Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 1–5

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 1–5

ПРО СТРУКТУРУ ПОЛІНОМІВ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗКЛАДІВ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ТА ОЦІНКИ ДИСПЕРСІЇ

УДК 519.21

Т. О. БАРДАДИМ

Резюме. Розглянуто поліноми асимптотичних розкладів оцінки найменших квадратів та оцінки дисперсії у нелінійній регресійній моделі. Знайдено структуру коефіцієнтів, що залежать від похідних функції регресії.

1. Вступ

В роботах [1]–[2] було доведено, що асимптотичні розклади (а.р.) оцінки найменших квадратів та оцінки дисперсії являються однорідними векторними поліномами від випадкових змінних спеціального виду з рівномірно обмеженими коефіцієнтами. Там же були знайдені співвідношення для обчислення цих поліномів. У даній роботі на основі цих рекурентних співвідношень виявлено структуру коефіцієнтів, що залежать від похідних функції регресії. Така інформація необхідна при одержані а.р. інших функціоналів, наприклад, функціоналів методів складного ножа й кроспервірки, для ефективного розподілу пам'яті при чисельній реалізації алгоритмів, що базуються на цих розкладах та інших.

2. Постановка задачі та основні позначення

Нехай $\boldsymbol{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $\mathcal{B}^n$ — σ-алгебра його борелівських підмножин. Нашу увагу буде зосереджено на статистичних експериментах $\{\boldsymbol{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathsf{P}_\theta^n, \theta \in \Theta\}$, породжених спостереженнями $X = (X_1, \dots, X_n)$ вигляду

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

В запису (1) $g(j, \theta)$, $j = 1, \dots, n$, — невипадкові функції, що визначені на Θ^c, Θ^c-замикання в $\boldsymbol{R}^q$ відкритої множини $\Theta \subset \boldsymbol{R}^q$, $\{\varepsilon_j\}$ — незалежні випадкові величини (в.в.) з однією й тою ж функцією розподілу $P(x)$, що не залежить від θ, та дисперсією σ^2.

Означення. Оцінкою найменших квадратів (о.н.к.) невідомого параметра $\theta \in \Theta^c$, одержаною за спостереженнями $X_1, \dots, X_n$ вигляду (1), називається будь-який випадковий вектор $\hat\theta_n = \hat\theta_n(X_1, \dots, X_n) \in \Theta^c$, для якого

$$L_n(\hat\theta_n) = \inf_{\theta \in \Theta^c} L_n(\theta), \qquad L_n(\theta) = \sum_{j=1}^n [X_j - g(j, \theta)]^2 .$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 62J02; Secondary 62J99.

Робота фінансується Державним комітетом України з питань науки й технологій

Для оцінки дисперсії помилки спостережень буде використовуватись статистика

$$Q_n(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[X_j - g(j,\hat{\theta}_n)\right]^2. \tag{2}$$

Припустимо, що у функцій $g(j,\theta)$ для кожного j існують та неперервні в Θ^c всі частинні похідні за змінними $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_q)$ до порядку $k \geq 2$ включно. Нехай $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_q)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i$, $g^{(\alpha)}(\theta) = (\partial^{|\alpha|}/\partial^{\alpha_1}\theta_1\cdots\partial^{\alpha_q}\theta_q)g$. Будемо користуватися також іншим записом похідних: для $r = 1,\ldots,q$ та $i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,q\}$ нехай $g_{i_1\ldots i_r}(\theta) = (\partial^r/\partial\theta_{i_1}\ldots\partial\theta_{i_r})g$.

Нехай

$$I_n(\theta) = \left(n^{-1}\sum_{j=1}^{n} g_i(j,\theta)g_l(j,\theta)\right)_{i,l=1}^{q},$$

а $\Lambda_n(\theta) = \left(\Lambda_n^{il}(\theta)\right)_{i,l=1}^{q}$ — це обернена до $I_n(\theta)$ матриця.

