Теор. ймовірност. та матем. статист. Вип. 54. 1996. стор. 66–71
Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst. No. 54, 1996, pp. 66–71

ПРО ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ГАУССОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

УДК 519.21

В. О. КОВАЛЬ

РЕЗЮМЕ. Досліджується закон повторного логарифма для гауссових послідовностей та розглядається його застосування до зважених сум і розв'язків різницевих рівнянь.

Закон повторного логарифма та його аналоги для гауссових послідовностей і процесів досліджувався багатьма авторами. Серед них відмітимо роботи Нісіо [1], Оодаіри [2], Лая [3, 4], Томкінса [5], Йонг-Каба і Норіо [6]. В цьому повідомленні пропонується ще один критерій справедливості закону повторного логарифма для гауссової послідовності. Підхід до даної задачі грунтується на методах, розвинених в роботах Булдигіна і Солнцева [7, 8].

Нехай $x = (x(n), n \geq 1)$ — гауссова послідовність з $\mathsf{E}\, x(n) = 0$, $\sigma^2(n) = \mathsf{E}\, x^2(n) > 0$, $r(i,j) = \mathsf{E}(x(i), x(j))/(\sigma(i)\sigma(j))$, де E — знак математичного сподівання. Надалі через c_k позначатимемо деякі додатні сталі.

Теорема. *Нехай $f = (f(n), n \geq 1)$ — послідовність додатних чисел така, що $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$.*

1) *Припустимо, що послідовність f неспадна і*

$$|r(i,j)| \leq c_1 f(i)/f(j), \qquad 1 \leq i < j,\ j \geq 2. \tag{1}$$

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} \chi^{-1}(n) x(n) \geq 1 \quad \textit{з ймовірністю } 1 \ (\textit{з йм. } 1), \tag{2}$$

де

$$\chi(n) = \left(2\sigma^2(n) V_f(n)\right)^{1/2},$$

$$V_f(n) = \log\left(\sum_{i=1}^{n-1} \min\{M, \log(f(i+1)/f(i))\}\right);$$

M — довільна фіксована додатна стала.

2) *Припустимо, що послідовність f задовольняє умову*

$$f(n+1) \leq c_2 f(n), \qquad n \geq 1, \tag{3}$$

і виконана нерівність (1). *Тоді виконується співвідношення* (2) *з*

$$\chi(n) = \left(2\sigma^2(n) \log\log f(n)\right)^{1/2}, \qquad n \geq n_0 \geq 1.$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F15; Secondary 62G15.

©1996 ТВіМС, Наукове видавництво

3) *Припустимо, що послідовність f неспадна і*

$$f(i)/f(j) \le r(i,j) \quad \text{або} \quad (-1)^{j-i} f(i)/f(j) \le r(i,j), \qquad 1 \le i < j, \qquad j \ge 2. \tag{4}$$

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} \chi^{-1}(n)x(n) \le 1 \quad \text{з ім. } 1, \tag{5}$$

де $\chi(n)$ *з пункту* 1).

Зауваження 1. Якщо виконується умова (3), то поклавши $M = \log c_2$, де $c_2 > 1$, отримаємо, що $V_f(n) \sim \log\log f(n)$ $(n \to \infty)$. Якщо $\lim_{n\to\infty}(f(n+1)/f(n)) = \infty$, то $V_f(n) \sim \log n$ $(n \to \infty)$.

Доведення теореми. Розглянемо пункт 1). Запровадимо послідовність індексів $(n_i, i \ge 1)$, поклавши

$$n_1 = 1, \qquad n_{i+1} = \min\{j: j > n_i, f(n_i)/f(j) < q\}, \tag{6}$$

де $e^{-M} < q < 1$, а стала M з умови теореми. Покажемо, що

$$\limsup_{1\to\infty} \chi^{-1}(n_i)x(n_i) \ge 1 \quad \text{з ім. } 1. \tag{7}$$

