Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 17–28

Teor. Ímovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 17–28

ПРО ДЕЯКІ СИНҐУЛЯРНІ ІНТЕҐРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

УДК 519.21

В. В. БУЛДИГІН ТА О. О. ДИХОВИЧНИЙ

РЕЗЮМЕ. Розвивається метод аналізу асимптотичної поведінки оцінок корреляційних та спектральних характеристик випадкових процесів та полів, який ґрунтується на властивостях синґулярних інтеґралів вигляду багатовимірної згортки, яка має зчеплені арґументи. За допомогою таких інтеґралів зображаються моментні функції оцінок.

Література, присвячена асимптотичній поведінці оцінок спектральних та корреляційних характеристик стаціонарних процесів та полів, зокрема ґауссових, є дуже широкою. Відзначимо, наприклад, роботи Р. Бенткуса [1, 2]. В цих роботах умови слабкої збіжності скінченномірних розподілів інтеґральних функціоналів від періодограми стаціонарного процесу пов'язана з обґрунтуванням збіжності моментних або семіінваріантних функцій. Формули Леонова–Ширяєва [3] дозволяють зображати ці функції у вигляді скінченних сум скінченних добутків синґулярних інтеґралів виду багатовимірних згорток, які мають зчеплені аргументи

$$\int\limits_{R^d}\cdots\int\limits_{R^d} K(x_1-x_2)K(x_2-x_3)\dots K(x_{m-1}-x_m)K(x_m-x_1)\varphi(x_1,\dots,x-m)\,dx_1\cdots dx_m,$$

де K — деяке δ-подібне ядро, що залежить від зв'язаного з об'ємом виборки параметра. Функція φ містить в собі як співмножники спектральні щільності різних порядків. Для ґауссових процесів

$$\varphi(x_1,\dots,x_m)=\varphi_0(x_1,\dots,x_m)\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_1(x_m),$$

де φ_1 — спектральна щільність процесу. При цьому задача зводиться до дослідження таких інтеґралів та доведення їх збіжності до нуля при $m\geq 3$, коли параметр прямує до нескінченності. Саме до такої задачі приводить дослідження асимптотичної поведінки оцінки корреляційної функції. Оригінальний підхід Р. Бенткуса дозволяє встановити необхідну збіжність за умови, що φ обмежена, а в ґауссовому випадку — обмежена спектральна щільність φ_1. Нижче встановлено досить прості умови на ядра K та функції φ, за яких наведені інтеґрали збігаються до нуля. В ґауссовому випадку ці умови дозволяють обмежитись лише умовою інтеґровності в квадраті спектральної щільності. Доведення ґрунтується на нерівностях для багатократних згорток, які мають зчеплені арґументи, і розвиває результати робіт

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 62E20; Secondary 62M10.

Робота виконана при фінансовій підтримці Державного комітету України з питань науки та технологій

авторів [4, 5]. Такі нерівності можуть бути корисними і поза задачею, що розглядається, зокрема, при дослідженні моментних та семіінваріантних функцій кратних стохастичних інтеґралів [6]. Як простий приклад, що ілюструє запропоновану методику, розглянуто нормалізацію скінченномірних розподілів оцінок корреляційної функції однорідного та однорідного та ізотропного полів.

1. Деякі властивості багатократних згорток, які мають зчеплені аргументи

Нехай $\boldsymbol{R}^d$ — d-вимірний арифметичний евклідів простір; $L_p(\boldsymbol{R}^d)$, $p \in [1, \infty)$, — простір, взагалі кажучи, комплекснозначних функцій

$$f = \{f(x), x \in \boldsymbol{R}^d\},$$

інтеґровних за Лебеґом в p-му степені, з нормою

$$\|f\|_p = \left[\int_{\boldsymbol{R}^d} |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}};$$

$L_\infty(\boldsymbol{R}^d)$ — простір обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$. Якщо $p \in [1, \infty)$, то q — число, спряжене до p, тобто $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (при $p = 1$, $q = \infty$).

Розглянемо інтеґрал

$$\int_{\boldsymbol{R}^d} \cdots \int_{\boldsymbol{R}^d} K_1(x_1 - x_2) K_2(x_2 - x_3) \cdots K_{m-1}(x_{m-1} - x_m) K_m(x_m - x_1) \times \varphi_0(x_1, \ldots, x_m - m) \prod_{j=1}^{m} \varphi_j(x_j - j) \, dx_1 \cdots dx_m, \tag{1}$$

де $\|\varphi_0\|_\infty = \sup_{x_1, \ldots, x_m} |\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)| < \infty$. Цей інтеґрал ми будемо позначати символами $I(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m; K_1, \ldots, K_m)$, або $I(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, або просто I.

