Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 168–174

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 168–174

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

УДК 519.21

Ш. ШАРАХМЕТОВ

Резюме. Наведено доведення посиленого закону великих чисел Колмогорова для залежних випадкових величин.

1. Введение

Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин (с.в.),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad n \geq 1,$$

$H(x)$ — неотрицательная функция на $(0, \infty)$ такая, что $\lim_{n\to\infty} H(x) = \infty$.

В настоящей работе доказывается утверждение

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{H(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \qquad n \to \infty,$$

для широкого класса зависимых с.в.

Этот результат для некоторых конкретных классов зависимых с.в. при $H(x) = x$ получен в [1–4]. Так, в работе [1] рассмотрен случай, когда $\varphi(m) < 1$ для некоторого $m > 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{1/2}(n) < \infty$, где $\alpha(n)$ и $\varphi(n)$ — коэффициенты сильного и равномерно сильного перемешивания соответственно.

Стаут [2] рассмотрел случай, когда $\{X_n, n \geq 1\}$ — стационарная в узком смысле последовательность с.в., удовлетворяющих условию $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$. Черго, Тандори, Тотик [3] доказали этот результат для попарно независимых с.в.

В [4] для доказательства приведенного выше утверждения требуется выполнение условия $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{1/n}(n) < \infty$ или условия $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\gamma}(n) < \infty$ для некоторого $\gamma > 0$, но при более жестких моментных ограничениях.

2. Формулировка и обсуждение результатов

Пусть в дальнейшем $\frac{H(x)}{x^\gamma} \downarrow$, $x \geq 1$, для некоторого $\gamma > 0$, и C означает положительные постоянные, не всегда одни и те же.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F15.

Работа выполнена во время стажировки в Институте математики АН Украины в 1990–91 г.г.

Теорема 1. *Пусть*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{nH(n)} \le \frac{C}{H(k)}, \qquad k \ge 1, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X_n| > H(n)) < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}(|X_n| I(|X_n| \le H(n)))}{H(n)} < \infty. \tag{3}$$

Тогда $S_n/n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, $n \to \infty$.

Здесь и далее $I(A)$ — индикатор события A.

Следствие 1. *Пусть* $\{X_n, n \ge 1\}$ *— последовательность одинаково распределенных с.в.,* $H(x)/x \uparrow$, $x \ge 1$ *и*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{H(n)} \le \frac{Ck}{H(k)}, \qquad k \ge 1. \tag{4}$$

Если $\mathsf{E}\, H^{-1}(|X_1|) < \infty$, *где* $H^{-1}(x)$ *— функция, обратная к* $H(x)$, *то справедливо утверждение теоремы* 1.

Теорема 2. *Если*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{nH^2(n)} \le \frac{C}{H^2(k)}, \qquad k \ge 1, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\, X_n}{H^2(n)} < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\,|X_k - \mathsf{E}\, X_k| \le CH(n), \qquad n \ge 1 \tag{7}$$

и

$$\mathsf{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X^{\pm}\right) \le C \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\, X_k^{\pm}, \qquad n \ge 1, \tag{8}$$

то

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{H(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \qquad n \to \infty,$$

где

$$X_k^{+} = (X_k - \mathsf{E}\, X_k) I(X_k \ge \mathsf{E}\, X_k), \qquad X_k^{-} = -(X_k - \mathsf{E}\, X_k) I(X_k \le \mathsf{E}\, X_k).$$

Теорема 3. *Пусть* $\{X_n, n \ge 1\}$ *— последовательность с.в. с* $\mathsf{E}\, X_n = 0$, $n \ge 1$, *и выполнено условие* (2). *Если с.в.* $\{X_n I(|X_n| \le H(n)), n \ge 1\}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2, *то для любой последовательности действительных чисел* $\{b_m, m \ge 1\}$ *таких, что*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{H(n)} \sum_{k=1}^{n} [b_k - \mathsf{E}\, X_k I(|X_k| \le H(k))] = 0, \tag{9}$$

справедливо утверждение

$$\frac{S_n - \sum_{k=1}^{n} b_k}{H(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Следствие 2. *Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность одинаково распределенных с.в. с $\mathsf{E}\, X_1 = 0$ и $\{X_n I(|X_n| \leq n), n \geq 1\}$ удовлетворяют условию* (8).

