Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 39–45

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 39–45

СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО ДВОВИМІРНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

УДК 519.21

М. Ф. ГОРОДНІЙ

РЕЗЮМЕ. Наведено достатні умови існування обмеженого і стаціонарного розв'язку $\{x(\nu,\mu)\}$ рівняння

$$\begin{aligned}Ax(\mu,\nu) = x(\nu+1,\mu+1) + x(\nu+1,\mu-1) + x(\nu-1,\mu+1) + x(\nu-1,\mu-1)\\ - 4x(\nu,\mu) + \sum_{k=2}^{\infty} G_k(x(\nu,\mu),\dots,x(\nu,\mu)) + y(\nu,\mu), \qquad (\nu,\mu)\in \boldsymbol{Z}^2,\end{aligned}$$

у банаховому просторі. Тут A — замкнений оператор, G_k — k-лінійна обмежена форма, $\{y(\mu,\nu)\}$ — обмежена послідовність або стаціонарне випадкове поле.

У роботах [1, 2] запропоновано метод доведення існування обмежених розв'язків детермінованого і стаціонарних розв'язків стохастичного операторного рівняння Ріккаті, вид нелінійності якого не дозволяє звести задачу до застосування локальної умови Ліпшіца. При цьому використовується явний вид нелінійності рівняння Ріккаті. Мета даної статті — узагальнити вказаний метод на випадок рівнянь з нелінійністю загального вигляду і застосувати його для дослідження існування обмежених розв'язків одного різницевого рівняння на $\boldsymbol{Z}^2$ і стаціонарних розв'язків його стохастичного аналога. Задачі, що зводяться до аналізу рівнянь такого вигляду, розглянуто в [3].

1. Обмежені розв'язки детермінованого різницевого рівняння

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний сепарабельний банахів простір; $\mathcal{L}(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з B у B; I — одиничний оператор в B; A — замкнений оператор, що діє в B, з областю визначення $D(A)$; $y := \{\, y(\nu,\mu) \colon (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2 \,\}$ — обмежена за нормою послідовність елементів простору B, тобто така, що

$$\|y\|_\infty := \sup_{(\nu,\mu)\in \boldsymbol{Z}^2} \|y(\nu,\mu)\| < +\infty.$$

Для натурального $k \geq 2$ нехай $G_k \colon B^k \mapsto B$ — k-лінійна обмежена форма з нормою g_k [4, с. 451]. Покладемо

$$\begin{aligned}Lx(\nu,\mu) := Ax(\nu,\mu) - \big(x(\nu+1,\mu+1) + x(\nu+1,\mu-1)\\ + x(\nu-1,\mu+1) + x(\nu-1,\mu-1) - 4x(\nu,u)\big)\end{aligned}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15, 60H20; Secondary 34G20, 34K30.

і вивчимо питання про існування обмеженого в B розв'язку $x := \{\, x(\nu,\mu) \colon (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2 \,\}$ різницевого рівняння

$$Lx(\nu,\mu) = \sum_{k=2}^{\infty} G_k(x(\nu,\mu),\dots,x(\nu,\mu)) + y(\nu,\mu), \qquad (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2. \tag{1}$$

Далі використовується таке допоміжне твердження

Лема 1. *Припустимо, що резольвентна множина $\rho(A)$ оператора A містить відрізок $[-8;0]$. Тоді існує набір $\{\, C(\nu,\mu) \colon (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2 \,\}$ операторів із $\mathcal{L}(B)$, який задовольняє умову*

$$c := \sum_{(\nu,\mu)\in \boldsymbol{Z}^2} \|C(\nu,\mu)\| < +\infty$$

і такий, що лінійне різницеве рівняння

$$Lu(\nu,\mu) = y(\nu,\mu), \qquad (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2, \tag{2}$$

має для довільної обмеженої послідовності y обмежений розв'язок u виду

$$u(\nu,\mu) = \sum_{(p,q)\in \boldsymbol{Z}^2} C(\nu-p,\mu-q)y(p,q), \qquad (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2.$$