Позначимо:

$$\begin{gathered} \xi(i) = \chi^{-1}(n_i)x(n_i), \qquad \xi = (\xi(i), i \ge 1); \\ \sigma_\xi^2(i) = \mathsf{E}\xi^2(i) = 1/(2V_f(n_i)), \qquad \sigma_\xi = (\sigma_\xi(i), i \ge 1); \\ r_\xi(i,j) = \mathsf{E}(\xi(i)\xi(j))/(\sigma_\xi(i)\sigma_\xi(j)) = r(n_i, n_j). \end{gathered} \tag{8}$$

Відмітимо, що ξ — гауссова послідовність з $\mathsf{E}\,\xi(i) = 0$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, то $\lim_{n\to\infty} V_f(n) = \infty$, отже $\lim_{n\to\infty} \sigma_\xi(i) = 0$. Тоді на підставі осциляційної теореми Іто і Нісіо [9] знайдеться така невипадкова стала (осциляційна стала) $0 \le \mathbb{C}\{\xi\} \le +\infty$, що

$$\limsup_{i\to\infty} \xi(i)\mathbb{C}\{\xi\} \quad \text{з ім. } 1.$$

Тому для доведення співвідношення (7) потрібно показати, що $\mathbb{C}\{\xi\} \ge 1$.

Позначатимемо надалі осциляційну сталу відповідної гауссової послідовності через $\mathbb{C}\{\cdot\}$.

За прикладом [7], для довільної послідовності дійсних чисел $\lambda = (\lambda(n), n \ge 1)$ покладемо

$$\pi\{\lambda\} = \inf\left\{t > 0: \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-t^2/(2\lambda_n^2)\right)\right\},$$

і для доведення нерівності $\mathbb{C}\{\xi\} \ge 1$ покажемо спочатку, що $\mathbb{C}\{\xi\} \ge \pi\{\sigma_\xi\}$. З (1), (6) і (8) випливає, що

$$|r_\xi(i,j)| < c_1 q^{j-1}, \qquad 1 \le i < j, \; j \ge 2. \tag{9}$$

Скористаємося тепер методом, який використовувався в роботі [7] при доведенні теореми 6. Оскільки $0 < q < 1$, то з (9) випливає, що для будь-якого $0 < \varepsilon < 1$ знайдеться таке натуральне число $l \le 1$, що при всіх $i \ge 1$

$$|r_\xi(i, i+l)| < \varepsilon.$$

Розглянемо l підпослідовностей послідовності ξ:

$$\xi^{(k)} = (\xi^{(k)}(m), m \ge 0) = (\xi(k+ml), m \ge 0), \qquad 1 \le k \le l.$$

Запровадимо позначення: $\sigma^{(k)} = \left(\sigma^{(k)}(m), m \geq 0\right) = (\sigma_\xi(k+ml), m \geq 0)$;

$$r^{(k)}(m,n) = r_\xi(k+ml, k+nl), \qquad 0 \leq m < n, \ n \geq 1.$$

Тоді для всякого $1 \leq k \leq l$

$$\begin{aligned}\delta_k &= \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |r^{(k)}(m,n)| = \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |r_\xi(k+ml, k+nl)| \\ &= \lim_{N\to\infty} \sup_{m\geq N} |r_\xi(k+ml, k+ml+l)| < \varepsilon < 1.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що кожна з послідовностей $\xi^{(k)}$, $1 \leq k \leq l$, є слабко залежною гауссовою послідовністю. Тому на підставі теореми 5 [7]

$$\mathbb{C}\{\xi^{(k)}\} \geq (1-\delta_k)^{1/2} \leq \{\sigma^{(k)}\} \geq (1-\varepsilon)^{1/2}\pi\{\sigma^{(k)}\}.$$

Оскільки $\bigcup_{k=1}^{l}\{k+ml, m \geq 0\} = \{1,2,\dots\}$, то на підставі леми 1 [7]

$$\mathbb{C}\{\xi^{(k)}\} \geq (1-\varepsilon)^{1/2}\pi\{\sigma_\xi\}.$$

Оскільки ε довільне, то це означає, що

$$\mathbb{C}\{\xi^{(k)}\} \geq \pi\{\sigma_\xi\}.$$

Покажемо тепер, що $\pi\{\sigma_\xi\} \geq 1$. За прикладом доведення теореми 2 [8], покладемо

