Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 72–81

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 72–81

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО ТА С. Г. ТРИГУБ

РЕЗЮМЕ. У роботі розглянуто крайову задачу математичної фізики з випадковими початковими умовами, за якими розв'язок цієї задачі належить до процесу Соболева.

Робота присвячена обгрунтуванню застосування методу Фур'є до розв'язання крайових задач з випадковими початковими умовами. Подібні задачі вперше розглядались у роботах [1, 4]. В цих роботах вивчались умови існування класичного розв'язку крайової задачі. В роботі суттєво використані результати статті [3].

Розглянуто крайову задачу математичної фізики з випадковими початковими умовами та знайдені умови, за якими розв'язок цієї задачі належить до процесу Соболева. Зауважимо, що в роботі розглянуто початкові умови, які є строго субгауссовими процесами. Наведемо відповідні означення.

Означення 1 [2]. Випадковий вектор $\vec{\xi} \in \boldsymbol{R}^n$ будемо називати строго субгауссовим, якщо $\mathbf{M}\,\vec{\xi} = 0$ та для всіх $\vec{u} \in \boldsymbol{R}$

$$\mathbf{M}\exp\{(\vec{u},\vec{\xi})\} \le \exp\left\{\frac{(B\vec{u},\vec{u})}{2}\right\},$$

де B — коваріаційна матриця вектора $\vec{\xi}$.

Означення 2 [2]. Випадковий процес $\xi(t)$, $t \in [0,T]$ будемо називати строго субгауссовим, якщо для будь-яких $t_1,\dots,t_n \in [0,T]$, $n \ge 1$, вектор $(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n))$ є строго субгауссовим.

Розглянемо крайову задачу для однорідного гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right) - q(x)u(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 0,$$

$$0 \le x \le \pi, \qquad t \ge 0, \tag{1}$$

$$u(0,t)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial t}u(0,t)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$u(\pi,t)\cos\beta + \frac{\partial}{\partial t}u(\pi,t)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \xi(x), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \eta(x), \tag{5}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G35; Secondary 35L20.

де $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$, $\cos\alpha\sin\alpha \geq 0$, $\cos\beta\sin\beta \geq 0$, $\frac{d}{dx}p(x)$, $q(x)$ і $\rho(x)$ — неперервні функції на $[0,\pi]$, причому $p(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, а випадкові процеси $\xi(x)$ і $\eta(x)$ є строго субгауссовими, $\mathbf{M}\,\xi(x) = 0$, $\mathbf{M}\,\eta(x) = 0$. Корреляційні функції цих процесів

$$B(x,y) = \mathbf{M}\,\xi(x)\xi(y) \quad \text{і} \quad R(x,y) = \mathbf{M}\,\eta(x)\eta(y)$$

вважаються неперервними в області $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

Розглянемо задачу Штурма–Ліувілля:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}X(x)\right) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \tag{6}$$
$$X(0)\cos\alpha + X'(0)\sin\alpha = 0,$$
$$X(\pi)\cos\beta + X'(\pi)\sin\beta = 0.$$

При перелічених обмеженнях на коефіцієнти p, q, ρ та величини α і β, всі власні значення є додатними, оскільки ми виключаємо випадок $q(x) \equiv 0$, $\sin\alpha = \sin\beta = 0$, коли існує $\lambda_a = 0$ [5, с. 142, 6, с. 210].

Вважатимемо, що $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $n \geq 1$.

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою $\rho(x)$ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні числа. Якщо застосувати метод Фур'є, формально можна записати розв'язок задачі (1)–(5):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right), \tag{7}$$

де $A_k = \int_0^\pi \xi(x)X_k(x)\rho(x)\,dx$, $B_k = \int_0^\pi \eta(x)X_k(x)\rho(x)\,dx$.