Тогда $S_n/n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, $n \to \infty$.

Следствие 3. *Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность одинаково распределенных с.в., удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(2^n) < \infty$, где $\rho(n)$ — коэффициент полной регулярности.*

Если $\mathsf{E}\,|X_1| < \infty$, то $S_n/n \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathsf{E}\, X_1$, $n \to \infty$.

В сформулированных выше теоремах условия, наложенные на с.в., являются оптимальными в том смысле, что если хотя бы одно из них не выполняется, то утверждения теорем, вообще говоря, не имеют места.

В теореме 1 доказан усиленный закон больших чисел (у.з.б.ч.) для произвольно зависимых с.в. Условие (1) определяет класс функций $H(x)$.

Условия (2) и (3) являются оптимальными в указанном выше смысле, что показывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть функция $H(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Положим $X_n = H(n) + 1$ п.н. Тогда очевидно, что условие (3) выполняется, а условие (2) не выполняется и $S_n/H(n) \nrightarrow 0$, $n \to \infty$.

Пример 2. Пусть функция $H(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и $X_n = H(n)$. Тогда условие (2) выполняется, а условие (3) не выполняется и $S_n/H(n) \nrightarrow 0$, $n \to \infty$.

Теорема 2 является обобщением известной теоремы Колмогорова на случай зависимых с.в. Утверждение этой теоремы при данном классе функций $H(x)$ и для произвольно зависимых с.в. неверно. Чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать $H(x) = x$ и $X_n \equiv X$, где X — с.в., удовлетворяющая условиям $\mathsf{E}\, X = 0$, $\mathsf{E}\, X^2 < \infty$. В этом случае все условия теоремы 2, кроме (8), выполняются, но $(S_n - \mathsf{E}\, S_n)/H(n) = X \overset{\text{п.н.}}{\nrightarrow} 0, n \to \infty$.

Поэтому естественно задать некоторые ограничения на зависимость исходных с.в. В качестве такого ограничения рассматривается условие (8), которое выполняется для широкого класса зависимых с.в. Например, оно выполняется для попарно независимых, m-зависимых с.в., случайных величин, удовлетворяющих условию φ-перемешивания или ρ-перемешивания, и др.

Однако, это условие нельзя заменить на следующее, более слабое ограничение:

$$\mathsf{D}\, S_m \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\, X_k, \qquad n \geq 1.$$

Это следует из примеров, относящихся к классическим результатам Меньшова–Радемахера (см. [6]).

Теперь обсудим остальные условия теоремы 2.

В [3] построен пример, который показывает, что без условия (7) утверждение теоремы 2, вообще говоря, неверно.

Далее в [7, с. 222] приведен пример последовательности независимых с.в., для которых условие (6) не выполняется и

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{H(n)} \overset{\text{п.н.}}{\nrightarrow} 0, \qquad n \to \infty.$$

Теорема 3 является аналогом теоремы 2 для "урезанных" с.в.. Из этой теоремы, в отличие от теоремы 2, в качестве следствия можно получить у.з.б.ч. Колмогорова для одинаково распределенных зависимых с.в. (следствие 3).