Лема 1. *Нехай $p \in [1, 2]$, $\varphi_j \in L_p(\boldsymbol{R}^d)$, $K_j \in L_q(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m$. Тоді*

$$|I| \leq \left[\prod_{j=1}^{m} \|K_j\|_q\right] \left[\prod_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_p\right] \|\varphi_0\|_\infty. \tag{2}$$

Лема 2. *Нехай $p \in (2, \infty)$, $\varphi_j \in L_p(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m-2$; $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $j = m-1, m$; $K_j \in L_q(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m-2, m$; $K_{m-1} \in L_p(\boldsymbol{R}^d)$. Тоді*

$$|I| \leq \left[\prod_{j=1}^{m-2} \|K_j\|_q\right] \|K_{m-1}\|_p \|K_m\|_q \left[\prod_{j=1}^{m-2} \|\varphi_j\|_p\right] \|\varphi_{m-1}\|_2 \|\varphi_m\|_2 \|\varphi_0\|_\infty. \tag{3}$$

Лема 3. *Нехай функції $K_j = K_j^{(\alpha)}$, $j = 1, \ldots, m$, залежать від деякого параметра $\alpha \in (0, \infty)$; $K_j^{(\alpha)} \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m$;*

$$I_\alpha(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = I(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m; K_1^{(\alpha)}, \ldots, K_m^{(\alpha)}).$$

Далі, нехай $L \subset L_2(\boldsymbol{R}^d)$ — всюди щільна множина в $L_2(\boldsymbol{R}^d)$. Якщо для всіх $\varphi_j \in L$, $j = 1, \ldots, m$,

$$\lim_{\alpha \to \infty} I_\alpha(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0, \tag{4}$$

та для всіх $j = 1, \ldots, m$

$$\sup_\alpha \left\|K_j^{(\alpha)}\right\|_2 < \infty, \tag{5}$$

то співвідношення (4) *виконується для всіх* $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m$.

Лема 4. *Нехай* $K_j^{(\alpha)} = K^{(\alpha)}$, $j = 1, \ldots, m$. *Якщо*

$$\sup_\alpha \left\| K^{(\alpha)} \right\|_2 < \infty \tag{6}$$

і знайдеться таке $p \in [2, \infty)$, *що*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left\| K^{(\alpha)} \right\|_q^{m-1} \left\| K^{(\alpha)} \right\|_p = 0, \tag{7}$$

то співвідношення (4) *виконується для всіх* $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m$.

Наведені вище твердження допускають узагальнення. Нехай

$$\varphi = \{\varphi(x_1, \ldots, x_m), x_j \in \boldsymbol{R}^d, j = 1, \ldots, m\}.$$

Розглянемо інтеґрал

$$I(\varphi) = \int_{\boldsymbol{R}^d} \cdots \int_{\boldsymbol{R}^d} K_1(x_1 - x_2) K_2(x_2 - x_3) \cdots K_{m-1}(x_{m-1} - x_m) K_m(x_m - x_1) \\ \times \varphi(x_1, \ldots, x_m - m)\, dx_1 \cdots dx_m.$$

Припустимо, що для всіх $x_j \in \boldsymbol{R}^d$, $j = 1, \ldots, m$, виконується нерівність

$$|\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)| \le \sum_{k=1}^{l} |\varphi_{k0}(x_1, \ldots, x_m)| \prod_{j=1}^{m} |\varphi_{kj}(x_j)|.$$

Наслідок. *Якщо для функцій* φ_{kj}, $k = 1, \ldots, l$, $j = 0, 1, \ldots, m$, *виконані відповідні вимоги лем* 1–4, *то для інтеґрала* $I(\varphi)$ *справедливе твердження цих лем.*

Зауваження. Наслідок показує, як можна послабити вимогу обмеженості спектральної щільності вищого порядку в задачах, пов'язаних з оцінюванням спектральних характеристик неґауссових процесів (див., наприклад, [2], теорема 1.1), і при цьому природно зв'язати ґауссів та неґауссів випадки.

При доведенні лем 1, 2 застосовується нерівність Юнґа (див., наприклад, [7]). Згідно з цією нерівністю, якщо $1 \le a, b, c \le \infty$, $1 + \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$,

$$(\varphi * g)(x) = \int_{\boldsymbol{R}^d} \varphi(x - y) g(y)\, dy$$

— згортка функцій, то

$$\|\varphi * g\|_a \le \|\varphi\|_b \|g\|_c. \tag{8}$$

Доведення леми 1. Лему достатньо довести для дійснозначних додатних функцій K_j, φ_j, $j = 1, \ldots, m$, та $\varphi_0 = 1$. В загальному випадку, переходячи до нерівності, треба замінити K_j на $|K_j|$, φ_j на $|\varphi_j|$, $j = 1, \ldots, m$, а $\|\varphi_0\|_\infty$ винести за знак інтеґрала. Крім того, якщо $p = 1$, то доведення тривіальне. Тому вважаємо, що $p \in (1, 2]$.

Перепишемо I у вигляді повторного інтеґрала

$$I_1 = \int_{\boldsymbol{R}^d} \varphi_m(x_m) \left[\int_{\boldsymbol{R}^d} K_{m-1}(x_{m-1} - x_m) \varphi_{m-1}(x_{m-1}) \right. \\ \left. \left[\cdots \left[\int_{\boldsymbol{R}^d} K_1(x_1 - x_2) K_m(x_1 - x_m) \varphi_1(x_1)\, dx_1 \right] \cdots dx_{m-1} \right] dx_m.$$

Покладемо

$$F_2(y,x) = \int_{\mathbf{R}^d} K_m(y-z)K_1(z-x)\varphi_1(z)\,dz,$$

$$F_n(y,x) = \int_{\mathbf{R}^d} F_{n-1}(y,z)K_{n-1}(z-x)\varphi_{k-1}(z)\,dz, \qquad 3 \le n \le m-1.$$

Тоді

$$I_1 = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi_m(y)\left[\int_{\mathbf{R}^d} K_{m-1}(z-y)F_{m-1}(y,z)\varphi_{m-1}(z)\,dz\right] dy. \tag{9}$$