Введемо позначення:

$$d(\alpha;\theta) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(g^{(\alpha)}(j,\theta)\right)^2\right)^{1/2}$$

та

$$b_{i_1\ldots i_r}(\theta) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j g_{i_1\ldots i_r}(\theta),$$

$$b^{(\alpha)}(\theta) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j g^{(\alpha)}(\theta)$$

для $l = 1,2\ldots.$

Нехай $Q \subseteq \Theta$ це деякий компакт, $\lambda_{\min}(A)$ — найменше власне число симетричної додатно визначеної матриці A.

$$\Phi_{\alpha n}(u_1,u_2) = \sum_{j=1}^{n}\left[g^{(\alpha)}(j,\theta+u_1) - g^{(\alpha)}(j,\theta+u_2)\right]^2,$$

$$\mu_r = \mathsf{E}\,|\varepsilon_j|^r, \qquad m_r = \mathsf{E}\,\varepsilon_j^r, \qquad s(R) = \{u \in \boldsymbol{R}^q\colon |u| < R\},$$

$$U(\theta) = \Theta - \theta.$$

Покажемо також

$$\Pi_{(i_1)(i_2i_3)}(\theta) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} g_{i_1}(j,\theta)g_{i_2i_3}(j,\theta),$$

$$\Pi_{(i_1)(i_2i_3i_4)}(\theta) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} g_{i_1}(j,\theta)g_{i_2i_3i_4}(j,\theta), \quad \text{і т.д.}$$

Приймемо постійно використовувану надалі домовленість: якщо в добутку двох або більшого числа співмножників який-небудь індекс зустрічається двічі, то це означає підсумування за всіма значеннями цього індекса від 1 до q. Наприклад,

$$\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2i_3}b_{i_1i_2}b_{i_3} = \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{q}\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2i_3}b_{i_1i_2}b_{i_3} \qquad \text{і т.п.}$$

В роботах [1]–[2] наведено умови регулярності, за яких справедливі теореми розподілу 3:

I(k). Для довільного $R > 0$ існують такі константи $c_i = c_i(\alpha, R) < \infty$, $i = 1, 2$, що
  1) $\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{u\in s^c(R)\cap U^c(\theta)} n^{-1}d^2(\alpha;\theta+u) \le c_1$, $|\alpha| = 1,\ldots,k$;
  2) $\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{u_1,u_2\in s^c(R)\cap U^c(\theta)} n^{-1}\Phi_{\alpha n}(u_1,u_2)|u_1-u_2|^{-2} \le c_2$, $|\alpha| = k$.

II(k). $\underline{\lim}_{n\to\infty}\inf_{\theta\in\Theta} n^{-1}d_n^2(\alpha,\theta) > 0$ для всіх $|\alpha| = 2,\ldots,k$ $g^{(\alpha)}(j,\theta) \not\equiv 0$.

III(k,m). $\overline{\lim}_{n\to\infty}\inf_{\theta\in\Theta} n^{-1}\sum_{j=1}^{n} g^{(\alpha)}(j,\theta)^m < \infty$, $|\alpha| = 1,\ldots,k$.

IV. $\underline{\lim}_{n\to\infty}\inf_{\theta\in\Theta}\lambda_{\min}(I_n(\theta)) \ge \lambda_0 > 0$.

V(m). $\mu_{m+\delta} < \infty$ для деякого $\delta > 0$.

VI(m). $\sup_{\theta\in\Theta}\mathsf{P}_\theta^n\{|\hat\theta_n-\theta| \ge r\} = o(n^{-(m-2)/2})$ при $n\to\infty$ для довільного $r > 0$.

3. Теореми про структуру поліномів асимптотичних розкладів

Теорема 1. *Нехай для цілого $m \ge 3$ виконані умови* I(k), II(k), III(k,m), IV, V(m). *Тоді існує константа $c_1 > 0$, така, що для оцінки найменших квадратів має місце а.р.*

$$\sup_{\theta\in\Theta}\mathsf{P}_\theta^n\left\{\left|n^{1/2}(\hat\theta_n-\theta)-\sum_{\nu=0}^{k-2}n^{-\nu/2}h_{\nu n}(\theta)\right| > c_1 n^{-(k-1)/2}\log^{k/2}n\right\}$$
$$= o\left(n^{-(k-1)/2}\right), \tag{3}$$