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $\widetilde{X}_n = X_n I(|X_n| \le H(n))$, $\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \widetilde{X}_k$, $n \ge 1$. В силу условия (2) и леммы Бореля–Кантелли получаем $\mathsf{P}(\widetilde{X} + n \ne X_n \text{ б.ч.}) = 0$. Поэтому достаточно показать, что $S_n/H(n) \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть $2^i \le n < 2^{i+1}$, $i \ge 1$, и $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Имеем

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\ge n} \frac{|\widetilde{S}_k|}{H(k)} \ge \varepsilon\right) \le \mathsf{P}\left(\sup_{k \ge 2^i} \frac{|\widetilde{S}_k|}{H(k)} \ge \varepsilon\right)$$
$$\le \sum_{n=i}^{\infty} \mathsf{P}\Big(\max_{2^n \le k \le 2^{n+1}} |S_k| \ge \varepsilon H(2^n)\Big) = \Sigma_i, \qquad i \ge 1.$$

Поэтому достаточно показать, что $\Sigma_1 < \infty$.

Используя неравенство Маркова, получаем

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\left(\max_{1\le k \le 2^{n+1}} |\widetilde{S}_k|\right)}{\varepsilon H(2^n)} \le \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H(2^n)} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \mathsf{E}\,|\widetilde{X}_k| \\ &\le C \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\,|\widetilde{X}_k| \sum_{\{n:2^{n+1}\ge k\}} \frac{1}{H(2^{n+1})}.\end{aligned} \tag{10}$$

В силу условия $H(x)/x^\gamma \downarrow$, $x \ge 1$, для любого $C > 1$ имеем $H(Cx)/(Cx)^\gamma \le H(x)/x^\gamma$, следовательно, $1/(C^\gamma H(x)) \le 1/H(Cx)$.

Используя это соотношение и условие (1), находим

$$\begin{aligned}\sum_{\{n:2^{n+1}\ge k\}} \frac{1}{H(2^{n+1})} &\le \sum_{n=[\log_2 k]-1}^{\infty} \frac{1}{H(2^{n+1})} \int_n^{n+1} dx \\ &\le \sum_{n=[\log_2 k]-1}^{\infty} \frac{1}{H(2^{n+1})} \int_n^{n+1} \frac{dx}{H(2^x)} \le C \int_{[\log_2 k]-1}^{\infty} \frac{dx}{H(2^{x+1})} \\ &= C \int_k^{\infty} \frac{dt}{tH(t)} = C \sum_{n=k}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{tH(t)} \le C \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{nH(n)} \\ &\le \frac{C}{H(k)}.\end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя полученное неравенство в (10) и используя условие (3), заключаем, что $\sum_i < \infty$. Теорема 1 доказана. □

Доказательство следствия 1. Покажем выполнение условий (1)–(3). Используя условие (4), имеем

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{nH(n)} \le \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{H(n)} \le \frac{C}{H(k)}, \qquad k \ge 1.$$

В силу леммы 12 из [7, с. 227] получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X_1| > H(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(H^{-1}(|X_1|) > n) \le \mathsf{E}\, H^{-1}(|X_1|) < \infty.$$

Далее, пусть $F(x) = \mathsf{P}(|X_1| < x)$, $H(0) = 0$. Тогда, применяя условие (4), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H(n)} \sum_{k=1}^{n} \int_{H(k-1)}^{H(k)} x\, dF(x) &\le \sum_{k=1}^{\infty} H(k) \int_{H(k-1)}^{H(k)} dF(x) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{H(n)} \\ &\le C \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \int_{H(k-1)}^{H(k)} dF(x) + C \\ &\le C(\mathsf{E}\, H^{-1}(|X_1|) + 1) < \infty.\end{aligned}$$

Следствие 1 доказано. □

Доказательство теоремы 2. Для простоты выкладок будем считать, что $\mathsf{E}\, X_n = 0$, $n \ge 1$. Докажем, что

$$\frac{S_n^{\pm} - \mathsf{E}\, S_n^{\pm}}{H(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0,$$

