Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 6–16

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 6–16

СТОХАСТИЧНИЙ ВАРІАНТ ТЕОРЕМ В. П. МАСЛОВА

УДК 519.21

Б. В. БОНДАРЄВ

Резюме. В гільбертовому просторі H досліджується слабка збіжність розв'язків операторних рівнянь $A_n(\omega)x = v_n(\omega)$ до розв'язку рівняння $Ax = v$, де $A_n(\omega)$ — послідовність стохастичних лінійних операторів, $v_n(\omega)$ — послідовність стохастичних елементів, збіжних (в деякому ймовірнісному розумінні) до невипадкового оператора A та випадкового елемента v.

В роботі [1] вивчалась така задача: нехай A_n — послідовність лінійних операторів, які діють з H в H (тут H — гільбертів простір) і мають одну й ту ж область означення $\mathcal{D}(A_n) = \mathcal{D}$.

Розглядалась послідовність розв'язків

$$A_n x_n = v_n \tag{1}$$

і припускалось, що як послідовність операторів A_n, так і послідовність v_n правих частин рівнянь збігаються (в деякому розумінні) до оператора A та до елемента v відповідно. Поряд з рівнянням (1) розглядалось також граничне рівняння

$$Ax = v. \tag{2}$$

Виникало питання: яким умовам слід підкорити послідовність операторних рівнянь (1), щоб послідовність їх розв'язків x_n збігалась (в деякому розумінні) до розв'язку граничного рівняння (2)?

В роботі [1] наведені умови, за яких здійснюється слабка збіжність розв'язків (теорема 2.1, с. 28), а також (теорема 22, с. 31) умови, достатні для сильної збіжності x_n до x.

Природним є таке питання: чи не можна встановити аналоги цитованих вище теорем В. П. Маслова для випадку, коли замість A_n та v_n маємо відповідно послідовність стохастичних операторів $A_n(\omega)$ та послідовність випадкових елементів $v_n(\omega)$, збіжних (в деякому ймовірнісному розумінні [2]) відповідно до оператора $A(\omega)$ та елемента $v(\omega)$?

Розглядаючи послідовність стохастичних рівнянь

$$A_n(\omega)x_n = v_n(\omega), \tag{3}$$

намагаємось встановити збіжність (знову ж в деякому ймовірнісному розумінні) послідовності випадкових елементів $x_n(\omega)$ до розв'язку граничної задачі

$$A(\omega)x = v(\omega). \tag{4}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F10.

Перш ніж перейти до викладу відповідних тверджень, які є стохастичними аналогами щойно згаданих теорем В. П. Маслова, наведемо деякі означення та поняття з [2].

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір, (x, y) — скалярний добуток, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих множин з H, $L(H)$ — множина обмежених лінійних операторів з H в H, $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ — основний ймовірнісний простір, $H(\Omega)$ — множина $(\mathfrak{B}, \mathfrak{F})$-вимірних функцій з Ω в H, тобто H-значних випадкових величин. Нехай $L(\Omega, H)$ — множина відображень Ω в $L(H)$, для яких $(A(\omega)x, y)$ є $\mathfrak{F}$-вимірним для всіх $x, y \in H$. Кажуть [2, с. 11], що $A(\omega)x$-відображення H в $H(\Omega)$ визначає сильний оператор, якщо воно лінійне з ймовірністю 1 та неперервне по x за ймовірністю. Множину сильних випадкових операторів позначають через $L_s(\Omega, H)$.

Нехай $A(\omega) \in L_s(\Omega, H)$. Тоді $(A(\omega)x, y)$ визначає відображення $H \times H$ в $R(\Omega)$, яке задовольняє умову лінійності відповідної квадратичної форми з імовірністю 1 і неперервності по ймовірності на $H \times H$ цієї квадратичної форми [2, с. 11]. Таке відображення називають слабким випадковим оператором. Таким чином, для сильного оператора визначається наслідок його дії на довільний (невипадковий) елемент $x \in H$, а при означенні слабкого оператора можна лише визначити скалярний добуток.

