Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 46–50

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 46–50

СУМІСНИЙ РОЗПОДІЛ ПРОЦЕСУ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ СУМАМИ ВИПАДКОВОГО ЧИСЛА ДОДАНКІВ, ТА ЙОГО ЕКСТРЕМУМІВ. II

УДК 519.21

Д. В. ГУСАК

РЕЗЮМЕ. Для процесу $\xi(t)$, введеного в ч. 1, вивчається сумісний розподіл пари: самого процесу та його мінімуму, а також розподіл процесу та доповнення до мінімуму.

Дана робота є продовженням опублікованої в попередньому випуску частини I [1]. Тому нумерація формул і тверджень в частині II є продовженням відповідної нумерації з частини I.

Для процесу $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, що розглядався в [1], вивчається сумісний розподіл пари $\{\xi(t), \xi^-(t)\}$ (самого процесу та його мінімуму), а також пари $\{\xi(t), \bar{\bar{\xi}}(t)\}$ (процесу та доповнення до мінімуму). Зауважимо, що доповнення до мінімуму $\bar{\bar{\xi}}(t) = \xi(t) - \xi^-(t)$ описує блукання у верхній півплощині з поглинанням у нулі від'ємних значень. Аналогічно, доповнення до максимуму $\bar{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t)$ описує блукання в нижній півплощині з поглинанням додатних значень у нулі.

Для дослідження розподілу пар $\{\xi(t), \xi^-(t)\}$, $\{\xi(t), \tau^-(z)\}$ $(z > 0)$ скористаємось стохастичними зображеннями

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_1(t), & \eta_1 > t; \\ \xi_* + \xi_1(t - \eta_1), & \eta_1 < t, \end{cases}$$

$$\tau^-(z) = \begin{cases} \eta_1, & \xi_* < z, \xi_* = \xi_1 + \xi_1(\eta_1); \\ \eta_1 + \tau^-(z - \xi_*), & \xi_* > z, \end{cases}$$

з яких для сумісного розподілу $(z \le 0, x \ge 0)$

$$P_t^-(x, z) = \mathsf{P}\{\xi(t) \ge x + z, \tau^-(z) \ge t\} = \mathsf{P}\{\xi(t) \ge z + x, \xi^-(t) \ge z\}$$

виводиться рівняння

$$P_t^-(x, z) = \overline{G}(t)\mathsf{P}\{\xi_1(t) \ge x + z\} + \int_0^t e^{-sy}\, dG(y) \int_z^\infty P_{t-y}^-(x, z - v)\, dP_*(y, v),$$
$$P_*(y, v) = \mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_1(y) < v\}.$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60J50, 60J70; Secondary 60K10, 60K15.

Для перетворення Лапласа $P^-(s,x,z) = s\int_0^\infty e^{-st} P_t^-(x,z)\,dt$ одержуємо інтеґральне рівняння

$$P^-(s,x,z) = a_s(x+z) + \int_z^\infty P^-(s,x,z-v)\,\mathsf{E}[e^{-s\eta}, \xi_* \in dv],$$
$$a_s(x+z) = s\int_0^\infty e^{-st}\overline{G}(t)\mathsf{P}\{\xi_1(t) > x+z\}\,dt.$$

З цього рівняння при $x=0$ для $P^-(s,0,z) = \mathsf{P}\{\xi^-(\theta_s) > z\}$ випливає

$$P^-(s,0,z) = a_s(z) + \int_z^\infty P^-(s,0,z-v)\,\mathsf{E}[e^{-s\eta_1}, \xi_* \in dv]. \tag{19}$$

Після перетворення Лапласа за змінною x для

$$\widetilde{P}^-(s,v,z) = \int_0^\infty e^{-vx} P^-(s,x,z)\,dx \qquad (\operatorname{Re} v > 0)$$

одержуємо рівняння

$$\widetilde{P}^-(s,v,z) = a_z(s,v) + \int_z^\infty \widetilde{P}^-(s,v,z-y)\,\mathsf{E}[e^{-s\eta_1}, \xi_* \in dy], \tag{20}$$

