Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 53, 1995, стор. 51–57

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 53, 1995, pp. 51–57

СИЛЬНИЙ ПРИНЦИП ІНВАРІАНТНОСТІ ДЛЯ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ З ОБЛАСТІ ПРИТЯГАННЯ СТІЙКОГО ЗАКОНУ

УДК 519.21

Н. М. ЗІНЧЕНКО

РЕЗЮМЕ. Розглянуто узагальнення сильного принципу інваріантності для сум незалежних однаково розподілених d-вимірних випадкових векторів $\{\xi_i, i \geq 1\}$ з області притягання стійкого закону Леві–Фельдгейма G_α, $\alpha \neq 1$, та доведена можливість апроксимації $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ за допомогою сум стійких випадкових векторів з точністю до $o(n^{1/\alpha-\lambda})$, $\lambda > 0$.

Сильний принцип інваріантності для сум незалежних однаково розподілених (н.о.р.) випадкових величин $\{x_i, i \geq 1\}$ з області притягання стійкого закону $G_{\alpha,\beta}$, $|\beta| \leq 1$, $0 < \alpha < 2$ вивчався в роботах [1–8]. Так, в [4–7] при деяких додаткових умовах доведена можливість побудови $\{x_i, i \geq 1\}$ на одному ймовірнісному просторі разом з послідовністю незалежних $G_{\alpha,\beta}$-розподілених випадкових величин $\{y_i, i \geq 1\}$ так, що майже напевне (м.н.)

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i\right| = o(n^{1/\alpha-\rho}), \qquad \rho = \rho(\alpha) > 0. \tag{1}$$

В цій статті розглянемо узагальнення (1) для сум $\boldsymbol{R}^d$-значних випадкових векторів з області притягання d-вимірного стійкого закону з параметром $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$. Випадок притягання до багатовимірного нормального розподілу ($\alpha = 2$) був предметом дослідження в [9, 10] (див. також [11]).

Нехай $\{\xi_i, i \geq 1\}$ — н.о.р. випадкові вектори, які приймають значення в d-вимірному евклідовому просторі $\boldsymbol{R}^d$ з нормою $|\cdot|$ і скалярним добутком $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Розглянемо послідовність сум

$$S_n^* = b_n^{-1} S_n - A_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

нормованих і центрованих за допомогою додатних чисел b_n та невипадкових векторів $A_n \in \boldsymbol{R}^d$.

Всі можливі граничні розподіли для S_n^* при $n \to \infty$ утворюють множину $\mathfrak{S}^d$ d-вимірних розподілів Леві–Фельдгейма. Невироджений розподіл $G \in \mathfrak{S}^d$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких b_1, $b_2 > 0$ знайдуться $b > 0$ та $a \in \boldsymbol{R}^d$ такі, що

$$G(b_1 x) + G(b_2 x) = G(bx + a). \tag{3}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F15, 60F17.

Робота виконана при частковому фінансуванні Державного комітету України з питань науки і технологій

Обов'язково $b = (b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{1/\alpha}$ для деякого $\alpha \in (0,2]$, α — параметр стійкого закону. Якщо в (3) $a = (0,\dots,0)$, то говорять про строго стійкі розподіли в $\boldsymbol{R}^d$. Множину строго стійких розподілів позначаємо через $\mathfrak{M}^d$. Для н.о.р. випадкових векторів $\{\xi_i\}$ з функцією розподілу (ф.р.) $G = G_\alpha \in \mathfrak{M}^d$

$$n^{-1/\alpha} S_n \stackrel{d}{=} \xi_1.$$

Кожен розподіл $G \in \mathfrak{S}^d$ визначається не тільки параметром α, але й деякою мірою $\mu(\cdot)$ на одиничній сфері в $\boldsymbol{R}^d$. Далі ф.р. та характеристичну функцію (х.ф.) d-вимірного стійкого закону позначаємо відпо зідно через $G_\alpha = G_{\alpha,\mu}(\cdot)$ та $g_\alpha = g_{\alpha,\mu}(\cdot)$. Х.ф. розподілу Леві–Фельдґейма допускає зображення [12]

$$g_{\alpha,\mu}(u) = g_{\alpha,\mu}(r\tau) = \exp\bigl\{i\langle u, a\rangle - r^\alpha (C_1(\tau) + iC_2(\tau)\bigr\}, \qquad 0 < \alpha < 2,$$