Будемо говорити [2, с. 31], що послідовність випадкових операторів сильно збігається до випадкового оператора $A(\omega) \in L_s(\Omega, H)$, якщо для будь-яких $x \in H$ та $\delta > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{P}\{\, |A_n(\omega)x - A(\omega)x| > \delta \,\} = 0.$$

Крім того, будемо говорити, що слабкі оператори $A_n(\omega)$ слабко збігаються до $A(\omega)$, якщо

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{P}\{\, |A_n(\omega)x, y) - (A(\omega)x, y)| > \delta \,\} = 0 \qquad \forall\, x, y \in H.$$

Поряд з відомим поняттям [3] слабкої збіжності мір в гільбертовому просторі використовуватимемо наступне

Означення. Будемо говорити, що послідовність випадкових елементів $v_n(\omega)$ слабко збігається в слабкому розумінні до випадкового елемента $v(\omega)$, якщо

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{P}\{\, (f, v_n(\omega)) < x \,\} = \mathsf{P}\{\, (f, v(\omega)) < x \,\} \qquad \forall\, f \in H$$

в будь-якій точці неперервності розподілу $\mathsf{P}\{\, (f, v(\omega)) < x \,\}$.

Теорема 1. *Нехай $A_n(\omega)$ — послідовність сильних самоспряжених випадкових операторів з однією й тією ж областю означення $\mathcal{D}$, всюди щільною в H. Нехай $A_n(\omega)$ сильно збігається до невипадкового оператора A і послідовність елементів $v_n(\omega)$ слабко збігається до елемента $v(\omega)$. Припустимо ще, що з імовірністю* 1 *виконується*

$$\|A_n(\omega)x\| \geq \rho(\omega)\|x\|, \qquad 0 < \rho(\omega) \leq +\infty,$$

де $\rho(\omega)$ — випадкова величина така, що

$$\mathsf{P}\{\, \rho^{-1}(\omega) > N \,\} \leq \varepsilon, \qquad N \geq N(\varepsilon).$$

Тоді розв'язок (1) *слабко збігається в слабкому розумінні до елемента*

$$x(\omega) = A^{-1}v(\omega).$$

Доведення. З огляду на умови, яким задовольняють оператори $A_n(\omega)$, існує послідовність обернених операторів $A_n^{-1}(\omega)$ таких, що з імовірністю 1 виконується

$$\|A_n^{-1}(\omega)\| \leq \rho^{-1}(\omega),$$

тобто відображення $\mathcal{D}$ в $R(A)$ є взаємно однозначним.

Доведемо, що існує A^{-1}, обмежений на множині $\overline{R(A)}$, де $\overline{R(A)}$ — замикання області значення A^{-1}, причому

$$\overline{A^{-1}}f = \mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} A_n^{-1}(\omega)f, \qquad f \in \overline{R(A)}.$$

Тут $\overline{A^{-1}}$ — замкнене розширення A^{-1}. Для існування A^{-1} досить довести, що рівняння $Ax = 0$ має єдиний розв'язок $x = 0$. Нехай $x \in \mathcal{D}$ таке, що $Ax = 0$. Оцінимо $\|x\|$. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне мале число. Тоді

$$\mathsf{P}\{\,\|x\| > \varepsilon\,\} = \begin{cases} 1, \|x\| > \varepsilon; \\ 0, \|x\| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{\,\|x\| > \varepsilon\,\} &= \mathsf{P}\{\,\|A_n^{-1}(\omega)A_n(\omega)x\| > \varepsilon\,\} \\ &\le \mathsf{P}\{\,\|A_n^{-1}(\omega)\| \cdot \|A_n(\omega)\| > \varepsilon\,\} \le \mathsf{P}\{\,\|A_n(\omega)x\| > \varepsilon\rho(\omega)\,\} \\ &\le \mathsf{P}\{\,\|A_n(\omega)x - Ax\| > \varepsilon/2N\,\} + \mathsf{P}\{\,\rho^{-1}(\omega) > N\,\} \end{aligned}$$

(через те, що $\mathsf{P}\{\,\|Ax\| > \varepsilon/2N\,\} = 0$).

Перейшовши в останній нерівності зліва та справа до границі при $n \to +\infty$, з огляду на сильну збіжність послідовності $A_n(\omega)$ до A та на довільність $N > 0$ дістанемо

$$\mathsf{P}\{\,\|x\| > \varepsilon\,\} = 0.$$

Звідси з урахуванням вибору $\varepsilon > 0$ маємо $\|x\| = 0$, тобто $x = 0$.

Покажемо, що

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} A_n^{-1}(\omega)f = A^{-1}f, \qquad f \in R(A).$$

Оскільки $A^{-1}f \in \mathcal{D}$ для $f \in R(A)$, оператор $A_n(\omega)A^{-1}f$ означений для всіх $f \in R(A)$. Нехай

$$h_n(\omega) = A_n(\omega)[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]f = f - A_n(\omega)A^{-1}f.$$

Оскільки $A^{-1}f$ — невипадковий елемент, а $A_n(\omega)$ сильно збігається до A, маємо $\|h_n(\omega)\| \to 0$ за ймовірністю при $n \to +\infty$.