Оскільки $K_j \in L_q(\mathbf{R}^d)$, $j = 1,\ldots,m$, то визначено згортки $K_1^q * K_m^q$, $K_n^q * \cdots * K_1^q * K_m^q$, $2 \le n \le m-1$, які належать простору $L_1(\mathbf{R}^d)$. Разом з цим визначено функції

$$Q_2(u) = \left[\int_{\mathbf{R}^d} K_m^q(u-v)K_1^q(v)\,dv\right]^{1/q},$$

$$Q_n(u) = \left[\int_{\mathbf{R}^d} Q_{n-1}^q(u-v)K_{n-1}^q(v)\,dv\right]^{1/q}, \qquad 3 \le n \le m-1.$$

Зрозуміло, що $Q_n \in L_q(\mathbf{R}^d)$, $n \ge 2$, та

$$\|Q_n\|_q = \prod_{j=1}^{n} \|K_j\|_q. \tag{10}$$

Індукцією по $n \ge 2$ із застосуванням нерівності Гьольдера легко перевірити, що при $2 \le n \le m$ для всіх $x, y \in \mathbf{R}^d$ виконується нерівність

$$F_n(y,x) \le a_n Q_n(y-x),$$

де

$$a_n = \prod_{j=1}^{n-1} \|\varphi_j\|_p. \tag{11}$$

Застосуємо цю нерівність при $n = m$ та нерівність Гьольдера до правої частини співвідношення (9). Тоді

$$\begin{aligned} I_1 &\le a_{m-1}\int_{\mathbf{R}^d} \varphi_m(y)\left[\int_{\mathbf{R}^d} K_{m-1}(z-y)Q_{m-1}(y-z)\varphi_{m-1}(z)\,dz\right] dy \\ &\le a_{m-1}\|\varphi_m\|_p \|K'_{m-1}Q_{m-1} * \varphi_{m-1}\|_q, \end{aligned} \tag{12}$$

де $K'_{m-1}(x) = K_{m-1}(-x)$, $x \in \mathbf{R}^d$.

В силу того, що $K'_{m-1}, Q_{m-1} \in L_q(\mathbf{R}^d)$, маємо $K'_{m-1}Q_{m-1} \in L_{q/2}(\mathbf{R}^d)$. Оскільки $q/2 \ge 1$, то згідно з нерівністю Юнґа (8)

$$\|K'_{m-1}Q_{m-1} * \varphi_{m-1}\|_q \le \|\varphi_{m-1}\|_p \|K'_{m-1}Q_{m-1}\|_{q/2}.$$

Звідси за нерівністю Коші–Буняковського

$$\|K'_{m-1}Q_{m-1} * \varphi_{m-1}\|_q \le \|\varphi_{m-1}\|_p \|K'_{m-1}\|_q \|Q_{m-1}\|_q = \|\varphi_{m-1}\|_p \|K_{m-1}\|_q \|Q_{m-1}\|_q. \tag{13}$$

Із співвідношень (10)–(13) і теореми Фубіні–Тонеллі випливає нерівність (2). Лему 1 доведено. □

Доведення леми 2. Доведення леми 2 в цілому повторює доведення леми 1. Але за умовою $q \in [1,2)$, тому застосування нерівності Юнґа, як це було зроблено при доведенні леми 1, неможливе. Застосовуючи замість нерівності Гьольдера нерівність Коші–Буняковського, замість нерівності (12) одержимо нерівність

$$|I_1| \le a_{m-1}\|\varphi_m\|_2\|K'_{m-1}Q_{m-1} * \varphi_{m-1}\|_2. \tag{12'}$$

Далі згідно з нерівністю Юнґа

$$\|K'_{m-1}Q_{m-1} * \varphi_{m-1}\|_2 \le \|\varphi_{m-1}\|_2\|K'_{m-1}Q_{m-1}\|_1.$$

За нерівністю Гьольдера

$$\|K'_{m-1}Q_{m-1}\|_1 \le \|K'_{m-1}\|_p\|Q_{m-1}\|_q = \|K_{m-1}\|_p\|Q_{m-1}\|_q.$$

Таким чином,

$$\|K'_{m-1}Q_{m-1} * \varphi_{m-1}\|_2 \le \|\varphi_{m-1}\|_2\|K_{m-1}\|_p\|Q_{m-1}\|_q. \tag{13'}$$

Із співвідношень (10), (11), (12′), (13′) випливає нерівність (3). Лему 2 доведено. □

Доведення леми 3. Нехай $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $g_j \in L$, $j = 1, \ldots, m$. Тоді $\Delta_j = \varphi_j - g_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m$. Подамо інтеґрал $I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ у вигляді суми аналоґічних інтеґралів

$$I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \sum_{\{j_1,\ldots,j_k\}} I_\alpha(g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}, \Delta_{p_1}, \ldots, \Delta_{p_{m-k}}), \tag{14}$$

де підсумовування ведеться за всіма невпорядкованими скінченними підмножинами $\{j_1, \ldots, j_k\}$ множини $\{1, \ldots, m\}$; $\{p_1, \ldots, p_{m-k}\} = \{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$. Відокремлюючи доданок $I_\alpha(g_1, \ldots, g_m)$, одержуємо

$$|I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| \le |I_\alpha(g_1, \ldots, g_m)| + \sum_{\{j_1,\ldots,j_k\}, 0\le k\le m-1} |I_\alpha(g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}, \Delta_{p_1}, \ldots, \Delta_{p_{m-k}})|.$$