де $h_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 0,\ldots,k-2$ — однорідні векторні поліноми степені $\nu+1$ від випадкових змінних $b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1,\ldots,\nu+1$, з рівномірно обмеженими по $\theta\in Q$ й n коефіцієнтами. Для поліномів $h_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 0,\ldots,k-2$, справедливі рекурентні співвідношення [3]:

$$2\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} 1/r!\, b_{ii_1\cdots i_r}(\theta)h^{i_1}_{\alpha_1 n}(\theta)\cdots h^{i_r}_{\alpha_r n}(\theta)$$
$$= 2\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} 1/r!\, a_{ii_1\cdots i_r}(\theta)h^{i_1}_{\alpha_1 n}(\theta)\cdots h^{i_r}_{\alpha_r n}(\theta), \qquad i = 1,\ldots,q, \tag{4}$$

де $a_{ii_1\ldots i_r}(\theta) = \mathsf{E}_\theta^n(L_n(\theta))_{ii_1\ldots i_r}$, $\alpha(r)$ — цілочислові вектори, що при кожному r мають r координат. Зокрема,

$$h_{0n} = \left(\Lambda_n^{ii_1}b_{i_1}\right)_{i=1}^q \tag{5}$$

$$h_{1n} = \left(\Lambda_n^{ii_1}\Lambda_n^{i_2i_3}\left(b_{i_1i_2}b_{i_3} - \frac{1}{4}\Lambda_n^{i_4i_5}a_{i_1i_2i_4}b_{i_3}b_{i_5}\right)\right)_{i=1}^q \tag{6}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 й умова* IV(m). *Тоді існує константа $c_2 > 0$, така, що для оцінки дисперсії* (2) *має місце а.р.*

$$\sup_{\theta\in\Theta}\mathsf{P}_\theta^n\left\{\left|n^{1/2}(Q_n-\sigma^2)-\sum_{\nu=0}^{k-2}n^{-\nu/2}P_{\nu n}(\theta)\right| > c_2 n^{-(k-1)/2}\log^{k/2}n\right\}$$
$$= o\left(n^{-(m-2)/2}\log^{m/2}n\right), \tag{7}$$

де $P_{\nu n}(\theta) = A_{\nu n}(\theta) - 2B_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 1,\ldots,k-2$ — однорідні поліноми степені $\nu+1$ відносно випадкових величин $b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1,\ldots,\nu$, з рівномірно обмеженими по

$\theta \in Q$ та n коефіцієнтами, причому

$$A_{\nu n}(\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} 1/r!\, a_{i_1\dots i_r}(\theta) h^{i_1}_{\alpha_1 n}(\theta) \cdots h^{i_r}_{\alpha_r n}(\theta), \tag{8}$$

$$B_{\nu n}(\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} 1/r!\, b_{i_1\dots i_r}(\theta) h^{i_1}_{\alpha_1 n}(\theta) \cdots h^{i_r}_{\alpha_r n}(\theta). \tag{9}$$

Зокрема,

$$P_{1n} = -\Lambda^{ij}_n b_i b_j, \qquad P_{2n} = \Lambda^{i_1 j_1}_n \Lambda^{i_2 j_2}_n \Lambda^{i_3 j_3}_n b_{j_1} b_{j_2} b_{j_3} - \Lambda^{i_1 j_1}_n \Lambda^{i_2 j_2}_n b_{i_1 i_2} b_{j_2} b_{j_3}.$$

Зауваження. Неважко показати, що математичні сподівання похідних функціоналу найменших квадратів $L_n(\theta)$ мають вигляд

$$a_{i_1,\dots,i_r}(\theta) = 2 \sum_{m^1 \cup m^2 = \{i_1,\dots,i_r\}} \Pi_{(m^1)(m^2)}(\theta). \tag{10}$$

Підсумування в (10) проводиться по всіх можливих розбиттях множини індексів $\{i_1,\dots,i_r\}$ на дві частини. Через це в доведених нижче теоремах замість величин $a_{i_1,\dots,i_r}(\theta)$ з'являються всілякі $\Pi_{(m^1)(m^2)}(\theta)$.

У наступній теоремі знайдено структуру поліномів розкладу оцінки найменших квадратів.