Отже, для будь-якого $f \in R(A)$

$$\|(A_n^{-1}(\omega) - A^{-1})f\| = \|A_n^{-1}(\omega)h_n(\omega)\| \le \rho^{-1}(\omega)\|h_n(\omega)\| \to 0$$

за ймовірністю, тобто $A_n^{-1}(\omega)$ сильно збігається на $R(A)$ до A^{-1} (тут $A_n^{-1}h_n = \sum_{i=1}^{+\infty}(h_n(\omega), e_i)A_n^{-1}(\omega)e_i$). За теоремою Банаха–Штейнгауза $A_n^{-1}(\omega)$ сильно збігається до $\overline{A^{-1}}$ на $\overline{R(A)}$, причому

$$\|A^{-1}f\| \le \|(A_n^{-1}(\omega) - A^{-1})f\| + \rho^{-1}(\omega)\|f\|.$$

З огляду на сильну збіжність $A_n^{-1}(\omega)$ до A^{-1} маємо

$$\|A^{-1}\| \le \rho^{-1} < +\infty.$$

Нехай

$$x_n(\omega) = A_n^{-1}(\omega)v_n(\omega), \qquad x(\omega) = A^{-1}v(\omega).$$

Покажемо, що за розподілом $(x_n(\omega), f)$ збігається до $(x(\omega), f)$ для будь-якого $f \in H$. Оскільки оператори $A_n^{-1}(\omega)$ та A^{-1} самоспряжені, для будь-якого замкненого B з $\boldsymbol{R}^1$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{\,(x_n(\omega), f) \in B\,\} &= \mathsf{P}\{\,([A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]v_n(\omega), f) + (A^{-1}v_n(\omega), f) \in B\,\} \\ &\le \mathsf{P}\{\,(A^{-1}f, v_n(\omega)) \in B_\delta\,\} + \mathsf{P}\{\,|([A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]f, v_n(\omega))| > \delta\,\}, \end{aligned}$$

де
$$B_\delta = \{\, x : \rho(x, B) \le \delta \,\}.$$

Оскільки з слабкої збіжності $v_n(\omega)$ до $v(\omega)$ випливає [3] слабка компактність мір, породжених елементами $v_n(\omega)$, а з цього маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компакт K_ε такий, що
$$\mathsf{P}\{\, v_n(\omega) \notin K_\varepsilon \,\} \le \varepsilon,$$
то
$$\mathsf{P}\{\, (x_n(\omega), f) \in B \,\} \le \mathsf{P}\{\, \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]f\| \cdot \|v_n(\omega)\| > \delta, v_n(\omega) \in K_\varepsilon \,\} \\ + \mathsf{P}\{\, v_n(\omega) \notin K_\varepsilon \,\} + \mathsf{P}\{\, (A^{-1}f, v_n(\omega)) \in B_\delta \,\}.$$

Перейшовши до границі в останній нерівності, з слабкої збіжності $v_n(\omega)$ до $v(\omega)$, оскільки B_δ замкнена, дістаємо
$$\varlimsup_{n\to+\infty} \mathsf{P}\{\, (x_n(\omega), f) \in B \,\} \le \varepsilon + \mathsf{P}\{\, (f, x(\omega)) \in B_\delta \,\}.$$

Оскільки B замкнена, то $B_\delta \downarrow B$ при $\delta \to 0$. Пам'ятаючи, що $\varepsilon > 0$ довільне, одержуємо [4, с. 39] слабку збіжність $(x_n(\omega), f)$ до $(x(\omega), f)$. Теорему доведено. □

Зауваження. В багатьох випадках більш зручно перевіряти умову $(A_n(\omega)x, x) \ge \rho(\omega)\|x\|^2$, з якої випливає нерівність
$$\|A_n(\omega)x\| \ge \rho(\omega)\|x\|.$$

Наклавши сильніші обмеження на послідовність операторів $A_n(\omega)$, можна встановити слабку збіжність $x_n(\omega)$ до елемента $x(\omega)$ в розумінні слабкої збіжності відповідних мір.