Нехай $c(t)$ — ціла функція експоненціального типу ε, обмежена на дійсній осі, яка має слідуючі властивості:

$$|c(t)| \leq 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |c(t)|\,dt < 1.$$

Прикладом такої функції може правити функція $c(t) = (\sin\varepsilon t/\varepsilon t)^2$, $\varepsilon > 0$. Будемо розглядати умови існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(5) у просторі Соболева $W^*_{p,2}(Q_1)$, тобто у просторі з нормою

$$\|f(x,t)\|_{W^*_{p,2}(Q_1)} = \|f(x,t)\|_{L_p(Q_1)} + \left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\|_{L_p(Q_1)} + \left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right\|_{L_p(Q_1)} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_p(Q_1)} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right\|_{L_p(Q_1)} \tag{8}$$

де $Q_1 = [0,\pi] \times [0,T]$.

Розглянемо спочатку допоміжний простір Соболева $W^*_{p,2}(Q,c(t))$ з вагою, тобто простір з нормою:

$$\|f(x,t)\|_{W^*_{p,2}(Q,c(t))} = \|f(x,t)\|_{L_p(Q,c(t))} + \left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\|_{L_p(Q,c(t))} + \left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right\|_{L_p(Q,c(t))} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_p(Q,c(t))} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right\|_{L_p(Q,c(t))} \tag{8'}$$

де $Q = [0, \pi] \times [0, \infty)$, а $L_p(Q, c(t))$ — це простір із нормою

$$\|f(x,t)\|_{L_p(Q,c(t))} = \left[\int_Q |c(t)t(x,t)|^p \, dx\, dt\right]^{1/p}.$$

Позначимо

$$u_m^\infty(x,t) = \sum_{k=m}^{\infty} X_k(x)\left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right).$$

Оскільки розв'язок (7) можна зобразити у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x)\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} X_k(x)\sin\sqrt{\lambda_k}t,$$

то у подальшому нам знадобиться нерівність Бернштейна для функції вигляду

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k X_k(x) T_k(t),$$

де q_k, $k \geq 1$ — деяка числова послідовність, між нормами у просторах L_2 і L_p.

Лема 1. *Нехай для функції $v(x,t)$ виконуються такі умови:*

$$\left(\int_0^\pi |v(x,t)|^p \, dx\right)^{1/p} = \|v(x,t)\|_p^x \leq c_1 \|v(x,t)\|_2^x,$$

$$\left(\int_0^\infty |v(x,t)|^p \, dt\right)^{1/p} = \|v(x,t)\|_p^t \leq c_1 \|v(x,t)\|_2^t.$$

Тоді

$$\left(\int_0^\pi\int_0^\infty |v(x,t)|^p \, dt\, dx\right)^{1/p} = \|v(x,t)\|_p \leq c_1 c_2 \|v(x,t)\|_2. \tag{9}$$

Доведення. Розглянемо

$$\int_0^\pi\int_0^\infty |v(x,t)|^p \, dt\, dx = \int_0^\infty\left(\int_0^\pi |v(x,t)|^p\, dx\right) dt \leq \int_0^\infty c_1^p \left(\int_0^\pi |v(x,t)|^2 \, dx\right)^{p/2} dt$$

$$\leq c_1^p \int_0^\infty \left(\int_0^\pi |v(x,t)|^2\, dx\right)^{p/2} dt \leq c_1^p \left(\left\|\int_0^\pi |v(x,t)|^2\, dx\right\|_{\frac{p}{2}}^t\right)^{p/2}$$

$$\leq c_1^p \left(\int_0^\pi \left\|v^2(x,t)\right\|_{\frac{p}{2}}^t \, dx\right)^{p/2}.$$

Оскільки

$$\left\|v^2(x,t)\right\|_{\frac{p}{2}}^t = \left(\int_0^\infty \left(v^2(x,t)\right)^{p/2} dt\right)^{2/p} = \left(\int_0^\infty |v(x,t)|^p\, dt\right)^{2/p} \leq c_2^2 \int_0^\infty |v(x,t)|^2\, dt,$$

то

$$\int_0^\pi\int_0^\infty |v(x,t)|^p\, dt\, dx \leq c_1^p\left(\left(\int_0^\pi c_2^2 \int_0^\infty |v(x,t)|^2\, dt\right) dx\right)^{p/2}$$

$$= (c_1 c_2)^p \left(\left(\int_0^\pi\int_0^\infty |v(x,t)|^2\, dt\, dx\right)^{1/2}\right)^p.$$