Інтеґрали, які входять під знак суми, залежать хоча б від однієї функції Δ_j. Якщо оцінити ці інтеґрали за допомогою нерівності (2) при $p = q = 2$, то одержимо

$$|I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| \le |I_\alpha(g_1, \ldots, g_k)| + \left[\sup_\alpha \prod_{j=1}^m \|K_j^{(\alpha)}\|_2\right] a \sum_{k=1}^m C_m^k a^{k-1} b^{m-k},$$

де $a = \max_j \|\Delta_j\|_2$, $b = \max_j \|g_j\|_2$, C_m^k — кількість сполук з m по k. Оскільки

$$\max_j \|g_j\|_2 \le \max_j \|\varphi_j\|_2 + \max \|\Delta_j\|_2,$$

то при $a \in (0,1)$

$$|I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| \le |I_\alpha(g_1, \ldots, g_k)| + \beta a, \tag{15}$$

де $\beta = \left[\sup_\alpha \prod_{j=1}^m \|K^{(\alpha)}\|_2\right](2 + \max_j \|\varphi_j\|_2)^m$.

Зауважимо, що β не залежить від параметра α і в силу умови (5) $\beta < \infty$. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки L щільна в $L_2(\boldsymbol{R}^d)$, то при фіксованих $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m$, можна підібрати такі $g_j \in L$, $j = 1, \ldots, m$, що $a < \min\{1, \varepsilon/\beta\}$. Оскільки за умовою леми $\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha(g_1, \ldots, g_m) = 0$, то з нерівності (15) випливає

$$\limsup_{\alpha\to\infty} |I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| < \varepsilon.$$

В силу довільного вибору ε маємо $\limsup_{\alpha\to\infty} |I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| = 0$. Лему 3 доведено. □

Доведення леми 4. Умова (4) леми 3 випливає з умови (6). Покладемо $L = L_2(\boldsymbol{R}^d) \cap L_p(\boldsymbol{R}^d)$. Простір L всюди щільний в $L_2(\boldsymbol{R}^d)$. Візьмемо довільні $\varphi_j \in L$, $j = 1, \ldots, m$. В силу леми 2

$$|I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| \le A(\alpha) \left[\prod_{j=1}^{m-2} \|\varphi_j\|_p \right] \|\varphi_{m-1}\|_2 \|\varphi_m\|_2 \|\varphi_0\|_\infty,$$

де

$$A(\alpha) = \|K^{(\alpha)}\|_q^{m-1} \|K^{(\alpha)}\|_p.$$

За умовою (7) $\lim_{\alpha\to\infty} A(\alpha) = 0$. Таким чином,

$$\limsup_{\alpha\to\infty} I_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0.$$

Отже, виконано всі умови леми 3, з якої випливає твердження леми 4. □

2. Про асимптотичну нормальність корреляограми однорідного ґауссового поля

Нехай $X(t)$, $t \in \boldsymbol{R}^d$, $d \ge 1$ — вимірне сепарабельне дійснозначне однорідне ґауссове поле з нульовим середнім і неперервною корреляційною функцією

$$B(h) = \mathsf{E}\, X(t)X(t+h), \qquad h \in \boldsymbol{R}^d.$$

Нехай у поля X існує спектральна щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}^d$. Тоді $f \in L_1(\boldsymbol{R}^d)$ і за теоремою Бохнера

$$B(h) = \int_{\boldsymbol{R}^d} e^{i\langle h,\lambda\rangle} f(\lambda)\, d\lambda,$$

де $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — скалярний добуток, зв'язаний з евклідовою нормою в $\boldsymbol{R}^d$.

Однією з задач статистики є оцінка функції $B(h)$ за однією реалізацією поля X. Як незсунену оцінку розглянемо корреляограму

$$\widehat{B}_T(h) = T^{-d} \int_{\Pi(T)} X(t)X(t+h)\, dt, \qquad h \in \boldsymbol{R}^d, \tag{16}$$

де $\Pi(T) = [0, T]^d$, а поле спостерігається на об'єднанні $\Pi(T)$ та зсуву $\Pi(T)$ на вектор h.

Зауважимо, що в різних конкретних задачах вигляд множини $\Pi(T)$ може змінюватись.

Нехай $f \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, тобто

$$\int_{\boldsymbol{R}^d} f^2(\lambda)\, d\lambda < \infty. \tag{17}$$

В цьому випадку асимптотичні властивості оцінки (16) зв'язані з поведінкою випадкового поля

$$Y_T(h) = T^{d/2}\big(\widehat{B}_T(h) - B(h)\big). \tag{18}$$

Легко показати, що для довільних $h_1, h_2 \in \boldsymbol{R}^d$

$$\lim_{T\to\infty} \mathsf{E}\, Y_T(h_1)Y_T(h_2) = b(h_1, h_2) = 2(2\Pi)^d \int_{\boldsymbol{R}^d} \cos\langle\lambda, h_1\rangle \cos\langle\lambda, h_2\rangle f^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{19}$$

Нехай $Y(h)$, $h \in \boldsymbol{R}^d$ — дійснозначне центроване ґауссове поле з корреляційною функцією $b(h_1, h_2)$, тобто

$$\mathsf{E}\, Y(h_1)Y(h_2) = b(h_1, h_2), \qquad h_1, h_2 \in \boldsymbol{R}^d. \tag{20}$$

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (17). *Тоді для будь-яких* $n \geq 1$, $h_1, \ldots, h_n \in \boldsymbol{R}^d$

$$\lim_{T\to\infty} \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y_T(h_j)\right] = \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y(h_j)\right]. \tag{21}$$

Зокрема, всі скінченномірні розподіли поля Y_T *збігаються при* $T \to \infty$ *до відповідних скінченномірних розподілів поля* Y.