Теорема 3. *При виконанні умов теореми 1 поліноми $h_{\nu n}(\theta)$ розкладу (3) мають таку структуру:*

$$h_{\nu n}(\theta) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\{i,j\}} c(\nu,\mu) \prod_{r=1}^{\nu+\mu+1} \Lambda^{i_r j_r}_n \prod_{r=1}^{\mu} \Pi_{(m^1_r)(m^2_r)}(\theta) \prod_{r=1}^{\nu+1} b^{(\alpha_r)}(\theta),$$

де $\sum_{\{i,j\}}$ означає підсумовування за різноманітними розбиттями множини $\{i_2,\dots, i_{\nu+\mu+1}\} \cup \{j_1,\dots,j_{\nu+\mu+1}\}$ на $\bigcup_{r=1}^{\mu}\left((m^1_r)\cup(m^2_r)\right) \cup \bigcup_{\gamma=1}^{\nu+1}(\alpha_\gamma)$, $c(\nu,\mu)$ — невипадкові сталі коефіцієнти.

Доведення теореми 3. Позначимо через $P_{\nu n}$ клас поліномів, що мають вигляд (11). Доведемо індукцією по ν що поліноми $h_{\nu n}(\theta)$, одержані за допомогою рекурентних співвідношень (4), належать класу $P_{\nu n}$. Для $\nu = 0$ та $\nu = 1$ це випливає з (5) та (6). Нехай це вірно для всіх $\nu \le \nu^*$. Тоді, згідно з (4),

$$\begin{aligned} h_{\nu^*+1} = \Lambda^{ij}_n & \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu^*+1} 1/r!\, b_{j i_1\dots i_r}(\theta) h^{i_1}_{\alpha_1 n}(\theta) \cdots h^{i_r}_{\alpha_r n}(\theta) \\ & - \frac{1}{2}\Lambda^{ij}_n \sum_{\substack{r+|\alpha(r)|=\nu^*+2 \\ r>1}} 1/r!\, a_{j i_1\dots i_r}(\theta) h^{i_1}_{\alpha_1 n}(\theta) \cdots h^{i_r}_{\alpha_r n}(\theta). \end{aligned} \tag{12}$$

В першій сумі (12) з добутку $h^{i_1}_{\alpha_1 n}(\theta) \cdots h^{i_r}_{\alpha_r n}(\theta)$ в силу припущення індукції ми одержимо одночлени вигляду

$$\prod_{\gamma=1}^{r} \left(\prod_{k=1}^{\alpha_\gamma+\mu_\gamma+1} \Lambda^{i_k j_k}_n \prod_{k=1}^{\mu_\gamma} \Pi_{(m^1_k)(m^2_k)}(\theta) \prod_{k=1}^{\alpha_\gamma+1} b^{(\alpha_k)}(\theta) \right), \qquad 0 \le \mu_\gamma \le \alpha_\gamma. \tag{13}$$

Оскільки $r + |\alpha(r)| = \nu^* + 1$, це дає

$$\prod_{k=1}^{\nu^*+|\mu|+1} \Lambda^{i_k j_k}_n \prod_{k=1}^{|\mu|} \Pi_{(m^1_k)(m^2_k)}(\theta) \prod_{k=1}^{\nu^*+1} b^{(\alpha_k)}(\theta), \qquad 0 \le |\mu| = \sum_{k=1}^{r} \mu_k \le |\alpha(r)|,$$

а множення на $1/r!\,\Lambda_n^{ij} b_{ji_1\ldots i_r}$ приводить нас до одночленів потрібної структури. Залишається розібратися з наборами індексів. В одночленах полінома $h^i_{\nu^*+1}$, одержаних з першої суми (12), використовуються індекси

$$\{j\}\cup\{i_1\ldots i_r\}\cup\bigcup_{k=1}^{r}\left(\{i_2^k\ldots i^k_{\alpha_k+\mu_k+1}\}\cup\{j_1^k\ldots j^k_{\alpha_k+\mu_k+1}\}\right),$$