Звідси випливає нерівність (9). Лему доведено $\square$

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_k\lambda_l\,\mathbf{M}\,A_kA_l<\infty, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k\lambda_l}\,\mathbf{M}\,B_kB_l<\infty. \tag{11}$$

Тоді з імовірністю 1 *існує узагальнений розв'язок задачі* (1)–(5) *у просторі* $W^*_{p,2}(Q,c(t))$, *який можна зобразити у вигляді збіжного за ймовірністю у нормі простору* $W^*_{p,2}(Q,c(t))$ *ряду* (7), *і при всіх* $z>0$ *виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\|u(x,t)\|_{W^*_{p,2}(Q,c(t))}>z\right\} \le\sum_{p=1}^{2}\sum_{(s,u)}\left(2\exp\left\{-\frac{(z/10)^2}{2\pi^{2/p}\sigma^2_{p,(s,u)}}\right\}+\exp\{p\}\exp\left\{-\frac{(z/10)^2}{2\pi^{2/p}\sigma^2_{p,(s,u)}}\right\}\right), \tag{12}$$

де

$$\sigma^2_{1,(s,u)}=\sup_{(x,t)}c^2(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{M}\,A_kA_l\frac{\partial^{(s)}}{\partial x}X_k(x)\frac{\partial^{(s)}}{\partial x}X_l(x)\frac{\partial^{(u)}}{\partial t}(\cos\sqrt{\lambda_k}t)\frac{\partial^{(u)}}{\partial t}(\cos\sqrt{\lambda_l}t),$$

$$\sigma^2_{2,(s,u)}=\sup_{(x,t)}c^2(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathbf{M}\,B_kB_l}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\frac{\partial^{(s)}}{\partial x}X_k(x)\frac{\partial^{(s)}}{\partial x}X_l(x)\frac{\partial^{(u)}}{\partial t}(\sin\sqrt{\lambda_k}t)\frac{\partial^{(u)}}{\partial t}(\sin\sqrt{\lambda_l}t),$$

$$(s,u)=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0)\}.$$

Доведення. Розглянемо послідовність функцій, яка апроксимує ряд (7):

$$u_N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right)X_k(x).$$

Тоді $\|u_N(x,t)-u(x,t)\|\to 0$, $N\to\infty$ (у нормі (8′)), якщо

$$\begin{gathered} u_N(x,t)\overset{L_p(Q,c(t))}{\longrightarrow}u(x,t),\qquad \frac{\partial u_N(x,t)}{\partial x}\overset{L_p(Q,c(t))}{\longrightarrow}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\\ \frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t}\overset{L_p(Q,c(t))}{\longrightarrow}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\;\frac{\partial^2 u_N(x,t)}{\partial x^2}\overset{L_p(Q,c(t))}{\longrightarrow}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\\ \frac{\partial^2 u_N(x,t)}{\partial t^2}\overset{L_p(Q,c(t))}{\longrightarrow}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\;\frac{\partial^2 u_N(x,t)}{\partial t^2}\overset{L_p(Q,c(t))}{\longrightarrow}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{13}$$

Тоді, скориставшись наслідком теореми 1 з роботи [3], з умов (13) одержимо такі умови існування розв'язку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{M}\,A_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}tX_k(x)X_l(x)<\infty, \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathbf{M}\,B_kB_l}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}tX_k(x)X_l(x)<\infty, \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{M}\,A_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}tX'_k(x)X'_l(x)<\infty, \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathbf{M}\,B_kB_l}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}tX_k'(x)X_l'(x)<\infty, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k\lambda_l}\,\mathbf{M}\,A_kA_l\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}tX_k(x)X_l(x)<\infty, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{M}\,B_kB_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}tX_k(x)X_l(x)<\infty, \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{M}\,A_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}tX_k''(x)X_l'(x)<\infty, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathbf{M}\,B_kB_l}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}tX_k''(x)X_l'(x)<\infty, \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_k\lambda_l\,\mathbf{M}\,A_kA_l\cos\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_l}tX_k(x)X_l(x)<\infty, \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k\lambda_l}\,\mathbf{M}\,B_kB_l\sin\sqrt{\lambda_k}t\sin\sqrt{\lambda_l}tX_kX_l<\infty. \tag{23}$$

