тепер виконується нерівність (4). Тоді

$$x^T[A^{k-l}q](y,h)x \le Me^{-\gamma(k-l)\Delta}|x|^2\|q\|$$

для всіх $q \in \mathbb{V}$, $k > l > 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ і $x \in \boldsymbol{R}^n$. Тому

$$\|A^{k-l}\| < 1$$

при достатньо великому числі $k - l \in \boldsymbol{N}$. Отже, спектральний радіус оператора A менший від одиниці [4] і теорема доведена. □

З доведення теореми 1 легко одержати таке твердження.

Наслідок 1. *Тривіальний розв'язок* (1), (2) *експоненціально стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли спектральний радіус оператора A менший від одиниці.*

Тепер скористаємося додатністю оператора A відносно тілесного конуса $\mathbb{K}$ в банаховому просторі $\mathbb{V}$ і результатами роботи [3]. Назвемо оператор $a \in L(\mathbb{V})$ квазікомпактним, якщо існує таке число $\rho \in (0,1)$, що в області $\{\lambda \in \boldsymbol{C}: |\lambda| > \rho\}$ існує лише скінченне число точок спектра цього оператора, які є власними значеннями скінченної кратності.

Наслідок 2. *Якщо оператор A квазікомпактний, то тривіальний розв'язок* (1), (2) *експоненціально стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли існує таке число $\rho \in [0,1]$, що*

$$\sigma(A) \cap \{ z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re} z > \rho \} = \varnothing. \tag{9}$$

Доведення. Якщо тривіальний розв'язок експоненціально стійкий у середньому квадратичному, то за наслідком 1 спектральний радіус оператора A менший від деякого числа $\rho \in (0,1)$ і (9) доведено. Якщо виконано (9), то пряма $\{ z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re} z > \rho \}$, $\rho \in (0,1)$ належить резольвентній множині оператора A. В силу квазікомпактності оператора A, тілесності $\mathbb{K}$ і включення $A\mathbb{K} \subset \mathbb{K}$ існує [3] додатне число $r \in \sigma(A)$, рівне спектральному радіусу оператора A. Ясно, що це r повинно бути меншим або рівним ρ з (9), тобто $r \in (0,1)$, і тому спектральний радіус оператора A менший від одиниці. Залишається знову послатись на наслідок 1 і наслідок 2 доведено. ☐

Припустимо, що матриці $A(y)$ і $B(h)$ допускають розвинення в ряд за малим параметром ε, рівномірно збіжні в інтервалі $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$:

$$A(y) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j A_j(y), \tag{10}$$

$$B(h) = B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j B_j(h). \tag{11}$$

У цьому випадку матриця Коші $X(t,0)$ при $t \in [0,\Delta]$ рівняння (1) розвивається в ряд [5]:

$$X(t,0) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j X_j(t,0), \tag{12}$$

члени якого можна знайти з рівності

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{d}{dt} X_j(t,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\xi(t)) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j X_j(t,0)$$

з врахуванням початкових умов

$$X_0(0,0) = 1, \qquad X_j(0,0) = 0, \quad j \in \boldsymbol{N}.$$

Отже,

$$X_0(t,0) = e^{tA_0}, \qquad t \in [0,\Delta], \tag{13}$$

$$X_1(t,0) = e^{tA_0} \int_0^t e^{-\tau A_0} A_1(\xi(t)) e^{\tau A_0}\, d\tau, \tag{14}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В свою чергу оператор A з (5) також залежить від ε (будемо позначати його через $A(\varepsilon)$). Цей оператор можна подати у вигляді збіжного на деякому інтервалі $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ряду

$$A(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j A_j. \tag{15}$$

Легко одержати для складових ряду (15) явні вирази, підставивши цей ряд і ряди (10)–(12) в (5) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε:

$$[A_0q](y,h) = e^{\Delta A_0^T} B_0^T\, \mathsf{E}^{0,0}_{y,h}\{q[\xi(\Delta),\eta_1]\}B_0e^{\Delta A_0}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}[A_1q](y,h) = \mathsf{E}^{0,0}_{y,h}\,\{&X_1^T(\Delta,0)B_0^Tq[\xi(\Delta),\eta_1]B_0e^{\Delta A_0} + e^{\Delta A_0^T}B_0^Tq[\xi(\Delta),\eta_1]B_0X_1(\Delta,0)\\ &+ e^{\Delta A_0^T}B_1^T(\eta_1)q[\xi(\Delta),\eta_1]B_0e^{\Delta A_0} + e^{\Delta A_0^T}B_0^Tq[\xi(\Delta),\eta_1]B_1(\eta_1)e^{\delta A_0}\},\end{aligned} \tag{17}$$

. . . .