Теорема 2. *Нехай $A_n(\omega)$ — послідовність сильних випадкових операторів, що мають одну й ту ж область означення $\mathcal{D}$, всюди щільну в H. Нехай $A_n(\omega)$ сильно збігається до невипадкового оператора A, послідовність $v_n(\omega)$ слабко збігається до елемента $v(\omega)$. Крім того, послідовність $A_n^{-1}(\omega)$ існує і обмежена в сукупності за нормою Гільберта–Шмідта, тобто*
$$\|A_n^{-1}(\omega)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|A_n^{-1}(\omega)e_i\|^2 \le C(\omega) < +\infty, \qquad \mathbf{M}\, C(\omega) < +\infty.$$

Тоді

1) *існує обернений оператор A^{-1}, обмежений на множині $\overline{R(A)}$, де $\overline{R(A)}$ — замикання області означення оператора A^{-1};*
2) $\overline{A^{-1}f} = \mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} A_n^{-1}(\omega)f$, $f \in \overline{R(A)}$;
3) *послідовність розв'язків $x_n(\omega)$ збігається в розумінні збіжності породжених мір до $x(\omega)$, де*
$$x(\omega) = A^{-1}v(\omega).$$

Доведення. Перші два твердження встановлюються аналогічно тому, як це зроблено в теоремі 1. Доведемо третє.

Оскільки $v_n(\omega)$ слабко збігається до $v(\omega)$, існує компакт K_ε такий, що
$$\mathsf{P}\{\, v_n(\omega) \notin K_\varepsilon \,\} \le \varepsilon \qquad \forall\, n.$$

Покладемо
$$K'_\varepsilon = \{\, y : y = A^{-1}x, x \in K_\varepsilon \,\}.$$

Нехай B — деяка замкнена множина, $B_\delta = \{ x : \rho(x, B) \le \delta \}$. Тоді з огляду на необхідність умов слабкої збіжності $v_n(\omega)$ до $v(\omega)$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathsf{P}\{ v_n(\omega) \in B \} \le \mathsf{P}\{ v(\omega) \in B \}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{ x_n(\omega) \in B \} &= \mathsf{P}\{ [A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]V_n(\omega) + A^{-1}v_n(\omega) \in B \}\\ &\le \mathsf{P}\{ \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]v_n(\omega)\| > \delta \} + \mathsf{P}\{ \eta_n(\omega) \in B_\delta \}\end{aligned}$$

(тут $\eta_n(\omega) = A^{-1}v_n(\omega)$), для доведення слабкої збіжності досить [4] довести, що

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathsf{P}\{ \eta_n(\omega) \in B_\delta \} \le \mathsf{P}\{ x(\omega) \in B_\delta \},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\{ \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]v_n(\omega)\| > \delta \} = 0.$$

Щоб встановити перше з цих співвідношень, досить довести слабку компактність множини мір μ_{η_n}, що відповідають η_n, та збіжність характеристичних функціоналів.

Оскільки

$$\mathsf{P}\{ \eta_n(\omega) \in K'_\varepsilon \} = \mathsf{P}\{ A^{-1}v_n(\omega) \in K'_\varepsilon \} \ge \mathsf{P}\{ v_n(\omega) \in K_\varepsilon \} \ge 1 - \varepsilon,$$

множина мір μ_{η_n} слабко компактна. Очевидно також, що

$$\begin{aligned}\chi^{\eta_n}(f) &= \mathbf{M}\exp\{i(f, \eta_n)\} = \mathbf{M}\exp\{i([A^*]^{-1}f, v_n(\omega))\} = \chi^{v_n}([A^*]^{-1}f) \to \chi^{v}([A^*]^{-1}f)\\ &= \mathbf{M}\exp\{i(f, x)\},\end{aligned}$$

тобто η_n слабко збігається до $x(\omega) = A^{-1}v(\omega)$.

Далі, оскільки

$$[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]v_n(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty}(v_n(\omega), e_i)[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]e_i,$$

маємо

$$\begin{aligned}\|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]v_n(\omega)\| &\le \|v_n(\omega)\| \sum_{i=1}^{N} \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]e_i\|\\ &\quad + \left[\sum_{i=N+1}^{+\infty} (v_n(\omega), e_i)^2\right]^{1/2} \|A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}\|_2.\end{aligned}$$

Тут $\|A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}\|_2$ — норма Гільберта–Шмідта.