Оскільки $X_k(x)$ і λ_k є відповідно власними функціями та власними числами інтегрального рівняння [7, с. 439], то

$$X_k(x)=\lambda_k\int_0^{\pi}G(x,s)X_k(s)\rho(s)\,ds, \tag{24}$$

де

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}W(x)V(s), & x\le s,\\ \frac{1}{\Delta}W(x)V(s), & x>s,\end{cases}$$

є функцією впливу задачі (6), величина $\Delta=p(VW'-WV')=\mathrm{const}$, а функції $V(x)$ і $W(x)$ є двічі неперервно диференційовними лінійно незалежними розв'язками задачі Коші [7, с. 433].

Якщо двічі продиференціювати (24) по x, та з того, що $|X_k(x)|<\widetilde{c}$, де $\widetilde{c}$ — деяка константа, з умов (14)–(23) одержимо умови збіжності відповідних рядів, що будуть випливати із збіжності рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_k\lambda_l\,\mathbf{M}\,A_kA_l<\infty,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k\lambda_l}\,\mathbf{M}\,B_kB_l<\infty.$$

Щоб одержати оцінку (12), скористаємося теоремою 1 з роботи [1].

Позначимо

$$u_m^{\infty}(x,t)=\sum_{k=m}^{\infty}A_k\varphi_k(x,t)+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Psi_k(x,t),$$

де $\varphi_k(x,t)=X_k(x)\cos\sqrt{\lambda_k}t$, $\Psi_k(x,t)=X_k(x)\sin\sqrt{\lambda_k}t$.

Тоді

$$\begin{aligned}&\|u_N^{\infty}(x,t)\|_{[W_{p,2}^{*}(Q,c(t))]}\\ &\le\left\|\sum_{k=N}^{\infty}A_k\varphi_k(x,t)\right\|_{L_p(Q,c(t))}+\left\|\sum_{k=N}^{\infty}\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\Psi_k(x,t)\right\|_{L_p(Q,c(t))}\\ &\quad+\left\|\sum_{k=N}^{\infty}A_k\frac{\partial\varphi_k(x,t)}{\partial x}\right\|_{L_p(Q,c(t))}+\left\|\sum_{k=N}^{\infty}\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{\partial\Psi_k(x,t)}{\partial x}\right\|_{L_p(Q,c(t))}\end{aligned}$$

$$+\left\|\sum_{k=N}^{\infty} A_k \frac{\partial \varphi_k(x,t)}{\partial t}\right\|_{L_p(Q,c(t))} + \left\|\sum_{k=N}^{\infty} \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{\partial \Psi_k(x,t)}{\partial t}\right\|_{L_p(Q,c(t))}$$
$$+\left\|\sum_{k=N}^{\infty} A_k \frac{\partial^2 \varphi_k(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_p(Q,c(t))} + \left\|\sum_{k=N}^{\infty} \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{\partial^2 \Psi_k(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_p(Q,c(t))}$$
$$+\left\|\sum_{k=N}^{\infty} A_k \frac{\partial^2 \varphi_k(x,t)}{\partial t^2}\right\|_{L_p(Q,c(t))} + \left\|\sum_{k=N}^{\infty} \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \frac{\partial^2 \Psi_k(x,t)}{\partial t^2}\right\|_{L_p(Q,c(t))}.$$

Оскільки

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{10} \zeta_i > x\right\} \le \sum_{i=1}^{10} \mathsf{P}\{\zeta_i > \alpha_i x\},$$

де ζ_i — деякі випадкові величини, $\zeta_i > 0$, а $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i = 1$, то обираючи $a_i = 1/10$, $i = 1,\dots,10$, з теореми 1 роботи [1], наслідку з теореми 1 роботи [1], та з (8) одержимо оцінку (12). Теорему доведено. □

Тепер, накладаючи сильніші обмеження, одержимо точніші оцінки розподілу норми випадкового процесу (7).