де $r = |u|$, $\tau = u/|u|$ — одиничний вектор напрямку в $\boldsymbol{R}^d$,

$$C_1(\tau) = \int_S |\langle \tau, x\rangle|^\alpha \mu(dx),$$

$$C_2(\tau) = \begin{cases} \int_S \operatorname{sgn}\langle \tau, x\rangle |\langle \tau, x\rangle|^\alpha \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)\mu(dx), & \alpha \neq 1; \\ -\int_S |\langle \tau, x\rangle| \ln|\langle \tau, x\rangle| \mu(dx), & \alpha = 1, \end{cases}$$

$\mu(\cdot)$ — скінченна міра на $S = \{\, x \colon |x| = 1 \,\}$. Якщо міра μ не зосереджена цілком на деякому підпросторі $\mathbb{R}^d$, то

$$0 < \lambda_0 < C_1(\tau) < \mu_0, \qquad |g_{\alpha,\mu}(u)| \leq \exp(-\lambda_0 |u|^\alpha), \tag{4}$$

де μ_0 — значення повної міри $\mu(\cdot)$ на S, $\lambda_0 = \inf_{\tau \in S}\{C_1(\tau)\}$. Скрізь далі вважаємо, що $\mathsf{E}\xi_i = 0$ при $\alpha > 1$ і зсув $a = (0,\dots,0)$; запис $\varphi(x) \ll \psi(x)$ означає, що $\varphi(x) = O(\psi(x))$ при $x \to \infty$. Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р. випадкові вектори з ф.р. $F(x)$ та х.ф. $\varphi(u)$, $x, u \in \boldsymbol{R}^d$.

Означення 1. Якщо для деяких $b_n > 0$ та $A_n \in \boldsymbol{R}^d$ нормовані і центровані суми $b_n^{-1} S_n - A_n$ слабко збігаються до $G_{\alpha,\mu}$, то говорять, що випадковий вектор ξ (його ф.р. $F(x)$) належить області притягання стійкого закону ($\xi \in D_{\alpha,\mu}(b_n, A_n)$).

Коли нормуючі константи $b_n = n^{1/\alpha}$, говоримо про область нормального притягання і записуємо $\xi \in ND_{\alpha,\mu}$.

Для випадкових векторів в $\boldsymbol{R}^d$ (більш того, для банаховозначних випадкових векторів) мають місце властивості, аналогічні відповідним властивостям випадкових величин з області притягання стійкого закону [13–15].

Якщо $\xi \in ND_{\alpha,\mu}$, то

i)

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi/|\xi| \in A, |\xi| > \delta n^{1/\alpha}\} = \frac{\mu(A)}{\delta^{1/\alpha}} \qquad \forall \delta > 0, \tag{5}$$

ii)

$$\mathsf{E}|\xi|^p < \infty \qquad \forall p < \alpha, \tag{6}$$

iii)

$$F_0(t) = \mathsf{P}\{\, |\xi| > t \,\} = t^{-\alpha}\mathcal{L}(t),$$

де $\mathcal{L}(t)$ — функція, що повільно змінюється.

Крім того, згідно з [16], для $\{\xi_i\} \in D_{\alpha,\mu}(b_n, A_n)$

$$\sup_n \mathsf{E}|S_n^*|^p < \infty \qquad \forall p < \alpha. \tag{7}$$

Співвідношення (5)–(7) дають можливість розповсюдити на векторний випадок методику доведення сильного принципу інваріантності на основі загальних апроксимаційних теорем [9], яка успішно використовувалась при вивченні випадкових величин.

Нехай $\{X_k, k \geq 1\}$ та $\{Y_k, k \geq 1\}$ — послідовності незалежних d-вимірних випадкових векторів, $d \geq 1$, з ф.р. $F_k(x)$, $Q_k(x)$, що мають відповідно х.ф. $f_k(u) = \int \exp(i\langle u, x\rangle)\, dF_k(x)$ і $q_k(u) = \int \exp(i\langle u, x\rangle)\, dQ_k(x)$.

Лема 1. *Якщо для деяких* λ_k, $\delta_k > 0$, $T_k > 10^8 d$

i) $|f_k(u) - q_k(u)| \leq \lambda_k$ *для всіх* $|u| < T_k$,
ii) $\mathsf{P}\{\,|Y_k| \geq z\,\} \leq \delta_k$,

то випадкові вектори $\{X_k\}$ *і* $\{Y_k\}$ *можна перевизначити на одному ймовірнісному просторі без зміни їх марґінального розподілу так, щоб*

$$\mathsf{P}\{|X_k - Y_k| \geq \psi_k\} \leq \psi_k,$$

де $\psi_1 = 1$, $\psi_k = 16dT_k^{-1}\log T_k + 4\lambda_k^{1/2}T_k^d + \delta_k$, $k \geq 2$.