Доведення леми 1 проводиться за планом доведення теореми 1 з роботи [5]. Не зупиняючись на його детальному викладі, зазначимо, що умова леми 1 необхідна і достатня для того, щоб для довільної обмеженої послідовності y рівняння (2) мало єдиний обмежений розв'язок u, який задовольняє умову

$$\sup_{(\nu,\mu)\in \boldsymbol{Z}^2} (\|u(\nu,\mu)\| + \|Au(\nu,\mu)\|) < +\infty.$$

Оператори $\{\, C(\nu,\mu) \colon (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2 \,\}$, за допомогою яких визначається розв'язок u, є коефіцієнтами розкладу у ряд Лорана операторної функції

$$f(z_1,z_2) = \bigl(A - I\bigl(z_1z_2 + z_1z_2^{-1} + z_1^{-1}z_2 + z_1^{-1}z_2^{-1} - 4\bigr)\bigr)^{-1},$$

аналітичної внаслідок включення $[-8;0] \subset \rho(A)$ в деякій відкритій області в $\boldsymbol{C}^2$, що містить множину $\{(z_1,z_2) \in \boldsymbol{C}^2 \colon |z_1| = |z_2| = 1\}$.

Основним результатом цього пункту є наступна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що $[-8;0] \subset \rho(A)$, існують дійсні числа $g > 0$, $\beta > 0$ такі, що $\forall k \geq 2$*

$$g_k \leq g\beta^{k-2}, \tag{3}$$

а також справджується нерівність

$$c\left(\sqrt{cg+\beta} + \sqrt{cg}\right)^2 \|y\|_\infty \leq 1. \tag{4}$$

Тоді рівняння (1) *має обмежений розв'язок x, відповідний обмеженій послідовності y.*

Для доведення теореми 1 використовуються наступні твердження.

Розглянемо послідовність $\{\, a_n \colon n \geq 0 \,\}$ невід'ємних дійсних чисел, яка визначається співвідношеннями

$$a_0 = \|y\|_\infty,$$

$$a_n = \sum_{k=2}^{\infty} c^k \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\Lambda_k(n)} a_{i_1}\cdots a_{i_k}, \qquad n \geq 1. \tag{5}$$

Тут

$$\Lambda_k(n) := \{ (i_1, \ldots, i_k) \in Z^k : i_\nu \geq 0, 1 \leq \nu \leq k, i_1 + \cdots + i_k = n - 1 \}.$$

Лема 2. *Припустимо, що справджуються нерівності* (3), (4). *Тоді ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{6}$$

збігається.

Доведення. Нехай функція $\psi(t)$ визначається за допомогою рівностей

$$\psi^2(t)(gc^2t + \beta c) - \psi(t)(1 + \beta c a_0) + a_0 = 0, \qquad \psi(0) = a_0. \tag{7}$$

Оскільки $\beta c a_0 < 1$ внаслідок (4), а також для довільного $t \in [-1; 1]$ функція

$$\eta(t) := \frac{a_0(gc^2t + \beta c)}{(1 + \beta c a_0)^2}$$

задовольняє нерівність $4|\eta(t)| \leq 1$, то, скориставшись рівністю

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}^n z^n, \qquad 0 < 4|z| \leq 1,$$

і співвідношенням (7), переконуємось, що

$$\psi(t) = \frac{a_0\left(1 - \sqrt{1 - 4\eta(t)}\right)}{2\eta(t)(1 + \beta c a_0)} = \frac{a_0}{1 + \beta c a_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}^n \eta^n(t), \qquad t \in [-1; 1]. \tag{8}$$

Із рівності (8) і властивостей абсолютно збіжних рядів випливає, що функція $\psi(t)$ розкладається в ряд Тейлора з радіусом збіжності $r \geq 1$ в околі точки $t = 0$. Внаслідок неперервності функції $\psi(t)$ на інтервалі $(-r; r)$ і нерівності $\beta c a_0 < 1$ в деякому околі точки $t = 0$ справджується оцінка $\beta c \psi(t) < 1$. У цьому околі рівність (7) набирає вигляду

$$\psi(t) = a_0 + g\beta^{-2}t \sum_{k=2}^{\infty} (\beta c \psi(t))^k. \tag{9}$$