Теорема 2. *Нехай для будь-якої монотонно неспадної послідовності*

$$\overline{a} = \{a_k, k \ge 1\}, \qquad a_k > 0,\ a_k \to \infty,\ k \to \infty,$$

для якої збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{3}{4}-\frac{3}{2p}} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) < \infty, \tag{25}$$

виконуються умови:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k a_l \lambda_k \lambda_l |\mathbf{M}\, A_k A_l| < \infty, \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k a_l \lambda_k^{1/2} \lambda_l^{1/2} |\mathbf{M}\, B_k B_l| < \infty. \tag{27}$$

Тоді з імовірністю 1 *існує узагальнений розв'язок задачі* (1)–(5) *у просторі* $W^*_{p,2}(Q, c(t))$, *який можна зобразити у вигляді збіжного за ймовірністю у нормі простору* $W^*_{p,2}(Q, c(t))$ *ряду* (7), *і при* $z > 40e^{-1} \max \Delta_i(\overline{a})$, $i = 1,\dots,10$ *виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\|u_m^{\infty}(x,t)\|_{W^*_{p,2}(Q,c(t))} > z\right\} \le \sum_{i=1}^{10} \exp\left\{-\frac{\left(z/10 - 4e^{-1}\Delta_i(\overline{a})\right)^2}{72e^{-1}\left(\Delta_i(\overline{a})\right)^2}\right\}, \tag{28}$$

де

$$\Delta_1(\overline{a}) = \widetilde{c}_0 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} a_i^2\, \mathbf{M}\, A_i^2\right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$
$$\Delta_2(\overline{a}) = \widetilde{c}_0 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} a_i^2 \frac{\mathbf{M}\, B_i^2}{\lambda_i}\right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right), \tag{29}$$
$$\Delta_3(\overline{a}) = \widetilde{c}_1 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k}\sum_{j=m}^{k} a_i a_j \lambda_i \lambda_j\, \mathbf{M}\, A_i A_j\right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

$$\Delta_4(\overline{a}) = \widetilde{c}_1 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j}\, \mathbf{M}\, B_i B_j \right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

$$\Delta_5(\overline{a}) = \widetilde{c} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} a_i^2 \lambda_i\, \mathbf{M}\, A_i^2 \right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

$$\Delta_6(\overline{a}) = \widetilde{c} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} a_i^2\, \mathbf{M}\, B_i^2 \right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

$$\Delta_7(\overline{a}) = \widetilde{c}_2 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \lambda_i \lambda_j\, \mathbf{M}\, A_i A_j \right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

$$\Delta_8(\overline{a}) = \widetilde{c}_2 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j}\, \mathbf{M}\, B_i B_j \right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

$$\Delta_9(\overline{a}) = \widetilde{c}_0 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} a_i^2 \lambda_i^2\, \mathbf{M}\, A_i^2 \right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

$$\Delta_{10}(\overline{a}) = \widetilde{c}_0 \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} a_i^2 \lambda_i\, \mathbf{M}\, B_i^2 \right)^{1/2} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

де

$$c_k = 2b_p \lambda_k^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \left(\sqrt{\lambda_k} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, \tag{30}$$

та

$$b_p = \left(1 + \pi^{\frac{3}{2} - \frac{1}{p}} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} \right) \left(c\pi^{\frac{1}{p} - 1} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} \right).$$

$$|X_k^{c_i}| < \widetilde{c}_i, \qquad i = 0, 1, 2.$$

Доведення. З теореми 2 роботи [1] і з умов (13), враховуючи те, що функції $X_k(x)$ є ортогональними на $[0, \pi]$ [7, с. 428] (у цьому випадку будемо використовувати теорему 3 роботи [1]), одержимо такі умови існування розв'язку:

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} a_i^2\, \mathbf{M}\, A_i^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \cos^2 \sqrt{\lambda_i} t X_i^2(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \tag{31}$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} a_i^2 \frac{\mathbf{M}\, B_i^2}{\lambda_i} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \sin^2 \sqrt{\lambda_i} t X_i^2(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j\, \mathbf{M}\, A_i A_j \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \cos \sqrt{\lambda_i} t \cos \sqrt{\lambda_j} t \\ \times X_i'(x) X_j'(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}\, \mathbf{M}\, B_i B_j \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \sin \sqrt{\lambda_i} t \sin \sqrt{\lambda_j} t \\ \times X_i'(x) X_j'(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} a_i^2 \lambda_i \,\mathrm{M}\, A_i^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \sin^2 \sqrt{\lambda_i} t X_i^2(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \quad (35)$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} a_i^2 \,\mathrm{M}\, B_i^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \cos^2 \sqrt{\lambda_i} t X_i^2(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \,\mathrm{M}\, A_i A_j \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \cos \sqrt{\lambda_i} t \cos \sqrt{\lambda_j} t \\ \times X_i'(x) X_j'(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \,\mathrm{M}\, B_i B_j \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \sin \sqrt{\lambda_i} t \sin \sqrt{\lambda_j} t \\ \times X_i'(x) X_j'(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} a_i^2 \lambda_i^2 \,\mathrm{M}\, A_i^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \cos^2 \sqrt{\lambda_i} t X_i^2(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty, \quad (39)$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} a_i^2 \lambda_i \,\mathrm{M}\, B_i^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} c^2(t) \sin^2 \sqrt{\lambda_i} t X_i^2(x)\, dx\, dt \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty. \quad (40)$$

Оскільки $\int_0^{\infty} c^2(t)\, dt < 1$, враховуючи, що $|X_k(x)| < c$, аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 1, з умов (31)–(40) одержуємо умови збіжності відповідних рядів, які випливатимуть із збіжності рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \lambda_i \lambda_j \,\mathrm{M}\, A_i A_j \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k} \sum_{j=m}^{k} a_i a_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \,\mathrm{M}\, B_i B_j \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty.$$

Тепер знайдемо значення коефіцієнтів c_k. Для цього використаємо лему 1, нерівності Бернштейна для власних функцій інтегрального рівняння з роботи [8] та цілих функцій експоненціального типу з роботи [7], в яких наведені значення коефіцієнтів у відповідних нерівностях Бернштейна. Ми будемо використовувати саме ці нерівності, виходячи з того, що функції $X_k(x)$ є власними функціями інтегрального рівняння, а функції $\sin \sqrt{\lambda_k} t$ та $\cos \sqrt{\lambda_k} t$ є цілими функціями експоненціального типу $\sqrt{\lambda_k}$, а функція $c(t)$, $t \in [0, \infty)$ — є цілою функцією експоненціального типу ε, обмеженою на дійсній осі. Оскільки функції $X_k(x)$ є власними функціями інтегрального рівняння, то

$$X_k(x) = \lambda_k \int_0^{\pi} G(x, s) X_k(s)\, d\mu.$$

де $d\mu = \rho(s)\, ds$.

Тоді з роботи [8] випливає, що для функцій $X_k(x)$ вірна нерівність Бернштейна, і

$$D_n = \inf_{N \geq 1} \left[\left(1 + \Delta(\pi/N) \sqrt{\pi} \lambda_n \right) (N/\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \right],$$

$$\Delta(\pi/N) = \sup_{|z_1 - z_2| \le \pi/N} \left(\int_0^\pi \left(G(z_1, s) - G(z_2, s) \right)^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

З роботи [4] випливає, що $\Delta(h) = ch$, де c — деяка стала. Тоді одержимо:

$$D_n = b_n \lambda_n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, \tag{41}$$

де

$$b_n \left(1 + \pi^{\frac{3}{2} - \frac{1}{p}} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} \right) c^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \pi^{\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}.$$

Оскільки функції $\sin\sqrt{\lambda_k}t$ та $\cos\sqrt{\lambda_k}t$ є цілими функціями експоненціального типу $\sqrt{\lambda_k}$, обмеженими на дійсній осі, а функція $c(t)$ — цілою функцією експоненціального типу ε, обмеженою на дійсній осі, то функції $c(t)\sin\sqrt{\lambda_k}t$ та $c(t)\cos\sqrt{\lambda_k}t$ будуть цілими функціями експоненціального типу $(\sqrt{\lambda_k} + \varepsilon)$, обмеженими на дійсній осі.

Тому з леми 1 одержимо значення коефіцієнтів c_k, які зображені формулою (29).

Нерівність (28) одержимо аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 1, користуючись теоремою 2 з роботи [1].

