Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 29–38

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 29–38

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ПЕРМАНЕНТІВ

УДК 519.21

В. Л. ГІРКО

РЕЗЮМЕ. Доведено таке твердження: якщо

$$\inf_n \min_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} > 0, \qquad \sup_n \max_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \operatorname{per}(a_{ij})_{i,j=1}^n - \ln n + \int_0^\infty \left(n^{-1}\sum_{k=1}^n c_k(\alpha) - \alpha^{-1}\chi(\alpha>1)\right)d\alpha\right] = 0,$$

де додатні дійсні функції $c_j(\alpha)$ задовольняють систему рівнянь

$$c_k(\alpha) = \left[\alpha + \sum_{l=1}^n n^{-1}a_{kl}\left(1+\sum_{j=1}^n n^{-1}a_{jl}c_j(\alpha)\right)^{-1}\right]; \qquad \alpha>0;\ k=1,\dots,n.$$

Перманент матриці на відміну від детермінанта матриці являє собою дуже складний вираз. Якщо детермінант можна обчислити на комп'ютерах без будь-яких ускладнень, то для обчислення перманентів потрібно багато комп'ютерного часу. Неважко переконатися в тому, що навіть для перманентів матриць, порядок яких дорівнює декільком десяткам, необхідний час обчислення на найкращих комп'ютерах становить сотні тисячоліть. Ось чому великий інтерес має все, що стосується різних формул для перманентів, які дають змогу спростити їх обчислення [1–3, 5, 7]. У даній роботі використовується простий аналітичний зв'язок перманентів з детермінантами [5], що дав змогу знайти граничні значення перманентів, коли їх порядок прямує до нескінченності. Доведено так званий принцип інваріантності для двічі стохастичних матриць.

Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — квадратична матриця з дійсними додатними елементами. Перманентом такої матриці називається вираз

$$\operatorname{per} A = \sum_{\langle i_1,\dots,i_n\rangle} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

де сума береться за всіма перестановками $\langle i_1,\dots,i_n\rangle$ n чисел $1,\dots,n$ [8].

Очевидно, що $\operatorname{per} A = \mathsf{E}\det \Xi^2$, $\Xi = (\xi_{ij}\sqrt{a_{ij}})_{i,j=1}^n$, де випадкові величини ξ_{ij} некорельовані і $\mathsf{E}\,\xi_{ij}=0$, $\mathsf{E}\,\xi_{ij}^2 = 1$. Саме цей зв'язок між перманентом і детермінантом використовується у даній статті. Величини ξ_{ij} можуть мати довільний розподіл. І це дає можливість знаходити перманенти за допомогою методу Монте–Карло.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 60G25; Secondary 62M20, 93E10.

©1995 ТВіМС, Наукове видавництво

Але для знаходження граничних значень перманентів при прямуванні їх до нескінченності ми будемо вважати, що випадкові величини ξ_{ij} незалежні і розподілені за стандартним нормальним законом.

Теорема 1. *Якщо*

$$\inf_n \min_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} > 0, \qquad \sup_n \max_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} < \infty, \tag{1}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \operatorname{per}A - \ln n + \int_0^\infty \left(n^{-1}\sum_{k=1}^n c_k(\alpha) - \alpha^{-1}\chi(\alpha>1)\right)d\alpha\right] = 0, \tag{2}$$

де додатні дійсні функції $c_j(\alpha)$, $j=1,\dots,n$, задовольняють систему рівнянь

$$c_k(\alpha) = \left[\alpha + \sum_{l=1}^n n^{-1}a_{kl}\left(1+\sum_{j=1}^n n^{-1}a_{jl}c_j(\alpha)\right)^{-1}\right]^{-1}; \qquad \alpha>0;\ k=1,\dots,n. \tag{3}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь існує і єдиний у класі L додатних дійсних аналітичних функцій $c_j(\alpha)$ при $\alpha>0$.