$$p_l = \prod_{k=n_l}^{n_{l+1}-1} \max\{e^{-M}, f(k)/f(k+1)\}.$$

Оскільки послідовність f неспадна, то з урахуванням (6) одержуємо, що $p_l \geq qe^{-M}$, $l \geq 1$. Звідси ж випливає, що

$$\begin{aligned}V_f(n_{i+1}) &= \log\left(\sum_{l=1}^{i} \sum_{k=n_l}^{n_{l+1}-1} \min\left\{M, \log\left(f(k+1)/f(k)\right)\right\}\right) \\ &\leq \log(i\log(e^{-M}/q)) = \log(c_3 i), \qquad i \geq 1.\end{aligned}$$

Отже

$$\sigma_\xi(i+1) = (2V_f(n_{i+1}))^{-1/2} \geq (2\log(c_3 i))^{-1/2} = a_i, \qquad i \geq i_0 \geq 1.$$

Позначимо $a = (a_i, i \geq i_0)$. З цієї нерівності і означення $\pi\{\lambda\}$ отримаємо

$$\pi\{\sigma_\xi\} \geq \pi\{a\} = 1.$$

Отже показано, що $\mathbb{C}\{\xi^{(k)}\} \geq \pi\{\sigma_\xi\} \geq 1$. Це й означає правильність співвідношення (7), а отже і (2).

Пункт 1) теореми доведено.

Розглянемо пункт 2). Повторюючи без змін відповідні міркування пункту 1), де

$$\xi(i) = \left(2\sigma^2(n_i)\log\log f(n_i)\right)^{-1/2} x(n_i),$$

отримаємо, що $\mathbb{C}\{\xi^{(k)}\} \geq \pi\{\sigma_\xi\}$. Покажемо тепер, що $\pi\{\sigma_\xi\} \geq 1$. З (5) випливає, що

$$f(n_i - 1) \leq g^{-1} f(n_{i-1}) = c_4 f(n_{i-1}).$$

Використовуючи нерівність (3), отримаємо

$$f(n_i) \leq (c_2 c_4)^{i-1} f(1) = c_6 \cdot c_5^i,$$

а отже

$$\log\log f(n_i) \le \log(c_7 \cdot i).$$

Тоді

$$\sigma_\xi = (2\log\log f(n_i))^{-1/2} \ge (2\log(c_7 \cdot i))^{-1/2} = a_i.$$

Звідси, як і в пункті 1), одержуємо, що $\pi\{\sigma_\xi\} \ge 1$. Пункт 2) теореми доведено.

Розглянемо пункт 3). В роботі [8] (теорема 2) було показано таке. Нехай $\eta = (\eta(n), n \ge 1)$ — гауссова марковська послідовність з нульовими математичними сподіваннями, дисперсіями $\sigma_\eta^2(n)$ та коефіцієнтами корреляції $r_\eta(n, n+1)$. Тоді, якщо послідовність не є сильно залежною, то

$$\limsup_{n\to\infty}\left(2\sigma_\eta^2(n)\log\left(\sum_{i=1}^{n-1}\min\{M, \log|r_\eta(i,i+1)|^{-1}\}\right)\right)^{-1/2}\eta(n)$$
$$= \limsup_{n\to\infty}\widetilde{\eta}(m) = 1 \quad \text{з ім. } 1. \tag{10}$$

Нехай тепер виконана перша з нерівностей (4):

$$r(i,j) \ge f(i)/f(j), \qquad 1 \le i < j,\ j \ge 2. \tag{11}$$

Розглянемо допоміжну гауссову марковську послідовність $\eta = (\eta(n), n \ge 1)$, поклавши:

$$\mathsf{E}\,\eta(n) = 0, \qquad \sigma_\eta^2(n) = 1, \qquad r_\eta(n, n+1) = f(n)/f(n+1), \qquad n \ge 1. \tag{12}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, то послідовність η не є сильно залежною і, отже, випливає співвідношення (10). Відмітимо, що дисперсії та коефіцієнти корреляції послідовності $\widetilde{\eta} = (\widetilde{\eta}(n), n \ge 1)$ на підставі (12) мають вигляд

$$\sigma_{\widetilde{\eta}}^2(n) = (2V_f(n))^{-1}, \qquad r_{\widetilde{\eta}}(n, n+1) = f(n)/f(n+1).$$