Лема 1 є простою модифікацією теореми 1 [9] у формі, більш зручній для подальшого викладу.

Позначимо $N_m = \sum_{k=1}^{m} k^A$, $h_1 = 1$, $h_m = N_{m-1} + 1$, $m > 1$, $H_m = \{\, i \text{ ціле} : h_m < i < h_{m+1}\,\}$, $m \geq 1$, де $A > 1$ буде вибрано пізніше.

Легко бачити, що $\operatorname{card} H_m = m^A$, $h_{m+1} - h_m = m^A$,

$$m^{A+1} \ll \sum_{k=1}^{m-1} k^A \leq h_m \leq n \leq N_m \ll m^{A+1} \qquad \forall n \in H_m. \tag{8}$$

Лема 2. *Для н.о.р. випадкових векторів* $\{\xi_i\} \in ND_{\alpha,\mu}$

$$\mathsf{P}\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} n^{-(1/\alpha+\varepsilon)}|S_n| = 0 \right\} = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Доведення аналогічне випадку $d = 1$.

Лема 3. *Для н.о.р. випадкових векторів* $\{\xi_i\} \in ND_{\alpha,\mu}$ *з імовірністю* 1

$$M_m = \max_{n\in H_m}\left|\sum_{i=h}^{n} \xi_i\right| = o(h_m^{1/\alpha-\rho}), \qquad \forall \rho \in (0, 1/\alpha(A+1)). \tag{10}$$

Доведення. Для довільного, але фіксованого, $\rho \in (0, 1/\alpha(A+1))$ виберемо ε так, щоб

$$0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\alpha A} - \rho\frac{A+1}{\alpha}.$$

Як і в лемі 2 [6] з (9) випливає, що з імовірністю 1 для досить великого m і довільного $\delta > 0$

$$M_m \leq \delta|h_{m+1} - h_m|^{1/\alpha+\varepsilon} \ll \delta m^{A(1/\alpha+\varepsilon)} \ll \delta h^{(1/\alpha+\varepsilon)A/(A+1)} \ll \delta h_m^{1/\alpha-\rho}.$$

Звідси одержимо (10). □

Лема 4. *Для н.о.р. випадкових векторів* $\{\xi_i\} \in D_{\alpha,\mu}(b_n, A_n)$

$$\mathsf{P}\{|S_n^*| > z\} \le \mathrm{const}\, z^{-p} \qquad \forall p \in (0,\alpha). \tag{11}$$

Доведення безпосередньо випливає з (7).

Для спрощення запису далі розглядаємо випадок притягання до строго стійких законів $G_\alpha \in \mathfrak{M}^d$, $\alpha \neq 1$, що виключає необхідність центрування в (2), але всі основні результати залишаються вірними і у більш загальній ситуації.

Нехай $\{\xi_i, i \ge 1\}$ та $\{w_i, i \ge 1\}$ — н.о.р. випадкові вектори, що належать області притягання одного і того ж стійкого закону $G_\alpha \in \mathfrak{M}^d$, $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $S_n^* = n^{-1/\alpha} S_n$, $T_n^* = \sum_{i=1}^n w_i$, $T_n^* = n^{-1/\alpha} T_n$, $f_n(u) = \mathsf{E}\exp(i\langle u, S_n^*\rangle)$, $q_n = \mathsf{E}\exp(i\langle u, T_n^*\rangle)$.

Теорема 1. *Якщо для деяких* c_1, c_2, r, $\delta > 0$, $r/\delta \le 3d$

$$|f_n(u) - q_n(u)| \le c_1 n^{-r} \quad \text{для } |u| < c_2 n^\delta, \tag{12}$$

то $\{\xi_i\}$ *та* $\{w_i\}$ *можна перевизначити на одному ймовірнісному просторі так, щоб м.н.*

$$|S_n - T_n| = o(n^{1/\alpha - \lambda}) \quad \text{для деякого } \lambda > 0. \tag{13}$$

Доведення. Покладемо $A = [20d/r\alpha] + 1$ і розглянемо дві послідовності н.о.р. випадкових величин

$$X_k = k^{-A/\alpha} \sum_{i \in H_k} \xi_i, \qquad Y_k = k^{-A/\alpha} \sum_{i \in H_k} w_i, \qquad k \ge 1.$$