З останньої нерівності одержуємо

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{ \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]v_n(\omega)\| > \delta \}\\ &\quad\le 2\mathsf{P}\{ v_n(\omega) \notin K_\varepsilon \} + \mathsf{P}\left\{ \|v_n(\omega)\| \sum_{i=1}^{N} \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]e_i\| > \frac{\delta}{2}, v_n(\omega) \in K_\varepsilon \right\}\\ &\qquad + \mathsf{P}\left\{ \sum_{i=N+1}^{+\infty} (v_n(\omega), e_i)^2 \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]\|_2^2 > \frac{\delta^2}{4}, v_n(\omega) \in K_\varepsilon \right\}\\ &\quad\le \mathsf{P}\left\{ \sum_{i=1}^{N} \|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]e_i\| > \frac{\delta}{2d_\varepsilon} \right\} + 2\mathsf{P}\{ v_n(\omega \notin K_\varepsilon \} + \varphi_\varepsilon(N)\frac{32c}{\delta^2}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{32c}{\delta^2}\varphi_\varepsilon(N) + 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{N} \mathsf{P}\left\{\|[A_n^{-1}(\omega) - A^{-1}]e_i\| > \frac{\delta}{2d_\varepsilon N}\right\},$$

де

$$\varphi_\varepsilon(N) = \sup_{x\in K_\varepsilon} \sum_{k=N+1}^{+\infty} (x, e_k)^2, \qquad d_\varepsilon = \max_{x\in K_\varepsilon} \|x\|.$$

Оскільки K_ε — компакт в H, то $\varphi_\varepsilon \to 0$ при $N \to +\infty$, а звідси з урахуванням сильної збіжності $A_n^{-1}(\omega)$ до A^{-1} та довільності $\varepsilon > 0$ маємо

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathsf{P}\{\, \|A_n^{-1}(\omega)v_n(\omega) - A^{-1}v_n(\omega)\| > \delta \,\} = 0.$$

Таким чином,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathsf{P}\{\, x_n(\omega) \in B \,\} \leq \mathsf{P}\{\, x(\omega) \in B_\delta \,\}$$

і з огляду на замкненість B маємо твердження теореми 2. □

В деяких випадках зручніше користуватись обмеженнями не на послідовність $A_n(\omega)$, а на послідовність спряжених операторів $A_n^*(\omega)$.

Теорема 3. *Нехай $A_n^*(\omega)$ — послідовність випадкових лінійних операторів в ґільбертовому просторі H, які мають одну й ту ж область означення $\mathcal{D}$, всюди щільну в H. Нехай $A_n^*(\omega)$ сильно збігається до невипадкового оператора A^* і $v_n(\omega)$ — послідовність випадкових елементів, яка слабко збігається в розумінні слабкої збіжності мір до елемента $v(\omega)$. Якщо для оператора A^* вірно*

$$(A^*x, x) \geq \rho\|x\|^2, \qquad \rho > 0,$$

послідовність розв'язків рівняння

$$A_n(\omega)x_n = v_n(\omega)$$

рівномірно по n обмежена за ймовірністю, тобто

$$\sup_n \mathsf{P}\{\, \|x_n(\omega)\| > N \,\} \leq \varepsilon, \qquad N \geq N(\varepsilon),$$

то послідовність розв'язків $x_n(\omega)$ слабко збігається в слабкому розумінні до розв'язку граничного рівняння

$$Ax = v(\omega).$$

Доведення. Для будь-якого $f \in H$ існує інтервал $[a, b)$ такий, що

$$\mathsf{P}\{\, (x_n(\omega), f) \in [a, b) \,\} \geq 1 - \varepsilon$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$. Таким чином, існує підпослідовність індексів $n' \in n$ така, що

$$\lim_{n'\to+\infty} \mathsf{P}\{(x_n(\omega), f) \in B\} = \mathsf{P}\{(x(\omega), f) \in B\}$$

для будь-якого B з нульовою границею за граничним розподілом.

Нехай

$$\chi_{v_n}^f(z) = \mathbf{M}\exp\{iz(v_n(\omega), f)\}, \qquad \chi_{x_n}^f(z) = \mathbf{M}\exp\{iz(x_n(\omega), f)\}$$

— характеристичні функції. З огляду на збіжність розподілів маємо

$$\lim_{n'\to+\infty} \chi_{v_{n'}}^f(z) = \mathbf{M}\exp\{iz(f, v(\omega))\} = \chi_v^f(z),$$
$$\lim_{n'\to+\infty} \chi_{x_{n'}}^{A^*f}(z) = \mathbf{M}\exp\{iz(A^*f, x(\omega))\} = \chi_x^{A^*f}(z),$$