где $S_n^{\pm} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{\pm}$, $n \ge 1$. Из условия (7) вытекает, что для некоторого $C_1 > 0$ и для всех $n \ge 1$

$$0 \le \frac{1}{H(n)} \mathsf{E}\, S_n^{+} \le C_1.$$

Пусть $\beta > 1$, $\varepsilon > 0$ и $l = [C_1/\varepsilon]$, где $[x]$ означает целую часть x. Для каждого $m \ge 0$ и $s = 0, 1, \dots, L$ определим

$$K_s^{-}(m) = \inf\left\{k \colon \beta^m \le k < \beta^{m+1}, \frac{1}{H(k)} \in [s\varepsilon, (s+1)\varepsilon]\right\},$$
$$K_s^{+}(m) = \sup\left\{k \colon \beta^m \le k < \beta^{m+1}, \frac{1}{H(k)} \in [s\varepsilon, (s+1)\varepsilon]\right\}.$$

Если такие $K_s^{\pm}(m)$ не существуют, то положим $K_s^{\pm}(m) = [\beta^m]$.

Используя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathsf{P}\left(\sup_{m \ge n} \frac{\left|S^{+}_{K_s^{\pm}(m)} - \mathsf{E}\, S^{+}_{K_s^{\pm}(m)}\right|}{H(K_s^{\pm}(m))} \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\mathsf{D}\, S^{+}_{K_s^{\pm}(m)}}{H^2(K_s^{\pm}(m))}. \tag{12}$$

С другой стороны, используя условие (8), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{H^2(K_s^{\pm}(m))} \mathsf{D}(S^{+}_{K_s^{\pm}(m)}) &\le C \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{H^2(K_s^{\pm}(m))} \sum_{j=1}^{K_s^{\pm}(m)} \mathsf{D}\, X_j^{+} \\ &\le C \sum_{j=1} \mathsf{D}\, X_j^{+} \sum_{\{m:\beta^{m+1} \ge j\}} \frac{1}{H^2([\beta^m])}.\end{aligned} \tag{13}$$

Так же, как в (11), используя условие (5), можно показать, что

$$\sum_{\{m:\beta^{m+1} \ge j\}} \frac{1}{H^2([\beta^m])} \le \frac{C}{H^2(j)}. \tag{14}$$

Используя неравенство $\mathsf{D}\, X_n^+ + \mathsf{D}\, D_n^- \le \mathsf{D}\, X_n$, условие (6) и соотношения (12)–(14), заключаем, что для любого $s = 0, 1, \ldots, L$

$$\frac{S^+_{K_s^\pm(m)} - \mathsf{E}\, S^+_{K_s^\pm(m)}}{H(K_s^\pm(m))} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Далее, легко понять, что для любого $n \ge 1$ существуют числа $m = m(n)$, $s = s(n)$ такие, что $0 \le s \le L$, $\beta^m \le n < \beta^{n+1}$ и $\mathsf{E}\, S_n^+/H(n) \in [s\varepsilon, (s+1)\varepsilon]$. В силу определения $K_s^\pm(m)$ имеем

$$K_s^-(m) \le n \le K_s^+(m), \qquad \left| \frac{1}{H(K_s^\pm(m))}\, \mathsf{E}\, S^+_{K_s^\pm(m)} - \frac{1}{H(n)}\, \mathsf{E}\, S_n^+ \right| \le \varepsilon.$$

В силу условия $H(x)/x^\gamma \downarrow$, $\gamma > 0$, имеем

$$\frac{H(K_s^+(m))}{(K_s^+(m))^\gamma} \le \frac{H(n)}{n^\gamma} \le \frac{H(K_s^-(m))}{(K_s^-(m))^\gamma}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\beta_m^\gamma H(K_s^-(m))} \le \frac{1}{H(n)} \le \frac{\beta_m^\gamma}{H(K_s^+(m))}, \qquad \beta_m = \frac{[\beta^{m+1}]}{[\beta^m]}.$$