Схема доведення теореми 1 стандартна [1], тому визначимо лише основні етапи доведення.

Перш за все наведемо лему, яка встановлює зв'язок між лемами 1–4 та старшими моментами поля $Y_T(h)$.

Лема 5. *Нехай*

$$K^{(T)}(x) = \prod_{j=1}^{d} D^{(T)}(x^j), \qquad x = (x^1, \ldots, x^d) \in \boldsymbol{R}^d,$$

$$D^{(T)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi T}}\frac{\sin uT/2}{u}, \qquad u \in \boldsymbol{R}.$$

Тоді при $m \geq 3$ *та при всіх* $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$, $j = 1, \ldots, m$, *вірне твердження леми* 4 *при* $\alpha = T$.

Доведення. Оскільки при $p \in (1, \infty)$

$$\|K^{(T)}\|_p = \|D^{(T)}\|_p^d = \left[M_p T^{1/2-1/p}\right]^d,$$

де

$$M_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|^p dx\right]^{1/p} < \infty,$$

то $\sup_T \|K^{(T)}\|_2 = M_2^d < \infty$.

Крім того,

$$\|K^{(T)}\|_q^{m-1}\|K^{(T)}\|_p = [M_p M_q^{m-1}]^d T^{d[(m-1)(1/2-1/q)+(1/2-1/p)]}.$$

Оскільки при $m \geq 3$, $p > 2$

$$(m-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) = (m-2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) < 0,$$

то $\lim_{T\to\infty} \|K^{(T)}\|_q^{m-1}\|K^{(T)}\|_p = 0$. Отже, виконано умови леми 4 при $\alpha = T$, що й завершує доведення. □

В силу ґауссовості та центрованості полів X та Y, виду поля Y_T, а також формули Леонова–Ширяєва [3] справедливе наступне твердження

Лема 6. *Нехай* $n \geq 2$, $h_1, \ldots, h_n \in \boldsymbol{R}^d$. *Якщо* n *— парне натуральне число, то*

$$\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y(h_j)\right] = 0, \tag{22}$$

а якщо n *— непарне натуральне число, то*

$$\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y(h_j)\right] = \sum_{\{k_1,k_2\},\ldots,\{k_{n-1},k_n\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\text{— непарне}}}^{n-1} b(h_{k_j}, h_{k_{j+1}}), \tag{23}$$

де підсумовування ведеться за всіма невпорядкованими розбиттями множини $\{1,\dots,n\}$ *на двоелементні множини* $\{k_1,k_2\},\dots,\{k_{n-1},k_n\}$, *які не перетинаються. Крім того, для будь-якого* $n \ge 2$

$$\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y(h_j)\right] = T^{-nd/2} \sum_{D_1,\dots,D_n} \int_{\Pi(T)} \cdots \int_{\Pi(T)} \left[\prod_{k=1}^{n} \operatorname{cov} D_k\right] dt_1 \cdots dt_k,$$

де підсумовування ведеться за всіма невпорядкованими розбиттями таблиці D

$$\begin{pmatrix} x(t_1) & x(t_1+h_1) \\ x(t_2) & x(t_2+h_2) \\ \dots & \dots \\ x(t_n) & x(t_n+h_n) \end{pmatrix}$$

на двоелементні множини D_k, $k=1,\dots,n$, *які не перетинаються і співпадають із рядками таблиці* D; $\operatorname{cov} D_k = \mathsf{E}\xi\eta$, *якщо* $D_k = \{\xi,\eta\}$.

Доведення теореми 1. Оскільки процеси Y_T, Y є центрованими та виконуються співвідношення (19), (20), то рівність (21) справедлива для $n=1,2$. Нехай $n \ge 3$. Дотримуючись прийнятої термінології, будемо говорити, що елементи D_{j_1}, D_{j_2} таблиці D утворюють простий блок, якщо їх об'єднання співпадає з двома будь-якими рядками таблиці D. Розбиття $\{D_1,\dots,D_n\}$ таблиці D називається простим, якщо його елементи не можна розбити на пари, що утворюють прості блоки. Зрозуміло, що просте розбиття може бути лише при парних n. Розбиття $\{D_1,\dots,D_n\}$, що не є простим, будемо називати складним. Розкладемо суму в правій частині рівності (24) на суму Σ_1 за простими розбиттями і суму Σ_2 за складними розбиттями. Теорему буде доведено, якщо показати, що для будь-якого $n \ge 3$

$$\Sigma_1 \to \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} Y(h_j)\right], \qquad T\to\infty, \tag{25}$$

$$\Sigma_2 \to 0, \qquad T\to\infty. \tag{26}$$

Доведемо співвідношення (25). Число n — парне. Прості перетворення показують, що

$$\Sigma_1 = \sum_{\{k_1,k_2\},\dots,\{k_{n-1},k_n\}} \prod_{\substack{j=1 \\ J\text{— непарне}}}^{n-1} \Lambda_T(h_{k_j},h_{k_{j+1}}), \tag{27}$$

де

$$\Lambda_T(h_{k_j},h_{k_{j+1}}) = (2\Pi)^d \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)\left[e^{i\langle\lambda_1,h_{k_{j+1}}\rangle + i\langle\lambda_2,h_{k_j}\rangle} + e^{i\langle\lambda_2,h_{k_{j+1}}-h_{k_j}\rangle}\right] f(\lambda_1)f(\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2.$$