Зазначимо, що до правої частини (9) можна застосувати теорему про підстановку одного степеневого ряду в інший [6, с. 485], згідно з якою для коефіцієнтів $\{ b_n : n \geq 0 \}$ розкладу $\psi(t)$ у ряд Тейлора в околі точки $t = 0$ є правильними рівності

$$\begin{gathered} b_0 = a_0, \\ b_n = g \sum_{k=2}^{\infty} \beta^{k-2} c^k \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in \Lambda_k(n)} b_{i_1} \cdots b_{i_k}, \qquad n \geq 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Внаслідок (3), (5), (10) для будь-якого $n \geq 0$ справджується оцінка $0 < a_n \leq b_n$, яка з урахуванням збіжності ряду з (8) при $t = 1$ забезпечує збіжність ряду (6).

Лема 2 доведена. □

Розглянемо послідовність різницевих рівнянь

$$Lx_n(\nu, \mu) = y_n(\nu, \mu), \qquad (\nu, \mu) \in Z^2, \ n \geq 0, \tag{11}$$

у якій

$$y_0(\nu,\mu) = y(\nu,\mu),$$

$$y_n(\nu,\mu) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\Lambda_k(n)} G_k(x_{i_1}(\nu,\mu),\dots,x_{i_k}(\nu,\mu)), \tag{12}$$

$$(\nu,\mu)\in \mathbf{Z}^2, \qquad n\ge 1.$$

Згідно з лемою 1 для початкової послідовності $y_0 = y$ існує обмежений розв'язок x_0 рівняння (11) при $n-0$, причому

$$\|x_0\|_\infty \le c\|y\|_\infty = ca_0.$$

Тому при виконанні умов леми 2 побудована згідно з (12) послідовність y_1 є обмеженою і задовольняє нерівність $\|y_1\| \le a_1$. Отже, за допомогою (11) можна визначити послідовність x_1, що відповідає y_1, і т.д. В результаті одержимо обмежені послідовності $x_n = \{\, x_n(\nu,\mu)\colon (\nu,\mu)\in \mathbf{Z}^2 \,\}$, $y_n = \{\, y_n(\nu,\mu)\colon (\nu,\mu)\in\mathbf{Z}^2\,\}$, $n\ge 0$.

Лема 3. *Для довільного $n\ge 0$ справджуються нерівності*

$$\|y_n\|_\infty \le a_n, \qquad \|x_n\|_\infty \le ca_n. \tag{13}$$

Лема 3 доводиться за допомогою методу математичної індукції.

Доведення теореми 1. Покладемо

$$x(\nu,\mu) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\nu,\mu), \qquad (\nu,\mu)\in\mathbf{Z}^2,$$

і доведемо, що x — обмежений розв'язок різницевого рівняння (1), відповідний обмеженій послідовності y. Зафіксуємо $(\nu,\mu)\in\mathbf{Z}^2$. З умови (3) і лем 2 і 3 випливає

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n(\nu,\mu)\| < +\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Ax_n(\nu,\mu)\| \le 8\sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\|_\infty + \sum_{n=0}^{\infty}\|y_n\|_\infty < +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\Lambda_k(n)} \|G_k(x_{i_1}(\nu,\mu),\dots,x_{i_k}(\nu,\mu))\|$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} g_k c^k \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\Lambda_k(n)} a_{i_1}\dots a_{i_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Тому, підсумовуючи по n рівності (11) і використовуючи замкненість оператора A, робимо висновок, що є правильним наступний ланцюг рівностей:

$$Lx(\nu,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} Lx_n(\nu,\mu) = y(\nu,\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(\nu,\mu)$$
$$= y(\nu,\mu) + \sum_{k=2}^{\infty}\Bigg(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\Lambda_k(n)} G_k\big(x_{i_1}(\nu,\mu)\dots,x_{i_k}(\nu,\mu)\big)\Bigg)$$
$$= y(\nu,\mu) + \sum_{k=2}^{\infty}\Bigg(\lim_{N\to\infty} G_k\Bigg(\sum_{i_1=0}^{N} x_{i_1}(\nu,\mu),\dots,\sum_{i_k=0}^{N} x_{i_k}(\nu,\mu)\Bigg)\Bigg)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} G_k(x(\nu,\mu),\dots,x(\nu,\mu)) + y(\nu,\mu).$$

Теорема 1 доведена. □

2. Дослідження стохастичного аналогу різницевого рівняння (1)

У подальшому використовується поняття стаціонарного поля на $\boldsymbol{Z}^2$, яке визначається таким чином [7].