Нехай $\mathsf{P}^{(1)}(y,dy_0)$ і $\mathsf{P}^{(2)}(h,dh_0)$ — перехідні ймовірності ланцюгів Маркова $\{\xi(t_k)\}$ і $\{\eta_k\}$ відповідно. Визначимо оператори

$$[T_1q_1](y) = \int_{\mathbb{Y}} \mathsf{P}^{(1)}(y,dy_0)q_1(y_0), \qquad q_1\in \mathrm{C}(\mathbb{Y}),$$

$$[T_2q_2](h) = \int_{\mathbb{H}} \mathsf{P}^{(2)}(h,dh_0)q_2(h_0), \qquad q_2\in \mathrm{C}(\mathbb{H}),$$

$$[Tq](y,h) = \mathsf{E}^{0,0}_{y,h}\{q[\xi(\Delta),\eta_1]\} = \int_{\mathbb{Y}}\int_{\mathbb{H}} \mathsf{P}^{(1)}(y,dy_0)\mathsf{P}^{(2)}(h,dh_0, q(y_0,h_0), \quad q\in \mathrm{C}(\mathbb{Y}\times\mathbb{H}),$$

$$\hat{A}_0p = e^{\Delta A_0}B_0^TpB_0e^{\Delta A_0}, \qquad p\in \widehat{M}_n(\boldsymbol{R}).$$

Оскільки $T = T_1\oplus T_2$, то [6] спектр оператора T є добутком спектрів операторів T_1 і T_2, тобто

$$\sigma(T) = \{\,\lambda_1\lambda_2\colon \lambda_1\in\sigma(T_1), \lambda_2\in\sigma(T_2)\,\}.$$

Аналогічний висновок можна зробити відносно спектра оператора $\hat{A}_0 = e^{\Delta A_0^T}B_0^T \oplus B_0e^{\Delta A_0}$:

$$\sigma(\hat{A}_0) = \{\,\lambda_1\lambda_2\colon \lambda_j\in\sigma[B_0e^{\Delta A_0}], j=1,2\,\}.$$

Використовуючи зображення

$$\mathbb{V} = \widehat{M}_n(\boldsymbol{R})\oplus \mathrm{C}(\mathbb{Y}\times\mathbb{H}), \tag{18}$$

можна записати рівність

$$A_0 = \hat{A}_0\oplus T.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\begin{aligned}\sigma(T) &= \{\,\lambda_1\lambda_2\colon \lambda_1\in\sigma(T_1), \lambda_2\in\sigma(T_2)\,\}\\ &= \{\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\colon \lambda_1\in\sigma[B_0e^{\Delta A_0}], \lambda_2\in\sigma[B_0e^{\Delta A_0}], \lambda_3\in\sigma(T_1), \lambda_4\in\sigma(T_2)\,\}.\end{aligned} \tag{19}$$

Теорема 2. *Нехай оператори T_1 і T_2 квазікомпактні і спектральний радіус оператора $C = B_0e^{\Delta A_0}$ рівний одиниці. Тоді при всіх достатньо малих за модулем ε оператори $A(\varepsilon)$ квазікомпактні і існують число $m\in \boldsymbol{N}$, такі матриці $\Lambda(\varepsilon)\in\widehat{M}_n(\boldsymbol{R})$ і базис $\mathbb{F}(\varepsilon) = \{f_1^{(\varepsilon)},\dots,f_m^{(\varepsilon)}\}$, голоморфно залежні від ε в околі точки $\varepsilon = 0$, що в цьому околі*

$$A(\varepsilon)\mathbb{F}(\varepsilon) = \mathbb{F}(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon), \tag{20}$$

де оператор $A(\varepsilon)$ застосовується до $\mathbb{F}(\varepsilon)$ поелементно, а матриця $\Lambda(\varepsilon)$ діє справа на $\mathbb{F}(\varepsilon)$ за правилом множення матриці на рядок. При цьому $\sigma[\Lambda(0)] = \{1\}$ і кратність цього власного значення m рівна сумарній кратності власних значень оператора C, які лежать на колі $S^1 = \{\,\lambda\in \boldsymbol{C}\colon |\lambda| = 1\,\}$.

Доведення. В силу властивостей марковських операторів T_1 і T_2 спектр оператора T розміщений в колі $\{\,\lambda\in\boldsymbol{C}\colon|\lambda|\le 1\,\}$. Далі з скінченномірності $\widehat{M}_n(\boldsymbol{R})$ випливає той факт, що спектр оператора $\hat{A}_0$ складається із скінченного числа власних значень скінченної кратності. Тому з формули (19) можна зробити висновок про квазікомпактність оператора A_0. Залишається скористатись теоремою з [4] про неперервність спектра за параметром ε для ґоломорфних сімей операторів, і перша частина теореми доведена.