Позначимо $\xi(n) = \chi^{-1}(n)x(n)$, $\xi = (\xi(n), n \ge 1)$. Тоді дисперсії і коефіцієнти корреляції послідовності ξ мають вигляд

$$\sigma_\xi^2(n) = (2V_f(n))^{-1} = \sigma_{\widetilde{\eta}}^2(n), \qquad r_\xi(i,j) = r(i,j).$$

З (11) випливає, що $r_\xi(i,j) = r_{\widetilde{\eta}}(i,j)$, $1 \le i < j$, $j \ge 2$. Тому на підставі теореми 3 [7]

$$\limsup_{n\to\infty}\xi(n) \le \limsup_{n\to\infty}\widetilde{\eta}(n) = 1 \quad \text{з ім. } 1.$$

Це й означає, що виконується співвідношення (5).

Випадок другої з нерівностей (4) розглядається аналогічно.

Теорему доведено. □

Зауваження 2. В [5] розглядалися зважені суми $S_n = \sum_{m=1}^n a_{nm}\gamma_m$ незалежних гауссових $N(0,1)$ — розподілених випадкових величин γ_n, $n \ge 1$. Нехай виконуються умови:

$$s_n^2 = \sum_{m=1}^n a_{nm}^2 \longrightarrow \infty \quad (n\to\infty); \qquad s_{n+1} \sim s_n \quad (n\to\infty);$$
$$|a_{nm}| \le c_1|a_{pm}|, \qquad n > p \ge m \ge 1.$$

Тоді як показано в [5] (теорема 5),

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/\left(2s_n^2\log\log s_n^2\right)^{1/2} \ge 1 \quad \text{з ім. } 1.$$

Цей результат при зазначених умовах є безпосереднім наслідком пункту 2) теореми.

Розглянемо застосування доведеної теореми до дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних різницевих рівнянь.

Нехай $(x(n), n \geq 1)$ — розв'язок рівняння

$$x(n) = a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) + b(n)\gamma(n), \qquad n \geq 1, \tag{13}$$

де $x(0) = x(-1) = 0$; $a_1, a_2 \in \boldsymbol{R}$ $(a_2 \neq 0)$; $(b(n), n \geq 1) \subset \boldsymbol{R}$; $(\gamma(n), n \geq 1)$ — послідовність незалежних гауссових $N(0,1)$-розподілених випадкових величин. Запишемо характеристичне рівняння для рівняння (13)

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0.$$

Нехай λ_1, λ_2 — додатні корені даного рівняння, причому $\lambda_1 > \lambda_2$. В роботах [10, 11] було зокрема показано: якщо

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} b^2(i)\lambda_1^{-2i} \to \infty \quad (n \to \infty), \qquad g = (g(n), n \geq 1),$$

то

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)/(\lambda_1^{2n} g(n) V_g(n))^{1/2} = \alpha \quad \text{з йм. } 1,$$

де α — деяка невипадкова стала з інтервалу $(0, +\infty]$, а $V_g(n)$ означується аналогічно до $V_f(n)$. Використовуючи доведену теорему, отримаємо точне значення сталої α.

Твердження. *Нехай* $f = (f(n), n \geq 1)$, *де*

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} b^2(i)\lambda_1^{-2i}\left(1 - (\lambda_2/\lambda_1)^{n+1-i}\right)^2 \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Позначимо $\sigma^2(n) = \mathsf{E}\, x^2(n)$, $n \geq 1$. *Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)/\left(2\sigma^2(n) V_f(n)\right)^{1/2} \quad \textit{з йм. } 1. \tag{14}$$

Доведення. Як показано в [12], розв'язок $(x(n), n \geq 1)$ рівняння (13) може бути представлений у вигляді

$$x(n) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_1^{n+1-k} - \lambda_2^{n+1-k}\right) b(k)\gamma(k), \qquad n \geq 1.$$

Тоді

$$r(i,j) = \sum_{k=1}^{i} b^2(k)\lambda_1^{-2k}\left(1 - (\lambda_2/\lambda_1)^{i+1-k}\right)\left(1 - (\lambda_2/\lambda_1)^{j+1-k}\right)(f(i)f(j))^{-1/2}.$$