оскільки

$$
\begin{aligned}
&|\chi^{f}_{v_{n'}}(z) - \chi^{A^* f}_{x_{n'}}(z)| \\
&\quad \le \mathbf{M}\,|\exp\{iz([A^*_{n'}(\omega)f - A^* f], x_{n'} - 1\}| I\{\|x_{n'}(\omega)\| \le N_\varepsilon, \|A^*_{n'}(\omega)f - A^* f\| \le \delta\} \\
&\qquad + \mathsf{P}\{\, \|x_n(\omega)\| > N_\varepsilon \,\} + \mathsf{P}\{\, \|A^*_{n'}(\omega)f - A^* f\| > \delta \,\} \\
&\quad \le |z| N_\varepsilon \delta + \varepsilon + \mathsf{P}\{\, \|A^*_{n'}(\omega)f - A^* f\| > \delta \,\}.
\end{aligned}
$$

Тут $I\{\|x_{n'}(\omega)\| \le N_\varepsilon, \|A^*_{n'}(\omega)f - A^* f\| \le \delta\}$ — індикатор.

З огляду на си. ьну збіжність $A^*_n(\omega)$ до A^* та довільності $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ одержуємо

$$\mathbf{M}\exp\{iz(f, v(\omega))\} = \mathbf{M}\exp\{iz(f, Ax(\omega))\},$$

тобто

$$\mathsf{P}\{(f, v(\omega)) \in B\} = \mathsf{P}\{(f, Ax(\omega)) \in B\}$$

для будь-якого B з множини неперервності розподілу

$$F^f(x) = \mathsf{P}\{(f, v(\omega)) < x\}.$$

Оскільки граничне рівняння має єдиний розв'язок, а з довільної послідовності $x_{n''}(\omega)$ можна виділити слабко збіжну послідовність $(x_{n'''}(\omega), f)$ до $(x(\omega), f)$, справедливе твердження теореми. □

Зауваження. В деяких випадках умова рівномірної обмеженості досить легко перевіряється, однак умова строгої додатної обмеженості відповідної квадратичної форми може не виконуватись.

Наведемо приклади застосування теорем 2 та 3.

Приклад 1. Розглянемо на $[0,1]$ крайову задачу

$$
\begin{aligned}
A_n(\omega)x &= f(t) + \zeta_n(t), \\
x(0) &= x(1) = 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

де

$$A_n(\omega)x = -\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1 + \int_0^t \varphi(\xi(ns))\,ds}{1 + tC}x, \qquad t \in [0,1],\ C > 0,$$

$\varphi(x)$ — періодична з періодом 1 невід'ємна функція, випадковий процес $\xi(t)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$
\begin{aligned}
d\xi(t) &= a(\xi(t))\,dt + \sigma(\xi(t))\,dw(t), \\
\xi(0) &= \xi_0.
\end{aligned}
$$

Тут $a(x)$ та $\sigma^2(x) \ge \sigma_0 > 0$ — також періодичні з періодом 1 функції, що задовольняють умову Ліпшица. Послідовність випадкових процесів

$$\zeta_n(t) = \sqrt{n}\int_0^t \eta(ns)\,ds = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{t/n} \eta(s)\,ds,$$

де $\eta(s)$ — стаціонарний у вузькому розумінні випадковий процес, який задовольняє умову сильного або рівномірно сильного перемішування [5] з коефіцієнтом перемішування [6], який досить швидко спадає. Тоді [6] послідовність випадкових процесів $\zeta_n(t)$ слабко збігається при $n \to +\infty$ до вінерового процесу $w(t)$, $t \in [0,1]$.

З огляду на [4] маємо

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \int_0^t \varphi(\xi(ns))\,ds = t\frac{m(\varphi)}{m(1)},$$

де

$$m(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) G_0(x)\, dx.$$

Тут [4]

$$G_0(x) = 2\left[V(1)\int_0^x V(y)\,dy + \int_x^1 V(y)\,dy\right][1 + V(1)\sigma^2(x)V(x)]^{-1},$$
$$V(x) = \exp\left\{-\int_0^x \frac{2a(y)\,dy}{\sigma^2(y)}\right\}.$$

Нехай $\varphi(x)$ така, що $m(\varphi)/m(1) = C$. Таким чином, оператор $A_n(\omega)x$ сильно збігається до оператора

$$Ax = -\frac{d^2x}{dt^2} + x.$$

З огляду на теорію порівняння [8, с. 420] маємо

$$\lambda_k^{(n)}(\omega) \geq \mu_k, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Тут $\lambda_k^{(n)}(\omega)$ та μ_k — відповідно власні числа задачі Штурма–Ліувілля з оператором $A_n(\omega)$ та оператором A_0

$$A_0 x = -\frac{d^2x}{dt^2}$$

з крайовими умовами $x(0) = x(1) = 0$.