Застосуємо до $\{X_k\}$ та $\{Y_k\}$ лему 1, де підходящі оцінки для λ_k, T_k, δ_k отримаємо з (11), (12). Якщо вибрати $T_k = k^{6/\alpha} \le k^{A\delta} = k^{20d\delta/\alpha r}$, $\lambda_k = k^{-Ar} = k^{-20d/\alpha}$, то матимемо

$$T_k^{-1} \ln T_k \ll k^{-6/\alpha} \ln k \ll k^{-2},$$
$$\lambda_k^{1/2} T_k = k^{-4d/\alpha} \ll k^{-2}.$$

За лемою 4 при $p = \alpha/2$ для $\delta_k = \mathsf{P}\{|Y_k| > T_k\}$ справедлива оцінка $\delta_k \ll T_k^{-\alpha/2} \ll k^{-3}$. Лема 1 і теорема Колмогорова дають змогу перевизначити $\{\sum_i \xi_i\}$ та $\{\sum_i w_i\}$ на одному ймовірнісному просторі так, щоб

$$\mathsf{P}\{|X_k - Y_k| \ge \psi_k\} \le \psi_k, \qquad \psi_k \ll k^{-2}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} |S_{N_m} - T_{N_m}| &\le \sum_{k=1}^m k^{A/\alpha} |X_k - Y_k| \le \sum_{k=1}^m k^{A/\alpha - 2} \ll m^{A/\alpha - 1} \\ &\ll N_m^{(A/\alpha - 1)/(A+1)} \le N_m^{1/\alpha - \lambda}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $\lambda = 1/(A+1) \approx r\alpha/20\alpha > 0$.

Для довільного n знайдемо таке $m = m(n)$, що $n \in H_m$. Тоді

$$|S_n - T_n| \le |S_{N_{m-1}} - T_{N_{m-1}}| + \max_{n \in H_m} \left|\sum_{i=h}^n \xi_i\right| + \max_{n \in H_m} \left|\sum_{i=h}^n w_i\right|. \tag{15}$$

Оскільки $\{\xi_i\}, \{w_i\} \in ND_{\alpha,\mu}$, то за лемою 3 для будь-якого $\rho < 1/\alpha(A+1)$

$$\max_{n \in H_m} \left|\sum_{i=h}^n \xi_i\right| = o(h_m^{1/\alpha - \rho}), \qquad \max_{n \in H_m} \left|\sum_{i=h}^n w_i\right| = o(h_m^{1/\alpha - \rho}). \tag{16}$$

Враховуючи $h_m \le n$ та $\lambda > \rho$, з (14)–(16) одержуємо шукане співвідношення (13). □

Якщо $\{w_i, i \ge 1\}$ — н.о.р. випадкові вектори, які мають стійкий розподіл G_α, то $T_n^* \stackrel{d}{=} w_1$ і характеристична функція нормованої суми дорівнює х.ф. одного доданку, тобто $q_n(u) = g_\alpha(u)$. Тоді умова (12) означає, що

$$|f_n(u) - g_\alpha(u)| \le c_1 n^r, \quad \text{як тільки } |u| < c_2 n^\delta. \tag{17}$$

Для $d = 1$ достатньою умовою виконання (17) з $r = (l - \alpha)/\alpha$ є умова існування скінченного абсолютного псевдомоменту $\nu(l)$, $l > \alpha$ [5, 6]. Цей факт справедливий і для випадкових векторів.

Означення 2. Змішаним псевдомоментом порядку $r = s_1 + \cdots + s_d$, де $s_1, \ldots, s_d$ — невід'ємні цілі числа, назвемо

$$\mu(s_1, \ldots, s_d) = \int_{R^d} x_1^{s_1} \cdots x_d^{s_d} (F - G_{\alpha,\mu})\, dx.$$

Означення 3. Величину $\nu(m) = \int_{R^d} |x|^m |(F - G_{\alpha,\mu})\, dx|$ назвемо абсолютним псевдомоментом порядку m.