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{(2\Pi T)^d}\prod_{j=1}^{d}\left[\frac{\sin x^j T/2}{x^j/2}\right]^2, \qquad x=(x^1,\dots,x^d),$$

— ядро Фейєра, а підсумовування ведеться за всіма невпорядкованими розбиттями множини $\{1,\dots,n\}$ на двоелементні множини, які не перетинаються. Оскільки $f \in L_1(\mathbf{R}^d)\cap L_2(\mathbf{R}^d)$, то в силу властивостей ядра Фейєра

$$\lim_{T\to\infty} \Lambda_T(h_{k_j},h_{k_{j+1}}) = 2(2\Pi)^d \int_{\mathbf{R}^d} \cos\langle\lambda,h_{k_{j+1}}\rangle \cos\langle\lambda,h_{k_j}\rangle f^2(\lambda)\,d\lambda = b(h_{k_j},h_{k_{j+1}}). \tag{28}$$

Звідси, враховуючи співвідношення (23), (27), маємо (25).

При доведенні співвідношення (26) відзначимо, що суму Σ_2 можна подати у вигляді

$$\Sigma_2 = \sum \left[\prod_{j=1}^{s} I_T^{(m_j)} \right] \left[\prod_{p=0}^{l} \Lambda_T^{(p)} \right]. \tag{29}$$

Сума в правій частині містить скінченну кількість доданків; $\Lambda_T^{(p)}$ при $p \geq 1$ має вигляд $\Lambda_T(h_{k_j}, h_{k_{j+1}})$, а $\Lambda_T^{(0)} = 1$; $s \geq 1$; $m_j \geq 3$, $j = 1, \ldots, s$; $m_1 + \cdots + m_d + 2l = n$. Вираз для $I_T^{(m)}$ після відповідного переозначення змінних можна записати в такому вигляді:

$$I_T^{(m)} = T^{-md/2} \int_{\Pi(T)} \cdots \int_{\Pi(T)} \prod_{j=1}^{m} [\operatorname{cov} D_j] \, dt_1 \cdots dt_m, \tag{30}$$

де елементи $D_1, \ldots, D_m$ розбиття таблиці D утворюють блок, який не розкладається, тобто їх об'єднання містить m різних рядків таблиці D та ніяка підмножина цих елементів не утворює множини, яка складається з будь-якого числа рядків цієї таблиці. Звідси випливає

$$I_T^{(m)} = T^{-md/2} \int_{\Pi(T)} \cdots \int_{\Pi(T)} \prod_{j=1}^{m-1} B(t_j - t_{j-1} + \alpha_j) B(t_m - t_1) \, dt_1 \cdots dt_m,$$

де $\alpha_j = 0$, або $+h_j$, або $-h_j$, або $(h_{j+1} - h_j)$ в залежності від структури блоку $\{D_1, \ldots, D_m\}$. В силу співвідношення (29) достатньо показати, що при $m \geq 3$

$$\lim_{T \to \infty} I_T^{(m)} = 0. \tag{31}$$

Після простих перетворень маємо

$$I_T^{(m)} = \int_{R^d} \cdots \int_{R^d} K^{(T)}(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots K^{(T)}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) K^{(T)}(\lambda_m - \lambda_1) \times \exp\left(i \sum_{j=1}^{m} \langle \alpha_j, \lambda_j \rangle \right) \prod_{j=1}^{m} f(\lambda_j) \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_m, \tag{32}$$

де

$$K^{(T)}(x) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \frac{\sin x^j T/2}{x^j}, \qquad x = (x^1, \ldots, x^d) \in R^d.$$

Згідно з лемою 5 співвідношення (31) виконано. Таким чином, співвідношення (26), а разом з цим і теорему 1 доведено. □

3. Про асимптотичну нормальність оцінки корреляційної функції однорідного та ізотропного випадкового поля

В цьому розділі $X(t)$, $t \in R^d$, $d > 1$, — вимірне сепарабельне дійснозначне однорідне та ізотропне ґауссове поле з нульовим середнім та корреляційною функцією $B(h)$, яка допускає спектральне зображення [8]

$$B(h) = \int_0^\infty H_d(\lambda h) \lambda^{d-1} g(\lambda) \, d\lambda, \qquad h \in [0, \infty),$$

де $H_d(u) = a_d J_{(d-2)/2}(u)/u((d-2)/2)$, $J_\nu(u)$ — функція Бесселя першого роду порядку ν [9], $a_d = 2^{(d-2)/2}\Gamma(d/2)$.

Функцію $g(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, називають спектральною щільністю поля і вважають, що $\int_0^\infty \lambda^{d-1} g(\lambda)\, d\lambda < \infty$.

Нехай $V_r(t)$ та $S_r(t)$ — d-вимірні куля та сфера радіусом r з центром у точці t. Нехай поле спостерігається на $V_{r+h}(0)$, $h \in [0, \infty)$. Як незсунені оцінки корреляційної функції розглянемо такі статистики:

$$\widehat{B}_r^1(h) = \frac{1}{|V_r|} \int_{V_r(0)} X(t) \eta_h(t)\, dt, \tag{33}$$

$$\widehat{B}_r^2(u) = \frac{1}{|V_r|} \int_{V_r(0)} X(t) X(t + he)\, dt, \tag{34}$$

де $e \in S_1(0)$, $\eta_h(t) = |S_h|^{-1} \int_{S_h(t)} X(s) m_h^d(ds)$, — сферичне середнє поля [8], $m_h^d(ds)$ — міра Лебеґа на сфері радіуса h, $|S_r|$, $|V_r|$ — міра Лебеґа сфери та кулі.