Теорема 2. *Якщо виконується умова* (1), *то*

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \operatorname{per}A - \ln n - \int_0^\infty \ln x\left(n^{-1}\sum_{k=1}^n p_{kn}(x)\right)dx\right] = 0, \tag{4}$$

де $p_{kn}(x)$ — щільності розподілу перетворення Стільтьєса

$$c_{kn}(z) = \int_0^\infty (x-z)^{-1}p_{kn}(x), \qquad z = t+is,\ s\neq 0, \tag{5}$$

задовольняють систему рівнянь

$$c_{kn}(z) = \left[\sum_{l=1}^n n^{-1}a_{kl}\left(1+\sum_{p=1}^n n^{-1}a_{pl}c_{pn}(z)\right)^{-1} - z\right]^{-1}, \qquad k=1,\dots,n. \tag{6}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь існує і єдиний у класі аналітичних функцій:

$$\operatorname{Im} c_{jn}(z) > 0; \qquad \operatorname{Im} z > 0.$$

Функції $p_k(x)$, $k=1,\dots,n$, є уявними частинами розв'язку $m_j(x)$ системи рівнянь

$$m_k(x) = \left[-x + \sum_{l=1}^n n^{-1}a_{kl}\left(1+\sum_{j=1}^n n^{-1}a_{jl}m_j(x)\right)^{-1}\right]^{-1}; \qquad x>0;\ k=1,\dots,n, \tag{7}$$

де $m_j(x) = g_j(x) + i\pi p_j(x)$. Розв'язок системи рівнянь (7) *існує і єдиний у класі функцій $\{g_k(x); p_k(x)>0; x>0; k=1,\dots,n\}$.*

Теорема 3 (Принцип інваріантності для перманентів двічі стохастичних матриць). *Якщо виконується умова* (1) *і*

$$\sum_{l=1}^n a_{lk} = n, \qquad \sum_{l=1}^n a_{kl} = n, \qquad k=1,\dots,n;\ n=1,2\dots,$$

тобто матриця An^{-1} двічі стохастична, то

$$\lim_{n\to\infty}[n^{-1}\ln \operatorname{per}A - \ln n] = -1. \tag{8}$$

Доведення теореми 1. Очевидно, що для будь-якого дійсного $\alpha > 0$

$$\mathsf{E}\ln\det(\Xi\Xi^T n^{-1}) \le \ln \mathsf{E}\det(\Xi^2 n^{-1}) = n^{-1}\ln\operatorname{per}(An^{-1}) \le \ln \mathsf{E}\det[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}]. \quad (9)$$

Ми будемо часто використовувати формулу

$$\frac{\det \Xi_k \Xi_k^T}{\det \Xi_{k+1}\Xi_{k+1}^T} = \vec{\xi}_{k+1}\left[I - \Xi_{k+1}^T(\Xi_{k+1}\Xi_{k+1}^T)^{-1}\Xi_{k+1}\right]\vec{\xi}_{k+1}^T, \qquad (10)$$

де $k = 0, 1, \ldots, n-1$, матриця Ξ_k одержана з матриці Ξ шляхом викреслення перших її k вектор-рядків $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_k$, $\Xi_n^T(\Xi_n\Xi_n^T)^{-1}\Xi_n = 0$, $\det \Xi_n \Xi_n^T = 1$, $\tilde{\Xi}_k = \Xi_{k*}^{-1/2}$.

Використовуючи цю формулу, маємо такий вираз:

$$\det(\Xi\Xi^T n^{-1}) = \prod_{k=1}^{n}\gamma_k; \qquad \gamma_k = n^{-1}\vec{\xi}_k\left[I - \tilde{\Xi}_k^T(\tilde{\Xi}_k\tilde{\Xi}_k^T)^{-1}\tilde{\Xi}_k\right]\vec{\xi}_k^T. \qquad (11)$$

Очевидно, що обернена матриця $(\Xi_k\Xi_k^T)^{-1}$, $k = 0, \ldots, n-1$, існує з імовірністю 1.

Легко перевірити, що матриця $H = I - \tilde{\Xi}_k^T(\tilde{\Xi}_k\tilde{\Xi}_k^T)^{-1}\tilde{\Xi}_k$ є симетричною ідемпотентною, тобто $H^2 = H$ і

$$I - \tilde{\Xi}_k^T(\tilde{\Xi}_k\tilde{\Xi}_k^T)^{-1}\tilde{\Xi}_k = \sum_{s=1}^{k}\vec{h}_s\vec{h}_s^T(k),$$

де $\vec{h}_s = (h_{is}(k), i = 1, \ldots, n)^T$ — ортонормовані випадкові вектори.