Лема 5 [17]. *Якщо*

$$\nu(l) < \infty \quad \text{для } l = 1 + [\alpha] \text{ і } \mu(s_1, \ldots, s_d) = 0, \qquad s_1 + \cdots + s_d = 1, \ldots, l - 1, \tag{18}$$

то

$$|f_n(u) - g_\alpha(u)| = a(n) n^{-(l-\alpha)/\alpha} \left(|u|^l + |u|^{l+\alpha} + |u|^{2l}\right) \exp\left(-c_1(\tau)\frac{|u|^\alpha}{2}\right),$$

коли $|u| \le c n^{(l-\alpha)/\alpha}$, *де* $c = c(d, l, \nu(l), N) > 0$, $N = \sup c_1(\tau) + \sup |c_2(\tau)|$, $a(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Отже, за умови (18) автоматично виконується (17) з $r = \delta = (l - \alpha)/\alpha$, тобто для деяких c_1, $c_2 > 0$

$$|f_n(u) - g_\alpha(u)| \le c_1 n^{-(l-\alpha)/\alpha}, \tag{19}$$

як тільки $|u| < c_2 |n|^{(l-\alpha)/\alpha}$. Зауважимо, що умова (19) забезпечує нормальний характер притягання $F(x)$ до $G_{\alpha,\mu}(x)$ з залишковим членом $O(n^{-(l-\alpha)/\alpha})$. Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 2 (сильний принцип інваріантності для випадкових векторів з області притягання стійкого закону). *Нехай $\{\xi_i, i \ge 1\}$ — н.о.р. випадкові вектори з ф.р. $F(x)$ такою, що абсолютний псевдомомент $\nu(l) < \infty$ для $l = 1 + [\alpha]$ і всі змішані псевдомоменти $\mu(s_1, \ldots, s_d) = 0$ для $s_1 + \cdots + s_d = 0, \ldots, l - 1$. Тоді $\{\xi_i, i \ge 1\}$ можна перевизначити на одному ймовірнісному просторі разом з послідовністю н.о.р. стійких випадкових векторів $\{\eta_i, i \ge 1\}$ так, щоб м.н.*

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n \eta_i\right| = o(n^{1/\alpha - \lambda}), \qquad \lambda = \lambda(\alpha, d).$$

Теорема 2 є прямим узагальненням теореми 3 з [6]; аналогічний результат доведений також в [7].

У випадку $d = 1$ помічено, що співвідношення (19) може виконуватися за більш загальних умов, ніж існування псевдомоментів певного порядку [18]; це вірно і при $d > 1$.

Лема 6. *Нехай* $\{\xi_i, i \geq 1\}$ — *н.о.р. випадкові вектори з х.ф.* $f(u)$. *Якщо для деяких* a_1, $a_2 > 0$ *та* $l > \alpha$, $\alpha \neq 1$,

$$|f(u) - g_{\alpha,\mu}(u)| \leq a_2|u|^l, \qquad |u| < a_1, \tag{20}$$

то

$$|f_n(u) - g_{\alpha,\mu}(u)| \leq c_1^*|u|^l n^{-(l-\alpha)/\alpha} \exp\{-c_3|u|^\alpha\}$$

для $|u| < c_0 n^{1/\alpha}$, *де константи* $c_0, c_1, c_3 > 0$ *залежать лише від* α, l, a_1, a_2, d.

Доведення леми майже тотожне доведенню відповідного твердження при $d = 1$ Паулаускасом [18]. Дійсно,

$$f_n(u) = \mathsf{E}\left(i\langle u, n^{-1/\alpha} S_n\rangle\right) = f^n(n^{-1/\alpha} u)$$

і для $g \in \mathfrak{M}^d$

$$g^n_{\alpha,\mu}(n^{-1/\alpha}u) = g_{\alpha,\mu}(u) = \exp\{-|u|^\alpha(c_1(\tau) + ic_2(\tau))\}.$$

Покладемо $\gamma = f(n^{-1/\alpha}u)/g_{\alpha,\mu}(n^{-1/\alpha}u)$, тоді

$$\begin{aligned}|f_n(u) - g_{\alpha,\mu}(u)| &\leq |g^n_{\alpha,\mu}(n^{-1/\alpha}u)||\gamma^n - 1| = |g^n_{\alpha,\mu}(u)| \cdot |\gamma^n - 1| \\ &\leq \exp\{-\lambda_0|u|^\alpha\}|\gamma - 1|\sum_{j=0}^{n-1}|\gamma|^j.\end{aligned} \tag{21}$$

Оцінимо $|\gamma - 1| = |f(n^{-1/\alpha}u) - g(n^{-1/\alpha}u)|/|g(n^{-1/\alpha}u)|$.