Відомо, що функція Ґріна крайової задачі

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad x(0) = x(1) = 0,$$

має вигляд

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s; \\ s(1-t), & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тоді норма Ґільберта–Шмідта оператора $A_n(\omega)$ дорівнює

$$\|A_n(\omega)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{+\infty}[\lambda_i^{(n)}(\omega)]^{-2} \leq \sum_{i=1}^{+\infty}[\mu_i]^{-2} = \int_0^1\int_0^1 K(t,s)\,dt\,ds \leq 1.$$

Легко бачити, що ядро $G(t,s)$ оператора A^{-1}, оберненого до A, має вигляд [9]

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{Sh s Sh(1-t)}{Sh(1)}, & s \leq t \leq 1; \\ \frac{Sh t Sh(1-s)}{Sh(1)}, & 0 \leq t \leq s. \end{cases} \tag{6}$$

Так що розв'язок задачі (5) слабко збігається при $n \to +\infty$ до розв'язку задачі

$$-d\frac{dx}{dt} + x(t)\,dt = f(t) + w(t),$$
$$x(0) = x(1) = 0.$$

Розв'язок останньої можна записати явно

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\,ds + \int_0^1 G(t,s) w(s)\,ds,$$

де $G(t,s)$ визначена співвідношенням (6).

Приклад 2. Розглянемо на $[0,1]$ рівняння

$$-\frac{d}{dt}\left[K(\xi(nt))\frac{dx}{dt}\right] = f(t) + \zeta_n(t), \qquad x(0) = x(1) = 0. \tag{7}$$

Тут $K(x)$ — періодична з періодом 1 функція,

$$0 < k_0 \le K(x) \le k_1 < +\infty.$$

Відомо [10, с. 29], що функція Ґріна для цієї задачі має вигляд

$$G_n(t,s) = \begin{cases} \frac{g_n(s)(g_n(1)-g_n(t))}{g_n(1)}, & 0 \le s \le t; \\ \frac{g_n(t)(g_n(1)-g_n(s))}{g_n(1)}, & t \le s \le 1, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$g_n(t) = \int_0^1 \frac{ds}{K(\xi(ns))}, \qquad \mathrm{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = t\frac{m(1/k)}{m(1)} = t\overline{m},$$

$$A_n^{-1}(\omega)x = \int_0^1 G_n(t,s)x(s)\,ds \xrightarrow{\mathrm{P}} \int_0^1 G(t,s)x(s)\,ds, \qquad n \to +\infty.$$

Тут

$$G(t,s) = \begin{cases} \overline{m}s(1-t), & 0 \le s \le t; \\ \overline{m}t(1-s), & t \le s \le 1. \end{cases} \tag{9}$$

Оскільки $0 < k_0 \le K(x) \le k_1 < \infty$, оператори $[A_n(\omega)]^{-1}$ є операторами Ґільберта–Шмідта, обмеженими невипадковою сталою. Це випливає також з теорем порівняння нашого оператора з оператором

$$-k_0\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad x(0) = x(1) = 0.$$

Таким чином, розв'язок (7) збігається в розумінні збіжності мір до процесу

$$x(t) = \overline{m}\int_0^1 G(t,s)f(s)\,ds + \overline{m}\int_0^1 G(t,s)w(s)\,ds.$$

Тут

$$G(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \le s \le t; \\ t(1-s), & t \le s \le 1, \end{cases}$$

$$\overline{m} = \int_0^1 \frac{G_0(x)\,dx}{K(x)}\left(\int_0^1 G_0(x)\,dx\right)^{-1}.$$

Цей приклад доводить, що послідовність обернених операторів

$$A_n^{-1}(\omega)x = \int_0^1 G_n(t,s)x(s)\,ds,$$

де

$$g_n(t) = \int_0^t \frac{ds}{K(\xi(ns))}$$

— випадковий процес, сильно збігається до оператора

$$A^{-1}x = \overline{m}\int_0^1 G(t,s)x(s)\,ds.$$

Разом з тим відносно збіжності операторів $A_n(\omega)$ можна стверджувати лише слабку збіжність, достатню (див., наприклад, [11]) для слабкої збіжності мір, які відповідають розв'язкам задачі Діріхле, до міри, що відповідає процесу $x(t)$. так що питання про те, які умови слід мати, крім слабкої збіжності операторів, залишається відкритим.