В силу дискретності частини спектра оператора A_0, який лежить поза колом $\{\lambda \in C: |\lambda| \le \rho < 1\}$, і додатності цього оператора відносно тілесного конуса $\mathbb{K}$ в банаховому просторі $\mathbb{V}$ можна твердити [3], що $\{1\} \subset \sigma(A_0) = \sigma(\hat{A})0$. Якщо розглядати $M_n(\boldsymbol{R})$ як тензорний добуток [6] $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$, то оператор $\hat{A}_0$ можна розглядати як тензорний добуток операторів $C^T \otimes C$, де $C = B_0 e^{\Delta A_0}$. Оскільки оператор C дійсний і його найбільше за модулем власне значення лежить на одиничному колі S^1, то серед найбільших за модулем його власних значень оператора $C^T \otimes C$ є одиниця, причому кратність її рівна числу m, про яке йде мова в умовах теореми. За теоремою про спектр ґоломорфної сім'ї операторів [4] можна твердити, що оператори $A(\varepsilon)$ мають дійсні власні значення $\lambda_1(\varepsilon), \ldots, \lambda_l(\varepsilon)$, які неперервно залежать від ε в околі точки $\varepsilon = 0$, причому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_j(\varepsilon) = 1$$

для всіх $j \in \{1, \ldots, l\}$, а сумарна їх алґебраїчна кратність дорівнює алґебраїчній кратності одиниці в спектрі оператора A_0, тобто m. Проектор $P(\varepsilon)$ в сумарний кореневий підпростір $\mathbb{V}(\varepsilon) \subset \mathbb{V}$, який відповідає цим власним значенням, ґоломорфно залежить від ε [4] в деякому околі точки $\varepsilon = 0$. Нехай $\mathbb{F}_0 = \left\{f_1^{(0)}, \ldots, f_m^{(0)}\right\}$ — базис в кореневому підпросторі $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}$ оператора A_0, який відповідає власному значенню одиниця. Тоді при достатньо малому за модулем ε сім'я $\mathbb{F}(\varepsilon) = P(\varepsilon)\mathbb{F}_0$ є базисом в $\mathbb{V}(\varepsilon)$, ґоломорфно залежним від ε. Отже, (20) є наслідком інваріантності $\mathbb{V}(\varepsilon)$ відносно $A(\varepsilon)$, а матриця $\Lambda(\varepsilon)$ є матрицею оператора $A(\varepsilon)$ в базисі $\mathbb{F}(\varepsilon)$, ґоломорфно залежному від ε внаслідок ґоломорфності $\Lambda(\varepsilon)$. Теорема доведена. ☐

Зобразимо невідомі в рівнянні (20) у вигляді рядів

$$\mathbb{F}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbb{F}_j, \qquad \Lambda(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Lambda_j \tag{21}$$

і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра ε:

$$A_0\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_0\Lambda_0, \tag{22}$$

$$A_0\mathbb{F}_1 - \mathbb{F}_1\Lambda_0 = -A_1\mathbb{F}_0 + \mathbb{F}_0\Lambda_1, \tag{23}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_0\mathbb{F}_2 - \mathbb{F}_2\Lambda_0 = -A_2\mathbb{F}_0 - A_1\mathbb{F}_0 + \mathbb{F}_0\Lambda_1 + \mathbb{F}_1\Lambda_1. \tag{24}$$

Простір лінійних функціоналів над $\mathbb{V}$ є [7] простором матричнозначних зліченно-адитивних мір на $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$, причому в силу зображення $\mathbb{V} = \widehat{M_n}(\boldsymbol{R}) \oplus \mathrm{C}(\mathbb{Y} \times \mathbb{H})$

$$\mathbb{V}^* = \widehat{M_n}(\boldsymbol{R}) \oplus \mathrm{C}^*(\mathbb{Y} \times \mathbb{H}), \tag{25}$$

де $\mathrm{C}^*(\mathbb{Y} \times \mathbb{H}) = \mathrm{rca}(\mathbb{Y} \times \mathbb{H})$ (див., наприклад, [7]). Скалярний добуток елементів $\mu \in \mathbb{V}^*$ і $q \in V$ можна ввести в формі

$$[\mu, q] = \int_{\mathbb{Y} \times \mathbb{H}} \mathrm{Sp}\{q(y,h)\mu(dy, dh)\},$$