Означення. Сукупність B-значних випадкових елементів $\varepsilon := \{\varepsilon(\nu,\mu) : (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2\}$, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, називається стаціонарним полем, якщо

$$\forall m \in \boldsymbol{N}, \qquad \forall\{(\nu_1,\mu_1),\dots,(\nu_m,\mu_m)\} \in \boldsymbol{Z}^2, \qquad \forall\{D_1,\dots,D_m\} \subset \mathfrak{B}(B):$$
$$\mathsf{P}\{\varepsilon(\nu_k,\mu_k) \in D_k, 1 \le k \le m\} = \mathsf{P}\{\varepsilon(\nu_k+1,\mu_k) \in D_k, 1 \le k \le m\}$$
$$= \mathsf{P}\{\varepsilon(\nu_k,\mu_k+1) \in D_k, 1 \le k \le m\}.$$

Тут $\mathfrak{B}(B)$ — σ-алгебра борелевих множин B.

Позначимо через $\mathcal{P}$ сукупність усіх стаціонарних B-значних полів ε, що задовольняють умову

$$\|\varepsilon\|_\infty := \sup_{p\ge 1} \left(\mathbf{M}\,\|\varepsilon(0,0)\|^p\right)^{1/p} < +\infty, \tag{14}$$

і вивчимо питання про існування стаціонарного розв'язку стохастичного різницевого рівняння

$$Lx(\nu,\mu) = \sum_{k=2}^{\infty} G_k(x(\nu,\mu),\dots,x(\nu,\mu)) + \varepsilon(\nu,\mu), \qquad (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2, \tag{15}$$

у якому $\varepsilon \in \mathcal{P}$. Під розв'язком рівняння (15) будемо розуміти стаціонарне поле x, яке задовольняє рівняння (15) з імовірністю 1.

Теорема 2. *Припустимо, що $\varepsilon \in \mathcal{P}$, $[-8;0] \subset \rho(A)$, виконується умова* (3) *і справджується нерівність*

$$c\left(\sqrt{cg+\beta} + \sqrt{cg}\right)^2 \|\varepsilon\|_\infty \le 1. \tag{16}$$

Тоді рівняння (15) *має стаціонарний розв'язок x, відповідний стаціонарному полю ε.*

Доведення теореми 2 ґрунтується на наступних лемах.

Лема 4. *Якщо $[-8;0] \subset \rho(A)$, то лінійне стохастичне різницеве рівняння*

$$Lu(\nu,\mu) = \varepsilon(\nu,\mu), \qquad (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2, \tag{17}$$

має для довільного стаціонарного поля ε з $\mathbf{M}\,\|\varepsilon(0,0)\| < +\infty$ стаціонарний розв'язок виду

$$u(\nu,\mu) = \sum_{(p;q)\in \boldsymbol{Z}^2} C(\nu-p,\mu-q)\varepsilon(p,q), \qquad (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2. \tag{18}$$

Твердження леми 4 випливає з теореми 1 роботи [7]. Зазначимо, що в рівностях (18) використовується той же набір операторів $\{C(\nu,\mu) : (\nu,\mu) \in \boldsymbol{Z}^2\} \subset \mathcal{L}(B)$, що і в лемі 1.

Лема 5. *Якщо $\varepsilon \in \mathcal{P}$, то відповідний ε розв'язок u виду* (18) *рівняння* (17) *задовольняє нерівність*

$$\|u\|_\infty \le c\|\varepsilon\|_\infty. \tag{19}$$

Доведення леми 5 ґрунтується на застосуванні нерівності Гьольдера.