Отже, в силу того, що вектор-рядки $\vec{\xi}_k$ розподілені за невиродженим нормальним законом, для всіх $m = \gamma n$, $0 < \gamma < 1$, при

$$\alpha_k = \min_{i=1,\ldots,n} a_{ki}, \qquad \beta_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{k}$$

дістаємо

$$\begin{aligned}
n^{-1}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}\ln\gamma_k &= n^{-1}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}\ln\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_{ki}\sqrt{a_{ki}}h_{ij}(k)\right)^2\right] = n^{-1}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}\ln\left(\vec{\xi}_k B_k \vec{\xi}_k^T\right) \\
&= n^{-1}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}(2\pi)^{-k/2}\int_{\vec{x}B_k\vec{x}^T<1}\ln\left(\vec{x}B_k\vec{x}^T\frac{k}{n}\right)e^{\vec{x}\vec{x}^T/2}\,d\vec{x} \\
&\quad + \frac{1}{n}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}\ln\left(\vec{\xi}_k B_k\vec{\xi}_k^T\frac{k}{n}\right)\chi\left(\vec{\xi}_k B_k \vec{\xi}_k^T \ge 1\right) \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-m}(2\pi)^{-k/2}\int_{\alpha_k\beta_k<1}\left|\ln(\alpha_k\beta_k)\right| e^{-\sum_{j=1}^{k}x_j^2/2}\prod_{j=1}^{k}dx_j \\
&\quad + \frac{1}{n}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}\vec{\xi}_k B_k\vec{\xi}_k^T + \frac{1}{n}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}\left|\ln\frac{k}{n}\right|
\end{aligned}$$

й тому

$$n^{-1}\,\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-m}\ln\gamma_k \le \sum_{k=1}^{n-m}\frac{1}{n\Gamma(k/2)}\left|\ln\frac{y}{k}\right|e^{-y}y^{k/2-1}\,dy+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-m}|\ln\alpha_k|$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-m}\left|\ln\frac{k}{n}\right|+\max_{i,j=1,\dots,n}a_{ij}\frac{n-m}{n}$$
$$\le c\left[\sum_{k=1}^{n-m}\frac{1}{n\Gamma(k/2)}\int_{0<y/k<1}\left|\ln\frac{y}{k}\right|e^{-y}y^{k/2-1}\,dy\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{1}{n\Gamma(k/2)}\int_{y>k}\left|\ln\frac{y}{k}\right|e^{-y}y^{k/2-1}\,dy+\frac{1}{n}\ln\frac{n^{n-m}}{(n-m)!}+\frac{n-m}{n}\right]$$
$$\le c\left[\sum_{k=2}^{n-m}\frac{1}{n\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\frac{k}{y}e^{-y}y^{k/2-1}\,dy+\frac{1}{n}\ln\frac{n^{n-m}}{(n-m)!}+\frac{n-m}{n}\right]+\varepsilon_n$$
$$\le c\left[\sum_{k=2}^{n-m}\frac{k\Gamma(k/2-1)}{n\Gamma(k/2)}+\frac{1}{n}\ln\frac{n^{n-m}}{(n-m)^{n-m}e^{-(n-m)}}+\frac{n-m}{n}\right]+\varepsilon_n$$
$$\le c[(1-\gamma)|\ln(1-\gamma)|+1-\gamma]+\varepsilon_n, \tag{12}$$

де $B_k=\left(k^{-1}\sqrt{a_{ki}}\sqrt{a_{kj}}\sum_{l=1}^k h_{il}^{(k)}h_{jl}^{(k)}\right)$, $h_{il}^{(k)}$ — компоненти вектор-стовпців $\vec{h}_i(k)$ матриці H і ε_n — послідовність чисел, яка прямує до нуля при $n\to\infty$.

Але тоді за допомогою формули

$$\det(\Xi\Xi^T n^{-1})=\det(\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T n^{-1})\prod_{k=1}^{n-m}\gamma_k$$

з (12) одержуємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathsf{E}\ln\det(\Xi\Xi^T n^{-1})-\mathsf{E}\ln\det(\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T n^{-1})\right|n^{-1}\le c[(1-\gamma)|\ln(1-\gamma)|+1-\gamma]. \tag{13}$$

Легко переконатись, що для будь-якого дійсного $\alpha>0$

$$\frac{1}{n}\left|\mathsf{E}\ln\det\left(\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right)-\mathsf{E}\ln\det\left(\alpha I+\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right)\right|$$
$$\le\frac{\alpha}{n}\mathrm{Tr}\,\mathsf{E}\left(\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right)^{-1} \tag{14}$$