де Sp — слід матриці. Легко переконатись у тому, що для будь-яких $\mu \in \mathbb{V}^*$ і $g \in \mathbb{V}$

$$[A_0^*\mu, q] = \int_{\mathbb{Y}\times\mathbb{H}} \mathrm{Sp}\{\mu(dy, dh)\, \mathsf{E}_{y,h}^{0,0}\{[C^T q[\xi(\Delta), \eta_1]C\}\}$$

$$= \int_{\mathbb{Y}\times\mathbb{H}} \mathrm{Sp}\Big\{C\mu(dy, dh)C^T \int_{\mathbb{Y}\times\mathbb{H}} q(y_0, h_0)\mathsf{P}^{(1)}(y, dy_0)\mathsf{P}(y, dy_0)\Big\},$$

$$[A_0^*\mu](dy_0, dh_0) = \int_{\mathbb{Y}\times\mathbb{H}} C\mu(dy, dh)C^T\mathsf{P}^{(1)}(y, dy_0)\mathsf{P}^{(2)}(h, dh_0),$$

де, як і раніше, $C = B_0e^{\Delta A_0}$. В умовах теореми 2 з властивостей спряженого оператора випливає, що одиниця теж є старшим за модулем ізольованим власним значенням оператора A^* кратності m, причому відповідний цьому власному значенню кореневий підпростір є лінійною оболонкою базиса $\mathbb{F}^*$, складеного з m елементів простору $\mathbb{V}^*$. Записавши цей базис в формі стовпця

$$\mathbb{F}^* = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdots \\ \mu_m \end{bmatrix}, \tag{27}$$

виберемо $\mu_1(dy, dh), \ldots, \mu_m(dy, dh)$ так, щоб для всіх $j, l \in \{1, \ldots, m\}$ виконувались рівності

$$[\mu_j, f_l] = \begin{cases} 1, & j = l; \\ 0, & j \neq l, \end{cases}$$

і визначимо операцію "множення" між стовпцями вигляду (27) і рядками вигляду

$$\mathbb{G} = \{g_1, \ldots, g_m\} \subset \mathbb{V} \tag{28}$$

за допомогою рівності

$$\mathbb{F}_0^*\mathbb{G} = \begin{bmatrix} [\mu_1, g_1] & \cdots & [\mu_1, g_m] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [\mu_m, g-1] & \cdots & [\mu_m, g_m] \end{bmatrix} \in M_n(\boldsymbol{R}).$$

За $\mathbb{F}^*$ завжди можна взяти спряжений базис, тобто

$$\mathbb{F}_0^*\mathbb{F}_0 = I, \tag{29}$$

де I — одиниця з $M_n(\boldsymbol{R})$, що і буде припускатись надалі. Тепер можна перейти до аналізу (23). З умови нормальної розв'язності цього рівняння [7] маємо рівність

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbb{F}_0 A_1 - A_1\mathbb{F}_0) = 0,$$

тобто в силу (29)

$$\Lambda_1 = \mathbb{F}_0^* A_1 \mathbb{F}_0 \tag{30}$$

і т.д. Підставивши знайдений в (14) вираз для $X_1(\Delta, 0)$ в (17), а потім в (30), можна знайти матрицю Λ_1. Якщо всі її власні значення мають від'ємні дійсні частини, то $\sigma(\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1) \subset \{\, \lambda \in \boldsymbol{C}\colon |\lambda| < 1 \,\}$ при достатньо малих додатних ε. Якщо існують власні значення з додатною дійсною частиною, то $\sigma(\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1) \cap \{\, \lambda \in \boldsymbol{C}\colon |\lambda| > 1 \,\} \neq \varnothing$ при достатньо малих додатних ε. Якщо ж власні значення матриці Λ_1 розміщені в півплощині $\{\, \lambda \in \boldsymbol{C}\colon \mathrm{Re}\,\lambda \le 0 \,\}$, причому серед них є з нульовою дійсною частиною, то з (23) знаходимо $\mathbb{F}_1$ і перевіряємо (24) на нормальну розв'язність:

$$\mathbb{F}_0^* \cdot (A_2\mathbb{F}_0 + A_1\mathbb{F}_1 - \mathbb{F}_0\Lambda_2 - \mathbb{F}_1\Lambda_1) = 0.$$

Звідси можна знайти

$$\Lambda_2 = \mathbb{F}_0^* \cdot A_2\mathbb{F}_0 + \mathbb{F}_0^* \cdot A_1\mathbb{F}_1 - \mathbb{F}_0^* \cdot \mathbb{F}_1^*\Lambda_1.$$