Перша оцінка досліджувалась в роботі [10], друга — в [11]. Асимптотичні властивості оцінок схожі, тому при дослідженні асимптотичних властивостей процесу $Y_r(h) = \sqrt{|V_r|}[\widehat{B}_r(h) - B(h)]$ будемо мати на увазі під $\widehat{B}_r(h)$ першу або другу оцінку, вказуючи, де це необхідно, на розбіжності.

Будемо вважати, що $g = \{g(|x|), x \in \boldsymbol{R}^d\} \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$. Це еквівалентно умові

$$\int_0^\infty \lambda^{d-1} g^2(\lambda)\, d\lambda < \infty. \tag{35}$$

З умови (35) випливає

$$\lim_{r \to \infty} \mathsf{E}\, Y_r(h_1) Y_r(h_2) = b(h_1, h_2),$$

де для оцінки (33)

$$b(h_1, h_2) = 2^d \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int_0^\infty H_d(\lambda h_1) H_d(\lambda h_2) \lambda^{d-1} g^2(\lambda)\, d\lambda$$

і для оцінки (34)

$$b(h_1, h_2) = 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int_0^\infty \left[H_d(\lambda|h_1 - h_2|) + H_d(\lambda|h_1 + h_2|)\right] \lambda^{d-1} g^2(\lambda)\, d\lambda.$$

Розглянемо центрований ґауссів процес $Y(h)$ з корреляційною функцією $b(h_1, h_2)$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (35). *Тоді для будь-яких* $n \geq 1$, $h_1, \ldots, h_n \in [0, \infty)$

$$\lim_{r \to \infty} \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^n Y_r(h_j)\right] = \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^n Y(h_j)\right].$$

Зокрема, всі скінченномірні розподіли процесу Y_r *збігаються при* $r \to \infty$ *до відповідних скінченномірних розподілів процесу* Y.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1, тому зробимо лише окремі зауваження.

Доведення ґрунтується на використанні наступної леми.

Лема 7. *Нехай*

$$K^{(r)}(|x|) = \frac{1}{|V_r|^{1/2}} \int_{V_r(0)} e^{i(\mu, x)}\, d\mu.$$

Тоді для $m \geq 3$ та для всіх $\varphi_j \in L_2(\boldsymbol{R}^d)$ справедливе твердження леми 4 при $\alpha = r$.

Доведення. За аналогією з лемою 5 треба перевірити умови леми 4. Зауважимо, що

$$K^{(r)}(|x|) = \frac{1}{|V_r|^{1/2}} \int_{V_r(0)} e^{i(\mu,x)}\, d\mu = \frac{1}{|V_r|^{1/2}} \frac{(2\Pi)^{d/2} J_{d/2}(|x|r)}{x^{d/2}}.$$

При $q \in (2d/(d+1), \infty)$

$$\|K^{(r)}\|_q = \frac{(2\pi)^{d/2}}{|V_1|^{1/2}} r^{d(1/2-1/q)} \left[\int_0^\infty \left| \frac{J_{d/2}(\mu)}{\mu^{d/2}} \right| \mu^{d-1}\, d\mu \right]^{1/q} = \frac{(2\pi)^{d/2}}{|V_1|^{1/2}} M_q r^{d(1/2-1/q)},$$

де

$$M_q = \left[\int_0^\infty \left| \frac{J_{d/2}(\mu)}{\mu^{d/2}} \right|^q \mu^{d-1}\, d\mu \right]^{1/q}.$$

З оцінки $|J_\nu(\mu)| \leq C/\sqrt{\mu}$ випливає $M_q < \infty$. Зрозуміло, що $\|K^{(r)}\|_2 < \infty$. Оскільки $1/2 - 1/q < 0$, то при $q \in (2d/(d+1), \infty)$ $\|K^{(r)}\|_q \to 0$, $r \to \infty$. Але

$$\|K^{(r)}\|_q^{m-1} \|K^{(r)}\|_p = [M_q^{m-1} M_p]^d r^{d[(m-1)(1/2-1/q)+(1/2-1/p)]} = O\left(r^{d(m-2)(1/2-1/q)}\right).$$

Звідси випливає, що $\lim_{r\to\infty} \|K^{(r)}\|_q^{m-1} \|K^{(r)}\|_p = 0$. Отже, виконано умови леми 4, що й завершує доведення. $\square$

Зауважимо, що має місце аналог леми 6 з заміною таблиці D на таблицю

$$\begin{pmatrix} x(t_1) & \eta_{h_1}(t_1) \\ x(t_2) & \eta_{h_2}(t_2) \\ \dots & \dots \\ x(t_n) & \eta_{h_n}(t_n) \end{pmatrix}$$

для оцінки (33) і на таблицю

$$\begin{pmatrix} x(t_1) & x(t_1 + eh_1) \\ x(t_2) & x(t_2 + eh_2) \\ \dots & \dots \\ x(t_n) & x(t_n + eh_n) \end{pmatrix}$$

для оцінки (34).