і що з урахуванням умови (1)

$$\frac{\alpha}{n}\mathrm{Tr}\,\mathsf{E}\left(\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right)^{-1}$$
$$=\frac{\alpha}{n}\sum_{s=1}^m\mathsf{E}\left\{\left(\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\}_{ss}=\frac{\alpha}{n}\sum_{s=1}^m\mathsf{E}\,\frac{\det\left[\Xi_{n-m}^{(s)}\Xi_{n-m}^{(s)T}\frac{1}{n}\right]}{\det\left[\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right]},$$

тобто

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{n}\mathrm{Tr}\ \mathsf{E}\left(\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&\quad= \frac{\alpha}{n}\sum_{s=1}^{m}\mathsf{E}\,\frac{n}{\vec{\xi}_{n-m+s}\left[I-\Xi_{n-m}^{(s)T}\left(\Xi_{n-m}^{(s)}\Xi_{n-m}^{(s)T}\right)^{-1}\Xi_{n-m}^{(s)}\right]\vec{\xi}_{n-m+s}^{T}} \\
&\quad= \frac{\alpha}{n}\sum_{s=1}^{m}\mathsf{E}\,\frac{n}{\sum_{j=1}^{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_{n-m+s,i}\sqrt{a_{n-m+s,i}}h_{ij}(n-m+s)\right)^2} \qquad (15)\\
&\quad\le \frac{\alpha}{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{n}{\min_{i=1,\dots,n}a_{n-m+s,i}\Gamma((n-m)/2)}\int_0^\infty y^{-1}e^{-y}y^{(n-m)/2-1}\,dy \\
&\quad\le c\alpha\frac{m\Gamma((n-m)/2-1)}{\Gamma((n-m)/2)}\le c\alpha(1-\gamma)^{-1}+\varepsilon_n,
\end{aligned}$$

де матриця $\Xi^{(k)}$ отримана з матриці Ξ шляхом викреслення її вектор-рядка з номером k.

Крім того,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\left|\mathsf{E}\ln\det\left(\alpha I+\Xi\Xi^T\frac{1}{n}\right)-\mathsf{E}\ln\det\left(\alpha I+\Xi_{n-m}\Xi_{n-m}^T\frac{1}{n}\right)\right| \\
&\quad\le\sum_{k=1}^{n-m}\frac{1}{n}\left|\mathsf{E}\ln\det\left(\alpha I+\Xi_{k-1}\Xi_{k-1}^T\frac{1}{n}\right)-\mathsf{E}\ln\det\left(\alpha I+\Xi_k\Xi_k^T\frac{1}{n}\right)\right| \qquad (16)\\
&\quad=\sum_{k=1}^{n-m}\frac{1}{n}\left|\mathsf{E}\ln\left[\alpha+\vec{\xi}_k\left[I-\Xi_{k+1}^T(\Xi_{k+1}\Xi_{k+1}^T)^{-1}\Xi_{k+1}\right]\vec{\xi}_k^T\right]\right|\le(1-\gamma)|\ln\alpha|.
\end{aligned}$$

Таким чином, з (11)–(16) маємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|\mathsf{E}\ln\det\left(\Xi\Xi^Tn^{-1}\right)-\mathsf{E}\ln\det\left(\alpha I+\Xi\Xi^Tn^{-1}\right)\right|n^{-1} \\
&\qquad\le c[(1-\gamma)|\ln(1-\gamma)|+\frac{\alpha}{1-\gamma}+(1-\gamma)|\ln\alpha|].
\end{aligned} \qquad (17)$$

Крім цих нерівностей, розглянемо рівність

$$\frac{\mathsf{E}\det\left[\alpha I+\Xi\Xi^Tn^{-1}\right]}{\det\left[\alpha I+\Xi\Xi^Tn^{-1}\right]}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathsf{E}_k\det\left[\alpha I+\Xi\Xi^Tn^{-1}\right]}{\mathsf{E}_{k-1}\det\left[\alpha I+\Xi\Xi^Tn^{-1}\right]},$$

де E_k — умовне сподівання за умови, що вектор-рядки матриці Ξ, починаючи з $(k+1)$-го, фіксовані.

З цієї рівності маємо

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathsf{E}_k\det\left[\alpha I+\Xi\Xi^Tn^{-1}\right]}{\mathsf{E}_{k-1}\det\left[\alpha I+\Xi\Xi^Tn^{-1}\right]}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{Tr}\,C_k\,\mathsf{E}_{k-1}\,R_kn^{-1}+\alpha}{\vec{\xi}_k\,\mathsf{E}_{k-1}\,R_k\vec{\xi}_k^T+\alpha},$$

де

$$R_k=I-\Xi^{(k)T}\left(\alpha I+\Xi^{(k)}\Xi^{(k)T}\right)^{-1}\Xi^{(k)}$$

і матриця $\Xi^{(k)}$ отримана з матриці Ξ шляхом викреслення її вектор-рядка з номером k, $C_k=(a_{ki}\delta_{ij})$, δ_{ij} — символ Кронекера.