де k-й набір індексів з'являється із полінома $h^{i_k}_{\alpha_k n}(\theta)$. Перенумеруємо послідовно набори індексів i та j, приєднуючи i_k, $k=1,\ldots,r$ як i_1^k в елементи об'єднання по k. Оскільки $r+|\alpha(r)|=\nu^*+1$, виходить, що в одночленах полінома $h^i_{\nu^*+1}$, одержаних з першої суми (12), будуть використані різноманітні розбиття набору індексів $\{i_1\cdots i_{\nu^*+|\mu|+1}\}\cup\{j\}\cup\{j_1\cdots j_{\nu^*+|\mu|+1}\}$, що й треба було довести. Отже цей поліном буде належать класу $P_{\nu^*+1,n}$. (Зауважимо, зокрема, що одночлени з $\mu=\nu^*+1$ тут не з'являються взагалі.)

У другій сумі, де $r+|\alpha(r)|=\nu^*+2$ й $r>1$, добутки $\prod_{r=1}^{\nu^*+2} b^{(\alpha_r)}(\theta)$ з'являться із співмножниками $\prod_{r=1}^{\nu^*+|\mu|+1}\Lambda_n^{i_rj_r}\cdot\prod_{r=1}^{\mu}\Pi_{(m_r^1)(m_r^2)}$, $|\mu|\le\nu^*$ (бо $r>1$, отже $|\alpha(r)|\le\nu^*$). А після множення на Λ_n^{ji} й $a_{ii_1\ldots i_r}$ добуток опиниться у класі $P_{\nu^*+1,n}$. Використані тут набори індексів можна відслідити так само, як у першій сумі. □

Аналогічно доводиться теорема про поліноми а.р. оцінки дисперсії.

Теорема 4. *При виконанні умов теореми 2 поліноми $P_{\nu n}(\theta)$ розкладу (7) мають таку структуру:*

$$P_{\nu n}(\theta)=\sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{\{i,j\}}\tilde c(\nu,\mu)\prod_{r=1}^{\nu+\mu}\Lambda_n^{i_rj_r}\cdot\prod_{r=1}^{\mu}\Pi_{(m_r^1)(m_r^2)}(\theta)\cdot\prod_{r=1}^{\nu+1}b^{(\alpha_r)}(\theta),$$

де $\sum_{\{i,j\}}$ означає підсумовування за різноманітними розбиттями множини $\{i_2,\ldots,i_{\nu+\mu}\}\cup\{j_1,\ldots,j_{\nu+\mu}\}$ на $\bigcup_{r=1}^{\mu}\left((m_r^1)\cup(m_r^2)\right)\cup\bigcup_{\gamma=1}^{\nu+1}(\alpha_\gamma)$, $\tilde c(\nu,\mu)$ — невипадкові сталі коефіцієнти.

Відміна від поліномів $h_{\nu n}(\theta)$ полягає в тому, що в одночленах з (13) на один співмножник $\Lambda_n^{i_rj_r}$ менше μ змінюється тільки до $\nu-1$. Дійсно, згідно з (7), члени, що відповідають $\mu=\nu$, можуть з'явитися тільки з $A_{\nu n}$ (див. (8)–(9)), так що в кінцевому виразі повинен зустрітися добуток

$$\Lambda_n^{i_rj_r}\cdot\Pi_{(j_r)(k_r)}=\Lambda_n^{i_rj_r}I_n^{j_rk_r}=\mathbf{I}_q^{i_rk_r},$$

де $\mathbf{I}_q$ — одинична матриця.

Література

1. А. В. Иванов, *Теория оценивания параметров нелинейных моделей регрессии*, Докторская диссертация. Защищена 18.11.91. Утверждена 06.03.92; 0357000782, Киев, 1991.
2. Т. А. Бардадым, А. В. Иванов, *Асимптотические разложения, связанные с оценкой дисперсии ошибки наблюдения для модели "сигнал плюс шум"*, Теория вероятност. и математ. статист. **33** (1985), 11–20.
3. Ю. Д. Григорьев, *Статистические выводы в нелинейном регрессионном анализе*, НЭТИ, Новосибирск, 1992.

252650, Київ, проспект Академіка Глушкова, 40, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України

Надійшла 06.09.93