Используя последнее неравенство и монотонность суммы S_n^+, имеем

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon - \left(1 - \frac{1}{\beta_m^\gamma}\right) C_1 + \frac{1}{\beta_m^\gamma} H(K_s^-(m)) \left(S^+_{K_s^-(m)} - \mathsf{E}\, S^+_{K_s^-(m)} \right) \\
&\le -\varepsilon - \left(1 - \frac{1}{\beta_m^\gamma}\right) \frac{\mathsf{E}\, S^+_{K_s^-(m)}}{H(K_s^-(m))} + \frac{1}{\beta_m^\gamma H(K_s^-(m))} \left(S^+_{K_s^-(m)} - \mathsf{E}\, S^+_{K_s^-(m)} \right) \\
&\le \frac{1}{H(n)} (S_n^+ - \mathsf{E}\, S_n^+) \le \frac{S^+_{K_s^-(m)}}{H(n)} - \frac{\mathsf{E}\, S^+_{K_s^-(m)}}{H(K_s^-(m))} + \varepsilon \\
&\le \frac{\beta_+^\gamma \left(S^+_{K_s^-(m)} - \mathsf{E}\, S^+_{K_s^-(m)} \right)}{H(K_s^+(m))} + (\beta_m^\gamma - 1) C_1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim_{m\to\infty} \beta_m^\gamma = \beta^\gamma$, находим

$$\begin{aligned}
-\varepsilon - \left(1 - \frac{1}{\beta_m^\gamma}\right) &\le \liminf \frac{1}{H(n)} (S_n^+ - \mathsf{E}\, S_n^+) \le \limsup \frac{1}{H(n)} (S_n^+ - \mathsf{E}\, S_n^+) \\
&\le (\beta^\gamma - 1) C_1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\beta > 1$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{S_n^+ - \mathsf{E}\, S_n^+}{H(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Аналогично доказывается утверждение

$$\frac{S_n^- - \mathsf{E}\, S_n^-}{H(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0, \qquad n \to \infty.$$

Теорема 2 доказана. □

Доказательство теоремы 3. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, заключаем, что для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что

$$\frac{1}{H(n)}\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{X}_k - b_k)\overset{\text{п.н.}}{\to} 0, \qquad n\to\infty,$$

где $\widetilde{X}_k = X_k I(|X_k| \le H(n))$. Применяя теорему 2 к последовательности $\{\widetilde{X}_n, n\ge 1\}$, в силу (9) имеем

$$\frac{1}{H(n)}\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{X}_k - b_k) = \frac{1}{H(n)}\sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{X}_k - \mathsf{E}\widetilde{X}_k\right) + \frac{1}{H(n)}\sum_{k=1}^{n}(\mathsf{E}\widetilde{X}_k - b_k)\overset{\text{п.н.}}{\to} 0.$$

Теорема 3 доказана. □

Следствие 2 вытекает непосредственно из теоремы 3, если выбрать $H(x) = x$, $b_k \equiv 0$, $k\ge 0$.

Следствие 3 вытекает из следствия 2 и теоремы 2 из [5].

Література

1. H. Cohn, *On a class of dependent random variables*, Rev. Roum. Math. Pures. et Appl. 10 (1965). № 10, 1593–1606.
2. W. Stout, *Almost sure convergence*, Academic Press, New York, 1974.
3. S. Csörgö, K. Tandori, and V. Totik, *On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables*, Acta Math. Hung. 42 (1983), № 3–4, 319–330.
4. С. А. Утев, *Неравенства для сумм слабо зависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности*, Предельные теоремы для сумм случайных величин, т. 3, Новосибирск, 1984, стр. 50–77.
5. Ш. Шарахметов, *Неравенства для сумм бесконечномерных слабозависимых случайных величин*, Асимптотические методы в теории вероятностей и математической статистике, "ФАН", Ташкент, 1988, стр. 202–208.
6. K. Tandori, *Bemerkung zum gesetzt der groben zuhnlen*, Periodica Math. Hung. (1972), № 2, 33–39.
7. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1987.

Узбекистан, Ташкент Ташкентский экономический университет

Надійшла 18.05.93