З цієї рівності дістаємо

$$\ln \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathsf{E}_k \det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right]}{\mathsf{E}_{k-1} \det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right]} = -\sum_{k=1}^{n} \ln[1+\tau_k]. \tag{18}$$

Тут

$$\tau_k = \frac{n^{-1}\vec{\xi}_k\, \mathsf{E}_{k-1} R_k \vec{\xi}_k^T - \operatorname{Tr} C_k\, \mathsf{E}_{k-1} R_k n^{-1}}{\operatorname{Tr} C_k\, \mathsf{E}_{k-1} R_k n^{-1} + \alpha}.$$

Лема 1.

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n} |\tau_k|^4 \le c\alpha^{-2} n^{-1}.$$

Доведення. Очевидно, що

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\vec{\xi}_k\, \mathsf{E}_{k-1} R_k \vec{\xi}_k^T - \operatorname{Tr} C_k\, \mathsf{E}_{k-1} R_k n^{-1}\right]^4 \\
&\quad \le \mathsf{E}\left[2\sum_{i>j} n^{-1}\xi_{kj}\xi_{ki}\sqrt{a_{kj}a_{ki}}\{\mathsf{E}_{k-1} R_k\}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} n^{-1}(\xi_{ki}^2 - 1)a_{ki}\{\mathsf{E}_{k-1} R_k\}_{ii}\right]^4 \\
&\quad \le n^{-2}\alpha^{-4}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Отже, з урахуванням (17)–(19) маємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{-1}\left|\ln \operatorname{per}(An^{-1}) - \mathsf{E}\ln\det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right]\right| \\
&\quad \le c\left[(1-\gamma)|\ln(1-\gamma)| + \frac{\alpha}{1-\gamma} + 1 - \gamma + (1-\gamma)|\ln\alpha|\right]. \quad \square
\end{aligned} \tag{20}$$

Знайдемо границю виразу $n^{-1}\,\mathsf{E}\ln\det[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}]$. Для цього нам будуть потрібні деякі допоміжні твердження.

Лема 2.

$$\mathsf{E}\left|\ln\det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right] - \mathsf{E}\ln\det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right]\right| \le n\alpha^{-2}. \tag{21}$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$\ln\det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right] - \mathsf{E}\ln\det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right] = \sum_{k=1}^{n}[\mathsf{E}_{k-1}\theta_k - \mathsf{E}_k\theta_k],$$

де

$$\theta_k = \left\{\det\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right] - \ln\det\left[\alpha I + \Xi^{(k)}\Xi^{T(k)} n^{-1}\right]\right\} = \ln\left[\alpha + n^{-1}\vec{\xi}_k R_k \vec{\xi}_k^T\right].$$

Величини θ_k некорельовані, тому, використовуючи цю нерівність, одержуємо твердження леми 2. $\square$

Лема 3. *Якщо виконується умова* (1), *то при* $\alpha > 0$ *маємо*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\left[\mathsf{E}\operatorname{Tr}\left[\alpha I + n^{-1}\Xi\Xi^T\right]^{-1} - \sum_{k=1}^{n} c_k(\alpha)\right] = 0,$$

де функції $c_k(\alpha)$ *задовольняють систему рівнянь* (3).

Доведення. Очевидно, що

$$\mathsf{E}\operatorname{Tr}\left[\alpha I + n^{-1}\Xi\Xi^T\right]^{-1} = \mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\alpha I + n^{-1}\Xi\Xi^T\right]^{-1}\right\}_{kk}. \tag{22}$$

Використовуючи формулу

$$\left[I_n - n^{-1}\Xi^{(k)T}\left(\alpha I + n^{-1}\Xi^{(k)T}\Xi^{(k)}\right)^{-1}\Xi^{(k)}\right] = \alpha\left[\alpha I_{n-1} + n^{-1}\Xi^{(k)T}\Xi^{(k)}\right]^{-1},$$

з цієї рівності маємо

$$\mathsf{E}\,\mathrm{Tr}\left[\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right]^{-1} = \mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha + n^{-1}\vec{\xi}_k\alpha\left(\alpha I + n^{-1}\Xi^{(k)T}\Xi^{(k)}\right)^{-1}\vec{\xi}_k^T\right]^{-1}.$$