Оскільки

$$1 - (\lambda_2/\lambda_1)^{i+1-k} \geq (\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1, \qquad 1 \leq k \leq i, \ i \geq 1,$$

та $1 - (\lambda_2/\lambda_1)^{j+1-k} < 2$, то

$$r(i,j) \leq (2\lambda_1/(\lambda_1 - \lambda_2)) f(i)(f(i)f(j))^{-1/2} = c_1 f^{-1/2}(i)/f^{-1/2}(j). \tag{15}$$

Крім того

$$r(i,j) \geq f^{-1/2}(i)/f^{-1/2}(j).$$

Оскільки послідовність f неспадна, то на підставі (15), (16) з урахуванням пунктів 1) і 3) теореми отримаємо співвідношення (14). При цьому враховано, що $V_{f^{1/2}}(n) \sim V_f(n)$ $(n \to \infty)$.

Твердження доведено. $\square$

Розглянемо деякі наслідки з цього твердження.

Наслідок 1. *Нехай в рівнянні* (13) $b(n) \equiv b \neq 0$. *Тоді*:

1) *якщо* $\lambda_1 < 1$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)/(2\log n)^{-1/2} = \frac{b}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2} - \frac{2\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2} + \frac{\lambda_2^2}{1-\lambda_2^2}\right) \quad \text{з йм. } 1;$$

2) *якщо* $\lambda_1 = 1$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)/(2\log\log n)^{-1/2} = b/(1-\lambda_2) \quad \text{з йм. } 1.$$

Наслідок 2. *Нехай в рівнянні* (13) $b^2(n) = b^2 n^t$, $t \geq -1$, *і* $\lambda_1 = 1$. *Тоді*

1) *якщо* $t = -1$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)/(2\log n \log\log\log n)^{-1/2} = b/(1-\lambda_2) \quad \text{з йм. } 1;$$

2) *якщо* $t > -1$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)/(2n^{t+1}\log\log n)^{-1/2} = b(t+1)^{-1/2}(1-\lambda_2) \quad \text{з йм. } 1.$$

Література

1. M. Nisio, *On the extreme values of Gaussian processes*, Osaka J. Math. **4** (1967), 313–326.
2. H. Oodaira, *The law of the iterated logarithm for Gaussian processes*, Ann Probab. **1** (1973), 954–967.
3. T. L. Lai, *Gaussian processes, moving averages and quick detection problems*, Ann Probab. **1** (1973), 825–837.
4. T. L. Lai, *Reproducing kernel Hilbert spaces and the law of the iterated logarithm for Gaussian processes*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete. **29** (1974), 29, 7–19.
5. R. J. Tomkins, *On the law of the iterated logarithm for double sequrences of random variables*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete. **30** (1974), 303–314.
6. Choi Yong-Kab, Kôno, *On the asymptotic behavior of Gaussian sequences with stationary increments*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 643–678.
7. В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев, *Осциляционные свойства гауссовых последовательностей*, Вероятностный бесконечномерный анализ (1981), Ин-т математики АН УССР, Киев, 15–29.
8. ———, *Об асимптотическом поведении гауссовой марковской последовательности*, Некоторые вопросы теории случайных процессов (1982), Ин-т математики АН УССР, Киев, 23–33.
9. K. Itô and M. Nisio. *On oscilation functions of a Gaussian processes*, Math. Scand. **22** (68), 209–233.
10. В. В. Булдыгин, В. А. Коваль, *Асимптотическое поведение решений стохастических разностных уравнений*, Преп. 91.24 (1991), Ин-т математики АН УССР, Киев.
11. V. Buldygin and V. Koval′, *Assymptotic behaviour of solutions of stochastic equations*, New Trends in Probab. and Statist. (1991), VSP/Mokslas, 289–300.
12. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, "Наука", Москва, 1967.

282001 ТЕРНОПІЛЬ, ВУЛ. РУСЬКА, 56, ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ ПРИЛАДОБУДІВНИЙ ІНСТИТУТ, КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Надійшла 16.03.94