де $a_z(s,v)$ обчислюється таким чином $(z<0)$:

$$a_z(s,v) = \int_0^\infty e^{-xv} a_s(z+x)\,dx = a_{z1}(s,v) + a_{z2}(s,v),$$
$$a_{z1} = s\int_0^\infty e^{-st}\overline{G}(t)\,dt \int_0^{-z} e^{-xv}\,dx = \frac{1}{v}(1-e^{zv})(1-g(s)),$$
$$a_{z2} = s\int_0^\infty e^{-st}\overline{G}(t)\,dt \int_{-z}^\infty e^{-xv}\mathsf{P}\{\xi_1(t) < x+z\}\,dx = \frac{s}{v}e^{vz}\int_0^\infty \overline{G}(t)e^{-st}\left(1-e^{t\psi(iv)}\right)$$
$$= \frac{1}{v}e^{vz}(1-g(s)) - \frac{1}{v}\frac{se^{vz}}{s-\psi(iv)}[1-g(s-\psi(iv))],$$

тобто

$$a_z(s,v) = \frac{1}{v}(1-g(s)) - \frac{1}{v}\frac{se^{vz}}{s-\psi(iv)}[1-g(s-\psi(iv))].$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}\widetilde{P}^-(s,v,z) &= \int_0^\infty e^{-vx}\int_x^\infty \mathsf{P}\{\xi(\theta_s) - z \in dy, \xi(\theta_s) > z\}\,dx \\ &= \int_0^\infty \mathsf{P}\{\xi(\theta_s) - z \in dy, \xi^-(\theta_s) > z\}\int_0^y e^{-vx}\,dx \\ &= v^{-1}\left[\mathsf{P}\{\xi^-(\theta_s) > z\} - \mathsf{E}[e^{-v(\xi(\theta_s)-z)}, \xi^-(\theta_s) > z]\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Підставимо це значення $\widetilde{P}^-(s,v,z)$ у рівняння (20):

$$\begin{aligned}&P^-(s,0,z) - \mathsf{E}\left[e^{v(z-\xi(\theta_s))}, \xi^-(\theta_s) > z\right] \\ &\quad = va_z(s,v) \\ &\qquad + \int_z^\infty \left[P^-(s,0,z-y) - \mathsf{E}\left[e^{-v(\xi(\theta_s)-z+y)}, \xi^-(\theta_s) > z-y\right]\right]\mathsf{E}\left[e^{-s\eta_1}, \xi_* \in dy\right].\end{aligned} \tag{22}$$

Враховуючи (19), у рівнянні (22) сукупність доданків з $P^-(s,0,\cdot)$ замінимо на $a_s(z)$; тому з нього випливає

$$\mathsf{E}[\exp\{v(z-\xi(\theta_s))\},\xi^-(\theta_s)>z] \\ = a_s(z) - va_z(s,v) + \int_z^\infty \mathsf{E}\left[e^{-v(\xi(\theta_s)-z+y)},\xi^-(\theta_s)>z-y\right]\mathsf{E}\left[e^{-s\eta_1},\xi_*\in dy\right]. \tag{23}$$

Зауважимо, що

$$a_s(z) - va_z(s,v) = \frac{se^{vz}}{s-\psi(iv)}[1-g(s-\psi(iv))].$$

Теорема 2. *Якщо для процесу $\xi(t)$ виконується умова*

$$-\infty < \mathsf{E}\,\xi^-(\theta_s) < 0,$$

то для твірної функції ($\operatorname{Re} v > 0$, $\operatorname{Im}\alpha \le 0$)

$$\mathcal{P}^-(s,\alpha,v) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha z}\,\mathsf{E}\left[e^{-v(\xi(\theta_s)-z)},\xi^-(\theta_s)>z\right]dz$$

справджується співвідношення

$$\mathcal{P}^-(s,\alpha,v) = \frac{1}{v+i\alpha}\,\frac{s[1-g(s-\psi(iv))]}{(s-\psi(iv))(1-g(s))}\,\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}\,\mathsf{E}\,e^{-v\xi_*^+(\theta_s)}. \tag{24}$$