Легко бачити, що

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\Bigg[n^{-1}\vec{\xi}_k\alpha\left(\alpha I + n^{-1}\Xi^{(k)T}\Xi^{(k)}\right)^{-1}\vec{\xi}_k^T - n^{-1}\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\left\{\left(\alpha I + n^{-1}\Xi^{(k)T}\Xi^{(k)}\right)^{-1}\right\}_{ss}\Bigg]^2 = 0$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\Bigg[n^{-1}\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\left\{\left(\alpha I + \Xi^{(k)T}\Xi^{(k)}n^{-1}\right)^{-1}\right\}_{ss} - n^{-1}\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\left\{\left(\alpha I + \Xi^T\Xi n^{-1}\right)^{-1}\right\}_{ss}\Bigg]^2 = 0.$$

З урахуванням цих двох рівностей і леми 2 перетворимо (22) до вигляду

$$\mathsf{E}\left\{\left[\alpha I + \Xi^T\Xi n^{-1}\right]^{-1}\right\}_{kk} = \left[\alpha + n^{-1}\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\alpha\,\mathsf{E}\left\{\left(\alpha I + \Xi^T\Xi n^{-1}\right)^{-1}\right\}_{ss}\right]^{-1} + o(1). \quad (23)$$

Повторюючи для $\mathsf{E}\left\{\left(\alpha I + \Xi^T\Xi n^{-1}\right)^{-1}\right\}_{ss}$ ті ж перетворення, що і для виразу (22), маємо

$$\mathsf{E}\left\{\left(\alpha I + \Xi^T\Xi n^{-1}\right)^{-1}\right\}_{kk} = \left[\alpha + n^{-1}\sum_{s=1}^{n}a_{ks}\alpha\,\mathsf{E}\left\{\left(\alpha I + \Xi\Xi^T n^{-1}\right)^{-1}\right\}_{ss}\right]^{-1} + o(1).$$

Отже,

$$\mathsf{E}\left\{\left(\alpha I + \Xi\Xi^T\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\}_{kk} = \left[\alpha + \sum_{s=1}^{n}a_{ks}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}a_{pk}\left\{\left(\alpha I + \Xi\Xi^T\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\}_{pp}\right]\right]^{-1} + o(1). \quad \square \quad (24)$$

Лема 4. *Розв'язок системи рівнянь* (4) *існує і єдиний у класі додатних аналітичних функцій при* $\alpha > 0$.

Доведення. Спочатку доведемо єдиність розв'язку. Припустимо, що існує два розв'язки $\{c_{1k}(\alpha); k = 1,\dots,n\}$, $\{c_{2k}(\alpha); k = 1,\dots,n\}$, які не співпадають хоча б в одній точці $\alpha > 0$. Тоді, використовуючи систему рівнянь (3), маємо

$$\max_{k=1,\dots,n}|c_{1k}(\alpha) - c_{2k}(\alpha)| \le c\alpha^{-2}\max_{k=1,\dots,n}|c_{1k}(\alpha) - c_{2k}(\alpha)|.$$

Отже, ці два розв'язки співпадають, коли $c\alpha^{-2} < 1$. Але в силу того, що ці розв'язки є аналітичними функціями, вони будуть співпадати для всіх $\alpha > 0$. Тобто наше припущення хибне і єдиність розв'язку таким чином доведена.

Доведемо тепер існування розв'язку системи (4) у класі функцій L. Для цього розглянемо рекурентну послідовність

$$c_k(\alpha, s+1) = \left[\alpha + \sum_{l=1}^{n} n^{-1} a_{kl} \left(1 + \sum_{j=1}^{n} n^{-1} a_{jl} c_k(\alpha, s)\right)^{-1}\right]^{-1}; \quad k = 1, \dots, n; \; s = 1, 2, \dots,$$

де $c_k(\alpha, 1) = \alpha^{-1}$.