Доведення теореми 2. Покладемо $a_0 := \|\varepsilon\|_\infty$ і задамо послідовність дійсних чисел $\{\, a_n : n \ge 1 \,\}$ за допомогою рекурентної формули (5). Внаслідок нерівності (16) для цієї послідовності виконуються умови леми 2. Тому стаціонарні поля x_n, ε_n, $n \ge 0$, визначені послідовно за допомогою стохастичних різницевих рівнянь

$$Lx_n(\nu,\mu) = \varepsilon(\nu,\mu), \qquad (\nu,\mu) \in \mathbf{Z}^2. \ n \ge 0, \tag{20}$$

де

$$\varepsilon_0(\nu,\mu) := \varepsilon(\nu,\mu),$$

$$\varepsilon_n(\nu,\mu) := \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\Lambda_k(n)} G_k(x_{i_1}(\nu,\mu),\ldots,x_{i_k}(\nu,\mu)), \tag{21}$$

$$(\nu,\mu) \in \mathbf{Z}^2, \qquad n \ge 1,$$

задовольняють нерівності

$$\|\varepsilon_n\|_\infty \le a_n, \qquad \|x_n\|_\infty \le ca_n, \qquad n \ge 0. \tag{22}$$

Дійсно, згідно з лемами 4 і 5 рівняння (20) при $n = 0$ має стаціонарний розв'язок x_0 виду (18), відповідний стаціонарному полю $\varepsilon_0 = \varepsilon$, причому $\|x_0\|_\infty \le ca_0$. Отже, за допомогою рівності (21) можна визначити поле ε_1, для якого з урахуванням нерівностей Мінковського і Гьольдера справджується оцінка

$$\|\varepsilon_1\|_\infty \le \sum_{k=2}^{\infty} g_k c^k a_0^k = a_1.$$

Тому для побудованого по ε_1 розв'язку x_1 рівняння (20) при $n = 1$ виконується нерівність $\|x_1\|_\infty \le ca_1$ і т.д.

Правильність нерівностей (22) перевіряється за допомогою методу математичної індукції.

Внаслідок леми 2 і нерівностей (22) для кожного $(\nu,\mu) \in \mathbf{Z}^2$ ряд з математичних сподівань

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M}\,\|x_n(\nu,\mu)\|$$

є збіжним. Тому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(\nu,\mu)$$

збігається з імовірністю 1 за нормою в B, і його сума $x(\nu,\mu)$ є B-значним випадковим елементом. Таким чином, побудовано випадкове поле $x = \{\, x(\nu,\mu) : (\nu,\mu) \in \mathbf{Z}^2 \,\}$, яке є стаціонарним внаслідок стаціонарності полів x_n, $n \ge 0$. Оскільки з урахуванням рівностей (20) при фіксованому $(\nu,\mu) \in \mathbf{Z}^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M}\,\|Ax_n(\nu,\mu)\| \le 8\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_\infty + \sum_{n=0}^{\infty} \|\varepsilon_n\|_\infty < +\infty,$$

то внаслідок замкнености оператора A з імовірністю 1

$$Lx(\nu,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} Lx_n(\nu,\mu).$$

Скориставшись також тим фактом, що внаслідок умови (3), нерівностей (22) і леми 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\Lambda_k(n)} \mathrm{M}\,\|G_k(x_{i_1}(\nu,\mu),\dots,x_{i_k}(\nu,\mu)\| < +\infty,$$

за допомогою міркувань, аналогічних наведеним при доведенні теореми 1, можна переконатися, що x — стаціонарний розв'язок рівняння (15), відповідний стаціонарному полю ε.

Теорема 2 доведена. □

Література

1. А. Я. Дороговцев, *О периодических и ограниченных решениях оперcаторного уравнения Риккати*, Украинский математ. журнал **45** (1993), № 2, 239–242.
2. ———, *Стационарные и периодические реш ния операторного уравнения Риккати со случайным возмущением*, Украинский математ. журнал **45** (1993), № 5, 609–615.
3. ———, *Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве*, Теория вероятност. и математ. статист. (1990), № 42, 35–42.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, "Наука", Москва, 1965.
5. М. Ф. Городний, *Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве*, Украинский математ. журнал **43** (1991), № 1, 41–46.
6. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, "Наука", Москва, 1970.
7. М. Ф. Городний, А. Я. Дороговцев, *О стационарных решениях одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве*, Стохастический анализ и его приложения, Институт математики АН УССР, Киев, 1989, стр. 25–33.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра математичного аналізу

Надійшла 11.05.94