Розподіл пари $\{\xi^-(\theta_s),\bar{\bar{\xi}}(\theta_s)\}$ визначається співвідношенням

$$\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)-v\bar{\bar{\xi}}(\theta_s)} = \frac{s[1-g(s-\psi(iv))]}{(1-g(s))(s-\psi(iv))}\,\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}\,\mathsf{E}\,e^{-v\xi_*^+(\theta_s)}. \tag{25}$$

Для $v=0$

$$\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi^-(\theta_s)} = \mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}. \tag{26}$$

Для $\alpha=0$

$$\mathsf{E}\,e^{-v\bar{\bar{\xi}}(\theta_s)} = \frac{s[1-g(s-\psi(iv))]}{(1-g(s))(s-\psi(iv))}\,\mathsf{E}\,e^{-v\xi_*^+(\theta_s)}. \tag{27}$$

Доведення. Обмеженість $\mathsf{E}\,\xi^-(\theta_s)$ дозволяє застосувати до (23) твірне перетворення за змінною $z<0$ і одержати рівняння для $\mathcal{P}^-$:

$$\mathcal{P}^-(s,\alpha,v) = \frac{s}{s-\psi(iv)}\,\frac{1}{i\alpha+v}[1-g(s-\psi(iv))] + [\varphi(\alpha)\mathcal{P}^-(s,\alpha,v)]_-^0\,g(s-\psi(\alpha)),$$

яке можна переписати у вигляді

$$\mathcal{P}^-(s,\alpha,v)k(s,\alpha) = \frac{s}{s-\psi(\alpha)}\,\frac{1}{v+i\alpha}[1-g(s-\psi(iv))] - g(s-\psi(\alpha))[\varphi(\alpha)\mathcal{P}^-(s,\alpha,v)]_-^0.$$

Звідси, застосовуючи факторизаційний розклад (5) і міркування, аналогічні тим, що використовувались при доведенні теореми 1, одержуємо співвідношення

$$\mathcal{P}^-(s,\alpha,v) = \frac{s\,\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}}{(1-g(s))(s-\psi(iv))}\left[\frac{1-g(s-\psi(\alpha))}{v+i\alpha}\,\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}\right]_-^0. \tag{28}$$

Враховуючи, що функція під знаком проекції в (28) має вигляд згортки

$$G_-(x) = \int_0^\infty e^{v(x-y)}Q_+(y)\,dy, \qquad x\le 0,$$

з одностороннім перетворенням Фур'є

$$g_-(\alpha) = q^+(iv)(v+i\alpha)^{-1},$$

по аналогії з лемою 3 згадану проекцію можна записати таким чином:

$$\left[\frac{1-g(s-\psi(\alpha))}{v+i\alpha}\,\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}\right]_+^0 = \frac{1-g(s-\psi(iv))}{v+i\alpha}\,\mathsf{E}\,e^{-v\xi_*^+(\theta_s)}.$$

Тоді з (28) легко одержати співвідношення (24).

Зауважимо, що

$$\int_{-\infty}^0 e^{i\alpha z}\,\mathsf{E}\left[e^{-v(\xi(\theta_s)-z)}, \xi^-(\theta_s) > z\right] dz = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha z}\int_z^0 \mathsf{E}\left[e^{-v(\xi(\theta_s)-z)}, \xi^-(\theta_s)\in dx\right] dz$$
$$= \frac{1}{i\alpha+v}\,\mathsf{E}\left[e^{-v\bar{\bar{\xi}}(\theta_s)+i\alpha\xi^-(\theta_s)}\right].$$

Звідси на основі (24) легко одержати формулу (25) для сумісного розподілу пари $\{\xi^-(\theta_s), \bar{\bar{\xi}}(\theta_s)\}$ і відповідно формули (26) та (27) для частинних розподілів. □

Наслідок 2. *Якщо виконується умова*

$$-\infty < \mathsf{E}\,\xi_* = \mathsf{E}\,\xi_1 + \mathsf{E}\,\eta_1\,\mathsf{E}\,\xi_1' < 0,$$