Очевидно, що

$$\max_{k=1,\dots,n} |c_k(\alpha, s+1) - c_k(\alpha, s)| \leq \max_{k=1,\dots,n} c\alpha^{-2} \big|c_k(\alpha, s) - c_k(\alpha, s-1)\big|$$

і, отже, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} [c_k(\alpha, s+1) - c_k(\alpha, s)]$ збігаються при $c\alpha^{-2} < 1$. Звідси випливає, що при $c\alpha^{-2} < 1$ існують границі

$$\lim_{s\to\infty} c_k(\alpha, s) = c_k(\alpha); \qquad k = 1, \dots, n,$$

і $c_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, задовольняють систему рівнянь (3). Таким чином, існування розв'язку доведено. Лема 4 доведена. □

Використовуючи системи рівнянь (3) та (24), одержуємо нерівність

$$\left| \mathsf{E}\left\{ \left[\alpha I + \Xi^T \Xi n^{-1}\right]^{-1} \right\}_{kk} - c_k(\alpha) \right| \leq c\alpha^{-2} \left| \mathsf{E}\left\{ \left[\alpha I + \Xi^T \Xi n^{-1}\right]^{-1} \right\}_{kk} - c_k(\alpha) \right| + \varepsilon_n.$$

Отже, при $c\alpha^{-2} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mathsf{E}\left\{ \left[\alpha I + \Xi^T \Xi n^{-1}\right]^{-1} \right\}_{kk} - c_k(\alpha) \right| = 0; \qquad k = 1, \dots, n. \tag{25}$$

Очевидно, що будь-яка збіжна підпослідовність функцій

$$\mathsf{E}\left\{ \left[\alpha I + \Xi^T \Xi n^{-1}\right]^{-1} \right\}_{kk} - c_k(\alpha)$$

є аналітичною функцією, тому (25) виконується для всіх $\alpha > 0$.

Лема 5.

$$\sum_{j=1}^{n} n^{-1} c_k(\alpha) < c\alpha^{-1/2}; \qquad \alpha > 0.$$

Доведення. Очевидно, що система рівнянь (3) еквівалентна такій:

$$c_k^{-1}(\alpha) = \alpha + \sum_{l=1}^{n} n^{-1} a_{lk} \left(1 + \sum_{j=1}^{n} n^{-1} a_{jl} c_j(\alpha)\right)^{-1}; \qquad k = 1, \dots, n.$$

Звідси

$$1 = \alpha n^{-1} \sum_{k=1}^{n} c_k(\alpha) + \sum_{l=1}^{n} n^{-1} \left\{ \frac{n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{kl} c_k(\alpha)}{1 + \sum_{j=1}^{n} n^{-1} a_{jl} c_j(\alpha)} \right\} = \alpha\theta + \frac{c(\alpha)\theta}{1 + c(\alpha)\theta},$$

де $\theta = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} c_k(\alpha)$, $0 < c(\alpha) < c < \infty$ і $c > 0$ — деяка стала.

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно θ, одержуємо

$$\theta = \frac{2}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4c(\alpha)\alpha}} \leq \frac{c_1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Лема 5 доведена. □

В силу леми 5, (20) та (25), покладаючи $\gamma = 1 - \sqrt{\alpha}$, знаходимо

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\Bigg[n^{-1}\ln \mathrm{per}A - \ln n + \int_\alpha^\infty \left(n^{-1}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}\left\{\left[\nu I + \Xi^T \Xi n^{-1}\right]^{-1}\right\}_{kk} - \nu^{-1}\chi(\nu>1)\right)d\nu\Bigg]$$
$$= \lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \mathrm{per}A - \ln n + \int_\alpha^\infty \left(n^{-1}\sum_{k=1}^n c_k(\nu) - \nu^{-1}\chi(\nu>1)\right)d\nu\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \mathrm{per}A - \ln n + \int_0^\infty \left(n^{-1}\sum_{k=1}^n c_k(\nu) - \nu^{-1}\chi(\nu>1)\right)d\nu\right] = 0.$$

Це і завершує доведення теореми 1. □

Доведення теореми 2. Оскільки функції $c_k(\alpha)$, $k = 1,\ldots,n$, аналітичні, то дійсний параметр $\alpha > 0$ можна замінити будь-яким комплексним числом $-z$, $\operatorname{Im} z > 0$. Тоді одержимо систему рівнянь

$$c_k(-z) = \left[-z + \sum_{l=1}^n n^{-1}a_{kl}\left(1 + \sum_{j=1}^n n^{-1}a_{jl}c_j(-z)\right)^{-1}\right]; \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Аналогічно тому, як було зроблено при доведені теореми 2, доводимо, що розв'язок такої системи рівнянь існує і єдиний у класі аналітичних функцій $\operatorname{Im} c_k(-z) > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, $k = 1,\ldots,n$ [4, 5]. Крім того, з роботи [6] випливає

$$c_k(-z) = \int_0^\infty \frac{p_k(x)}{x-z}\,dx,$$

де $p_k(x)$ — деякі щільності розподілів.