Приклад 3. Розглянемо на $[0,1]$ крайову задачу

$$\begin{gathered} A_n(\omega)x = f(t) + \zeta_n(t), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Тут

$$A_n(\omega)x = -\frac{d^2}{dt^2}\left[x(1 - \int_0^t \varphi(\xi(ns))\,ds\right] + x\int_0^1 \varphi(\xi(ns))\,ds, \qquad \zeta_n(t) \Rightarrow w(t),$$

де $0 < \delta \le \varphi(x) \le \frac{1}{2}$ — періодична з періодом 1 функція, $\xi(t)$ — випадковий процес з прикладу 1.

В цьому випадку

$$A_n^*(\omega)x = -\left(1 - \int_0^t \varphi(\xi(ns))\,ds\right)\frac{d^2x}{dt^2} + x\int_0^1 \varphi(\xi(ns))\,ds.$$

Після множення обох частин (10) на $x\left(1 - \int_0^1 \varphi(\xi(ns))\,ds\right)$ та інтегрування в границях від 0 до 1 одержуємо

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[\frac{d}{dt}x(t)\left(1 - \int_0^1 \varphi(\xi(ns))\,ds\right)\right]^2 dt \\ &\qquad + \int_0^1 \varphi(\xi(ns))\,ds \int_0^1 x^2(t)\left(1 - \int_0^t \varphi(\xi(ns))\,ds\right)\,dt \\ &\quad = \int_0^1 \zeta_n(t)x(t)\left(1 - \int_0^1 \varphi(\xi(ns))\,ds\right) + \int_0^1 f(t)x(t)\left(1 - \int_0^t \varphi(\xi(ns))\,ds\right)\,dt. \end{aligned}$$

Звідси, оскільки $f(x)$ обмежена, маємо

$$\|x_n\| \le [\|\zeta_n\| + \|f\|]^2/\delta.$$

Легко переконатись, що $[A_n(\omega)]^*$ сильно збігається до оператора

$$A^*x = -\left(1 - \frac{m(\varphi)}{m(1)}t\right)\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{m(\varphi)}{m(1)} = -\frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{m(\varphi)}{m(1)}t\right)\frac{dx}{dt}\right],$$

який є самоспряженим, тобто

$$Ax = -\frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{m(\varphi)}{m(1)}t\right)\frac{dx}{dt}\right].$$

Як вже встановлено раніше, оператор

$$A^{-1}(x) = \int_0^1 G(t,s)x(s)\,ds,$$

де

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{g(s)(g(1)-g(t))}{g(1)}, & 0 \le s \le t; \\ \frac{g(t)(g(1)-g(s))}{g(1)}, & t \le s \le 1. \end{cases}$$

Тут

$$g(t) = -\frac{m(1)}{m(\varphi)} \ln\left(1 - \frac{m(\varphi)}{m(1)} t\right).$$

Таким чином, розв'язок задачі (10) слабко збігається в слабкому розумінні до процесу

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\, ds + \int_0^1 G(t,s) w(s)\, ds.$$

Література

1. В. П. Маслов, *Ассимптотические методы в теории возмущений*, "Наука", Москва, 1988.
2. А. В. Скороход, *Случайные линейные операторы*, "Наукова думка", Киев, 1978.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, vol. 1, "Наука", Москва, 1971.
4. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
5. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, "Наука", Москва, 1965.
6. Ю. А. Давыдов, *О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами*, Теория вероятност. и ее применен. 13 (1968), 730–737.
7. О. А. Сафонова, *Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами*, Украинский мат. журнал 44 (1992), № 2, 245–252.
8. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, "Наука", Москва, 1968.
9. В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, "Наука", Москва, 1984.
10. П. П. Забрейко, А. И. Кошелив, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко, *Интегральные уравнения*, "Наука", Москва, 1968.
11. Ю. В. Жауров, *Стохастическое усреднение двухточечной задачи Неймана для квазилинейного дифференциального уравнения*, Теория случайных процессов и ее приложения, Сб. научных трудов, "Наукова думка", Киев, 1990, стр. 55–61.

340055, Донецьк, вул. Університетська, 24, Донецький державний університет

Надійшла 16.03.94