то граничний розподіл доповнення до мінімуму $\bar{\bar{\xi}} = \lim_{t\to\infty}\bar{\bar{\xi}}(t)$ *визначається твірною функцією*

$$\mathsf{E}\,e^{-v\bar{\bar{\xi}}} = \frac{1-g(-\psi(iv))}{-\,\mathsf{E}\,\eta_1\psi(iv)}\,\mathsf{E}\,e^{-v\xi_*^+}. \tag{29}$$

Якщо $0 < \mathsf{E}\,\xi_* < \infty$, *то існує невироджений розподіл абсолютного мінімуму* $\xi^- = \lim_{t\to\infty}\xi^-(t)$; *при цьому*

$$\mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi^-} = \mathsf{E}\,e^{i\alpha\xi_*^-}. \tag{30}$$

Для доведення (29) і (30) використовуються ті ж міркування, що й при доведенні наслідку 1.

Порівнюючи формули (11) та (27), можемо сказати, що розподіли максимуму $\xi^+(\theta_s)$ і доповнення до мінімуму $\bar{\bar{\xi}}(\theta_s)$ суттєво відрізняються. Також з формул (12) та (26) випливає, що розподіли доповнення до максимуму $\bar{\xi}(\theta_s)$ і мінімуму $\xi^-(\theta_s)$ відрізняються між собою. Ці розподіли ідентичні відповідно у двох випадках:

1) $c_1 = \psi_1(\alpha) \equiv 0$;
2) $g(s) = c_2(s+c_2)^{-1}$.

Слід відмітити, що в [3] ці функціонали розглядались для випадку, коли стрибки процесу мають дискретний розподіл. Для дослідження їх розподілів там використовувався допоміжний ланцюг Маркова $\{\beta_n, n \geq 0\}$, породжений суперпозицією процесів відновлення $\nu(t)$ та $\nu_1(t)$, і відповідно з цим виводилась пара інтеґральних рівнянь для цих розподілів (одне рівняння для $\beta_0 = 0$, друге для $\beta_0 = x > 0$). На цьому шляху виникала необхідність у виключенні одного з розподілів функціонала для $\beta_0 = x > 0$. Запропонований нами підхід дослідження розподілу граничних функціоналів з використанням дещо ускладнених стохастичних зображень дозволяє уникнути використання ланцюга $\{\beta_n, n \geq 0\}$ і одержати одразу одне рівняння для досліджуваного функціонала. В обох випадках кінцеві співвідношення для відповідних перетворень розподілу цих функціоналів мають однакову форму зображення через розподіли основних функціоналів допоміжного процесу $\xi_*^+(\theta_s)$ та $\xi_*^-(\theta_s)$. В [2] показано, що наявність у процесі $\xi(t)$ навіть монотонної компоненти $\xi_1(t) = at$ $(a > 0)$

призводить до порушення ідентичності розподілів $\xi^{+}(\theta_s)$ та $\bar{\bar{\xi}}(\theta_s)$ і відповідно $\xi^{-}(\theta_s)$ та $\bar{\xi}(\theta_s)$, яка має місце у випадку, коли $\xi(t) = \xi_2(t)$.

Для однорідних процесів з незалежними приростами (див. [4]) $\xi^{+}(\theta_s)$ та $\bar{\bar{\xi}}(\theta_s)$ (як і $\xi^{-}(\theta_s)$ та $\bar{\xi}(\theta_s)$) є однаково розподіленими.

Література

1. Д. В. Гусак, *Сумісний розподіл процесу, що задається сумами випадкового числа доданків, та його екстремумів.* I, Теорія ймовірност. та математ. статист. (1995), № 52, 41–52.
2. ———, *Факторизационные тождества для сумм случайного числа слагаемых*, Прикладные задачи теории вероятностей, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982, стр. 25–44.
3. Д. В. Гусак, А. М. Розуменко, *Факторизационные тождества для решетчатых блужданий, описываемых суммами случайного числа слагаемых*, Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи, Ин-т математики АН Украины, Киев, 1992, стр. 17–26.
4. Н. С. Братийчук, Д. В. Гусак, *Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями*, "Наукова думка", Киев, 1990.

252601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3, Інститут математики НАН України

Надійшла 15.12.93