Неважко перевірити, що $p_k(x)$, $k = 1,\ldots,n$, є уявними частинами розв'язку системи рівнянь

$$m_k(x) = \left[-x + \sum_{l=1}^n n^{-1}a_{kl}\left(1 + \sum_{j=1}^n n^{-1}a_{jl}m_j(x)\right)^{-1}\right]; \qquad x > 0;\ k = 1,\ldots,n,$$

де $m_j(x) = g_j(x) + i\pi p_j(x)$, і розв'язок такої системи рівнянь існує і єдиний у класі функцій $\{g_k(x); p_k(x) > 0; x > 0; k = 1,\ldots,n\}$.

Лема 6.

$$\sum_{j=1}^n n^{-1}p_j(x) \le cx^{-1/2}, \qquad 0 < x < c < \infty.$$

Доведення. Аналогічно тому, як було зроблено при доведені леми 5, маємо

$$[m_k(x)]^{-1} = -x + \sum_{l=1}^n n^{-1}a_{kl}\left(1 + \sum_{j=1}^n n^{-1}a_{jl}m_j(x)\right)^{-1}.$$

Звідси

$$x\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_k(x) \le \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\left[\sum_{j=1}^n n^{-1}a_{jl}\pi p_j(x)\right]^{-1} \le c_1\left[n^{-1}\sum_{j=1}^n p_j(x)\right]^{-1}.$$

Отже

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n} p_j(x) \le c_1 x^{-1/2}.$$

Звідси випливає твердження леми 6. □

В силу леми 6 та (25) знаходимо

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \operatorname{per} A - \ln n - n^{-1}\,\mathsf{E}\ln\det\left[\alpha I + \Xi^T\Xi n^{-1}\right]\right]$$
$$= \lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \operatorname{per} A - \ln .. - \int_0^\infty \ln(\alpha + x) n^{-1}\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\,dx\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \operatorname{per} A - \ln n - \int_0^\infty (\ln x) n^{-1}\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\,dx\right] = 0.$$

Теорему 2 доведено. □

Доведення теореми 3. Якщо матриця An^{-1} двічі стохастична, то легко бачити, що існує розв'язок системи рівнянь (3), рівний $c_k(\alpha) = c(\alpha)$, $k = 1,\dots,n$, де $c(\alpha)$ є розв'язком рівняння

$$c(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{1+c(\alpha)}},$$

що дорівнює $c(\alpha) = (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha})/2$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\ln \operatorname{per} A - \ln n\right] = -\int_0^\infty \left[\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+4\alpha}}{2} - \alpha^{-1}\chi(\alpha > 1)\right] d\alpha = -1.$$

Теорему 3 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Л. Гирко, *Предельные теоремы для перманента случайной матрицы*, Теория вероятност. и матем. статист. 3 (1971), 29–34.
2. В. Л. Гирко, *О неравенствах для случайных детерминанта и перманента*, Теория вероятност. и матем. статист. 4 (1971), 48–57.
3. В. Л. Гирко, *Об уточнении некоторых теорем для случайных детерминанта и перманента*, Теория вероятност. и матем. статист. 7 (1972), 28–32.
4. L. A. Pastur, *Спектры случайных самосопряженных операторов*, Успехи математических наук **28** (1973), № 1, 1–67.
5. V. L. Girko, *Theory of random determinants*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
6. В. Л. Гирко, *Каноническое спектральное уравнение для сингулярных спектральных функций случайных матриц*, Успехи математических наук **48** (1993), № 3, 163–180.
7. В. С. Королюк, Ю. В. Боровских, *Случайные перманенты*, Изд-во Института математики, Киев, 1993.
8. Х. Минк, *Перманенты*, "Мир", Москва, 1982.
9. M. R. Jerrum, *Ananalysis of Monte Carlo algorithm for estimating the permanent*, Techical Report ECS-LFCS-91-164 (June 1991), University of Edinburgh, Dept. of Computer Science.
10. M. R. Jerrum and A. J. Sinclair, *Approximating the permanent*, SIAM Journal on Computing **18** (1989), 1149–1178.
11. Alistar Sinclair, *Algorithms for random generation and counting: A Markov chain approach*, Birkhäuser, Basel–Boston, 1993.

252127 Київ, проспект Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, факультет кібернетики, кафедра прикладної статистики

Надійшла 7.09.94