При доведенні теореми 2 порівняно з теоремою 1 в співвідношенні (27) вираз Λ_T треба замінити у випадку оцінки (33) на вираз

$$\Lambda_r(h_{k_j}, h_{k_{j+1}}) = \frac{(2\Pi)^d}{|S_1|} \int_{\boldsymbol{R}^d} \int_{\boldsymbol{R}^d} \Psi_r(\lambda_1 - \lambda_2) \varkappa_j(\lambda_1, \lambda_2) g(|\lambda_1|) g(|\lambda_2|)\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$

для

$$\varkappa_j(\lambda_1, \lambda_2) = H_d(|\lambda_1| h_{k_j}) H_d(|\lambda_2| h_{k_{j+1}}) + H_d(|\lambda_2| h_{k_j}) H_d(|\lambda_2| h_{k_{j+1}}),$$

і у випадку оцінки (34) — на вираз

$$\Lambda_r(h_{k_j}, h_{k_{j+1}}) = \frac{(2\Pi)^d}{|S_1|} \int_{\boldsymbol{R}^d} \int_{\boldsymbol{R}^d} \Psi_r(\lambda_1 - \lambda_2) \theta_j(\lambda_1, \lambda_2) g(|\lambda_1|) g(|\lambda_2|)\, d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

де $\theta_j(\lambda_1, \lambda_2) = e^{i(\lambda_1, e(h_{k_j} - h_{k_{j+1}}))} + e^{i(\lambda_1, eh_{k_j}) + i(\lambda_2, eh_{k_{j+1}})}$, а

$$\Psi_r(|\lambda|) = \frac{1}{(2\pi)^d |V_r|} \left| \int_{V_r(0)} e^{i(\lambda,x)}\, dx \right|^2$$

— ядро, визначене в роботі [11].

У співвідношенні (32) інтеґрал $I_T^{(m)}$ для оцінки (33) має вигляд

$$I_r^{(m)} = \int_{R^d} \cdots \int_{R^d} K^{(r)}(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots K^{(r)}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) K^{(r)}(\lambda_m - \lambda_1) \times \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m, h_1, \dots, h_m) \prod_{j=1}^{m} g(|\lambda_j|)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_m.$$

Функція $\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m, h_1, \dots, h_m)$ зображається добутком скінченного числа співмножників вигляду $H_d(|\lambda_j|h_j)$, кількість яких є обмеженою функцією і залежить від структури блоку $\{D_1, \dots, D_m\}$.

В свою чергу інтеґрал $I_T^{(m)}$ для оцінки (34) має вигляд

$$I_r^{(m)} = \int_{R^d} \cdots \int_{R^d} K^{(r)}(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots K^{(r)}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) K^{(r)}(\lambda_m - \lambda_1) \times \exp\left(i \sum_{j=1}^{m} \langle e\alpha_j, \lambda_j \rangle\right) \prod_{j=1}^{m} g(|\lambda_j|)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_m.$$

де $\alpha_j = 0$, або $+h_j$, або $-h_j$, або $(h_{j+1} - h_j)$ в залежності від структури блоку $\{D_1, \dots, D_m\}$.

Доведення теореми завершує застосування леми 7. □

Зауваження. Як показано в роботі [12], умова інтеґровності у квадраті спектральної щільності є, по суті, необхідною умовою для нормалізації коррелоґрами ґауссового поля.

Література

1. Р. Ю. Бенткус, *Об асимптотической нормальности оценки спектральной функции*, Литов. мат. сб. **12** (1972), № 3, 5–8.
2. ———, *О семиинвариантах оценок спектра стационарной последовательности*, Литов. мат. сб. **16** (1976), № 4, 37–61.
3. В. П. Леонов, А. Н. Ширяев, *К технике вычисления семиинвариантов*, Теория вероятностей и ее примен. **4** (1959), № 3, 342–345.
4. В. В. Булдигін, *Про асимптотичні властивості емпіричної коррелоґрами ґауссового процесу*, Доповіді АН України (1994), № 11, 28–42.
5. A. Dychovichny, *The estimate of the spectral function of homogeneous and isotropic random field by the observations on the section of ball*, Proceedings of the Second Ukrainian–Hungarian Conference on New Trend in Probability and Statistics (Mukachevo, Ukraine, 25 Sept – 1 Oct, 1993), "TBiMC", Kiev, 1995, pp. 52–65.
6. Л. Саулис, В. Статулявичус, *Предельные теоремы о больших уклонениях*, "Мокслас", Вильнюс, 1989.
7. Б. Саймон, М. Рид, *Методы современной математической физики. Гармонический анализ*, vol. 2, "Мир", Москва, 1978.
8. М. И. Ядренко, *Спектральная теория случайных полей*, "Вища школа", Киев, 1980.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, vol. 2, "Наука", Москва, 1966.
10. А. А. Дыховичный, *Об оценке корреляционной функции однородного и изотропного гауссовского случайного поля*, Теория вероятност. и матем. статист. (1983), № 29, 37–40.
11. А. В. Иванов, Н. Н. Леоненко, *О принципе инвариантности для оценок корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля*, Укр. мат. журн. **33** (1981), № 3, 313–323.
12. М. М. Леоненко, А. Ю. Портнова, *Збіжність коррелоґрами ґауссівського поля до неґауссівського розподілу*, Теорія ймовірност. та матем. статист. (1993), № 49, 137–144.

252056, Київ-56, пр. Перемоги, 37, Київський політехнічний інститут

252056, Київ-56, пр. Перемоги, 37, Київський політехнічний інститут

Надійшла 11.06.94