Так само, як і при знаходженні Λ_1, потрібно виписати оператор A_2 аналогічно (17) через $X_2(\Delta, 0)$, $X_1(\Delta, 0)$, $X_0(\Delta, 0)$, $B_2(\eta_1)$, $B_1(\eta_1)$, потім знайти Λ_2. Тепер все вирішує спектр матриці Λ_2. Якщо $\sigma(\Lambda_2) \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, то при малих за модулем ε спектр оператора $A(\varepsilon)$ розміщений всередині кола $\{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| < 1\}$, якщо $\sigma(\Lambda_2) \cap \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \neq \varnothing$, то $\sigma(A(\varepsilon)) \cap \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| > 1\} \neq \varnothing$ при всіх достатньо малих за модулем ε. Якщо жоден з цих випадків не має місця, то слід із (24) знайти $\mathbb{F}_2$, виписати рівняння для $\mathbb{F}_3$, перевірити умову нормальної розв'язності і знайти Λ_3, проаналізувати її спектр і т.д. Описаний вище алгоритм дозволяє формулювати дуже важливі для застосувань твердження.

Наслідок 3. *Нехай виконані умови теореми* 2. *Оператор* $A(\varepsilon) - I$ *оборотний при всіх достатньо малих додатних* ε *тоді і тільки тоді, коли існує число* $k \in \boldsymbol{N}$ *таке, що* $\sigma(\Lambda_j) \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$, $\sigma(\Lambda_j) \cap \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda = 0\} \neq \varnothing$ *для всіх* $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, *а* $\sigma(\Lambda_k) \cap \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda = 0\} = \varnothing$.

Наслідок 4. *Якщо виконані умови теореми* 2, *то тривіальний розв'язок* (1), (2) *експоненціально стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли існує число* $k \in \boldsymbol{N}$ *таке, що* $\sigma(\Lambda_j) \subset \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$, $\sigma(\Lambda_j) \cap \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda = 0\} \neq \varnothing$ *для всіх* $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, *а* $\sigma(\Lambda_k) \cap \{\lambda \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\} = \varnothing$.

Зауваження 1. Якщо процес Маркова $\{\xi(t)0\}$ і ланцюг Маркова $\{\eta_k\}$ задовольняють умову рівномірної ергодичності, то марковські оператори в просторі мір

$$[T_1^* \mu^{(1)}](dy_0) = \int_{\mathbb{Y}} \mu^{(1)}(dy) \mathsf{P}^{(1)}(y, dy_0),$$
$$[T_2^* \mu^{(2)}](dh_0) = \int_{\mathbb{H}} \mu^{(2)}(dy) \mathsf{P}^{(2)}(h, dh_0)$$

мають спектри, які допускають зображення $\sigma(T_j^*) = \{1\} \cup \breve{\sigma}_j$, де $\breve{\sigma}_j = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| < \rho < 1\}$, $j = 1, 2$. Тому в даному випадку за базис (можливо комплексний) можна взяти розв'язки рівнянь $[A_0^* - J]^k \mu = 0, \quad k \in \boldsymbol{N}$, зобразивши їх у вигляді тензорів $\mu = g \otimes \mu^{(1)} \otimes \mu^{(2)}$, де g визначається рівністю $[\hat{A}_0^* - J]^k g = g, \quad k \in \boldsymbol{N}$, а $\mu^{(1)}$ і $\mu^{(2)}$ — інваріантні міри ланцюгів Маркова відповідно $\{\xi(t)\}$ і $\{\eta_k\}$, тобто розв'язки рівнянь $T_1^* \mu^{(1)} = \mu^{(1)}, \quad T_1^* \mu^{(2)} = \mu^{(2)}$. Ще простіше в даному випадку можна вибрати базис в просторі $\mathbb{V}(0)$: він складається з симетричних матриць f, які є розв'язками рівнянь $[A_0^* - J]^k f = f, \quad k \in \boldsymbol{N}$.

Література

1. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями*, "Вища школа", Киев, 1987.
2. Е. Ф. Царьков, *Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с марковскими коэффициентами*, ДАН УССР, сер. А (1987), № 3, 19–21.
3. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха*, Успехи мат. наук 3 (1947), № 1, 3–95.
4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, "Мир", Москва, 1972.
5. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения*, "Наука", Москва, 1972.
6. A. Brown and C. Peary, *Spectra of tensor products of operators*, Amer. Math. Soc. 17 (1966), 162–166.
7. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, Том 1. Общая теория, "ИЛ", Москва, 1962.

Чернівецький державний університет

Латвія, Рига, Ризький технічний інститут

Надійшла 20.06.94