Для $|u| < c_0 n^{1/\alpha}$, де $c_0 < a_1$, маємо

$$|g_\alpha(n^{-1/\alpha}u)| \geq \exp(-c_0^*), \qquad c_0^* = c_0 N, \quad N = \sup C_1(\tau) + \sup|C_2(\tau)|,$$

а з умови (20) випливає

$$\left|f(n^{-1/\alpha}u) - g(n^{-1/\alpha}u)\right| \leq a_2|u|^l n^{-l/\alpha}.$$

Звідси

$$|\gamma - 1| \leq c_1^*|u|^l n^{-l/\alpha}, \qquad c_1^* = a_2\exp(c_0^*). \tag{22}$$

Далі, як і в (18), маємо $|\gamma| \leq \exp|\gamma - 1| \leq \exp\{c_2|u|^l n^{-l/\alpha}\}$, $|\gamma|^j \leq \exp\{c_4|u|^\alpha\}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $c_4 = a_2 c_0^{l-\alpha} e^{c_0 N}$. Таким чином, з (21)–(23) одержимо шукану нерівність

$$|f_n(u) - g_{\alpha,\mu}(u)| \leq c_2|u|^l n^{-(l-\alpha)/\alpha}\exp\{-|u|^\alpha(\lambda_0 - c_4)\},$$

де $c_3 = \lambda_0 - c_4 > 0$ за рахунок вибору c_0.

Наслідок. *За умови виконання* (20) *має місце сильний принцип інваріантності з залишковим членом* $o(n^{1/\alpha - \lambda^*})$, $\lambda^* = \lambda^*(d, a, l) > 0$.

Література

1. W. Stout, *Almost sure invariance principles when* $\mathsf{E}X_1^2 = \infty$, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. **49** (1979), № 1, 23–32.
2. E. Fisher, *An almost sure invariance principle for random variables in the domain of attraction of a stable law*, Z. Wahrschein. und verw. Geb. **67** (1984), № 4.
3. J. Mijnheer, *Strong approximation of partial sums of i.i.d. r.v. in the domain of attraction of a symmetric stable distribution*, Trans. 9th Prague Conf. Inf. Theory Statist. Decision Functions, Random Processes, 1983, pp. 85–89.
4. Н. М. Зинченко, *Аппроксимация сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона*, Докл. АН УССР, сер. А (1984), № 7, 9–11.
5. ———, *Сильный принцип инвариантности для сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона*, Теория вероятн. и ее применен. **30** (1985), № 1, 131–136.

6. ———, *Об аппроксимации сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона*, Укр. мат. журн. **38** (1986), № 6, 713–718.
7. I. Berkes, D. Dobrowski, H. Dehling, and W. Philipp, *A strong approximation theorem for sums of a random vectors in the domain of attraction to a stable law*, Acta Math. Hung. **48** (1986), № 1–2, 161–172.
8. I. Berkes and H. Dehling, *Almost sure and weak invariance principle for random variables attracted by a stable law*, Probab. Theory and Related Fields **38** (1989), № 3, 331–353.
9. I. Berkes and W. Philipp, *Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors*, Annals of Probab. **7** (1979), № 1, 29–54.
10. U. Einmahl, *Strong invariance principle for partial sums of independent random vectors*, Ann. Probab. **15** (1987), 1419–1440.
11. M. Alex and J. Steinbach, *Invariance principles for renewal processes and some applications*, Теорія ймовір. та матем. статист., № 50, 22–54.
12. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, "Наука", Москва, 1983.
13. Е. Л. Рвачёва, *Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений*, Ученые записки Львовского Гос. ун-та **29** (1954), 5–‘4.
14. Н. В. Калинаускайте, *О притяжении к устойчивым законам типа Леви–Фельдгейма*, Лит. мат. сб. **14** (1974), № 3, 93–105.
15. A. Aranjo and E. Gine, *On tails and domain of attractions of a stable measure in Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **248** (1979), № 1, 105–115.
16. A. de Acosta and E. Gine, *Convergence of measures and related functions in the general central limit theorem in Banach spaces*, Z. Wahrchein. und verw. Geb. **48** (1979), № 3, 213–231.
17. И. И. Банис, *Уточнение скорости сходимости к устойчивому закону в локальной предельной теореме в многомерном случае*, Лит. мат. сб. **16** (1976), № 3, 13–20.
18. В. Паулаускас, *Оценки остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона*, Лит. мат. сб. **14** (1974), № 1, 165–187.

252022, Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 23.05.94