Теорему доведено. ☐

Тепер покажемо, як від простору $W^*_{p,2}(Q, c(t))$ можна переходити до простору без ваги $W^*_{p,2}(Q, c(t))$ де $Q_1 = [0, \pi] \times [0, T]$ і як при цьому будуть змінюватись умови та нерівності для розподілу норм.

Теорема 3. *Нехай для будь-якої монотонно неспадної послідовності*

$$a = \{a_k, k \ge 1\}, \qquad a_k > 0,\ a_k \to \infty,\ k \to \infty,$$

виконуються умови (25) *та* (27).

Тоді з імовірністю 1 *існує узагальнений розв'язок задачі* (1)–(5) *у просторі* $W^*_{p,2}(Q_1)$, *який можна зобразити у вигляді збіжного за ймовірністю у нормі простору* $W^*_{p,2}(Q_1)$ *ряду* (7), *і при* $z > 40\delta e^{-1} \max \Delta_i(\overline{a})$, $i = 1, \ldots, 10$ *виконується нерівність*:

$$\mathsf{P}\{\|u_m^\infty(x,t)\|_{W^*_{p,2}(Q_1)} > z\} \le \sum_{i=1}^{10} \exp\left\{ -\frac{\left(z/10\delta - 4e^{-1}\Delta_i(\overline{a})\right)^2}{72e^{-1}\left(\Delta_i(\overline{a})\right)^2} \right\}, \tag{42}$$

де $\Delta_i(\overline{a})$ *визначаються формулами* (29), *а* $\delta = (\sin 1)^{-p}$.

Доведення. Нехай $c(t) = \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t}$ і $\varepsilon = T^{-1}$. Тоді, $\frac{\sin x}{x} \ge \sin 1$ при $x \le 1$, то для будь-якої функції $f(x,t) \in L_p$ маємо:

$$\int_0^T \int_0^\pi |f(x,t)|^p \, dx\, dt \le \frac{1}{(\sin 1)^p} \int_0^T \int_0^\pi \left| \frac{\sin t/T}{t/T} \right|^p |f(x,t)|^p \, dx\, dt$$
$$\le \delta \int_0^T \int_0^\pi |c(t) f(x,t)|^p \, dx\, dt,$$

тобто

$$\|f(x,t)\|_{L_p(Q_1)} \le \delta \|f(x,t)\|_{L_p(Q, c(t))}.$$

Тому

$$\mathsf{P}\{\|u_m^\infty(x,t)\|_{L_p(Q_1)} > z\} \le \mathsf{P}\left\{ \|u_m^\infty(x,t)\|_{L_p(Q,c(t))} > \frac{z}{\delta} \right\},$$

де $\delta = (\sin 1)^{-p}$ і доведення випливає з теореми 2.

Теорему доведено. ☐

Література

1. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *К вопросу о применяемости метода Фурье для решения задач со случайными условиями*, Случайные процессы в задачах математической физики (1979), Институт математики АН УССР, Киев, 4–35.
2. ———, *Субгауссовские случайные векторы и процессы*, Теор. веростност. и матем. статист. **36** (1984), 4–35.
3. Ю. В. Козаченко, С. Г. Тригуб, *Про швидкість збіжності строго субгауссових випадкових рядів у нормі простору L_p*, Теор. ймовірност. та матем. статист. **48** (1993), 51–66.
4. Е. Бейсенбаев, Ю. В. Козаченко, *Равномерная сходимость случайных рядов по вероятности и решение краевых задач со случайными начальными условиями*, Теор. веростност. и матем. статист. **21** (1979), 9–23.
5. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, "Физматгиз", Москва, 1970.
6. Н. Г. Петровський, *Лекции об уравнениях с частными производными*, "Физматгиз", Москва, 1961.
7. Г. Н. Положий, *Уравнения математической физики*, "Высшая школа", Москва, 1964.
8. И. Н. Зеленугина, Ю. В. Козаченко, *О скорости сходимости разложений Карунела-Лоэва гауссовских случайных процессов*, Теор. веростност. и матем. статист. **38** (1988), 41–51.
9. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, "Наука", Москва, 1977.

252601, КИЇВ, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА, КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

252601, КИЇВ, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА, КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Надійшла 5.12.94