Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 82–91

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 82–91

РОЗРІЗНЕННЯ ПРОЦЕСІВ АВТОРЕГРЕСІЇ З НУЛЬОВИМ АСИМПТОТИЧНИМ РІВНЕМ

УДК 519.21

Ю. М. ЛІНЬКОВ

РЕЗЮМЕ. Досліджена залежність швидкості спадання ймовірностей помилок 2-го роду від швидкості спадання рівня критерію Неймана–Пірсона для спостережень процесів авторегресії. Дослідження грунтується на теоремах про великі відхилення для логарифму відношення правдоподібності.

1. Вступ

Нехай $\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $n \geq 2$ — спостереження процесу авторегресії вигляду

$$\xi_i = \theta \xi_{i-1} + w_i, \qquad i = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

де $\xi_0 = 0$, $\theta \in \boldsymbol{R}$ — невідомий параметр, а $w_1, w_2, \dots$ — незалежні стандартні гауссові випадкові величини що, незалежні від θ. Позначимо через P_θ^n міру, що задає розподіл спостережень ξ^n. Розглянемо задачу перевірки двох гіпотез H^n та $\widetilde{H}^n$, які полягають у тому, що розподіл спостережень ξ^n задається мірами P_θ^n та $P_{\widetilde{\theta}}^n$, відповідно, $|\theta| < 1$, де $\theta \neq \widetilde{\theta}$. Припускатимемо, що θ не залежить від n, а $\widetilde{\theta}$, взагалі кажучи, залежить від n, та писатимемо $\widetilde{\theta} = \theta_n$, якщо $\widetilde{\theta}$ залежить від n. Очевидно, що $P_\theta^n \sim P_{\widetilde{\theta}}^n$, причому логарифм щільності міри $P_{\widetilde{\theta}}^n$ відносно міри P_θ^n має вигляд (P_θ^n — м.н.)

$$\Lambda_n = (\widetilde{\theta} - \theta) \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1} w_i - \frac{1}{2} (\widetilde{\theta} - \theta)^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}^2. \tag{2}$$

Нехай δ_n — критерій Неймана–Пірсона рівня $\alpha_n \in (0, 1)$ розрізнення гіпотез H^n та $\widetilde{H}^n$ за спостереженням ξ^n процесу авторегресії (1). Тоді [1]

$$\delta_n = I(\Lambda_n > d_n) + q_n I(\Lambda_n = d_n), \tag{3}$$

де $I(A)$ — індикатор множини A, а $d_n \in \boldsymbol{R}$ і $q_n \in [0, 1]$ — параметри критерію δ_n, що визначаються з умов $E_\theta^n \delta_n = \alpha_n$ (тут E_θ^n — математичне сподівання за мірою P_θ^n). Позначимо через β_n ймовірність помилки 2-го роду критерію δ_n.

У роботі [2] досліджувалась поведінка α_n та β_n для різних значень θ в залежності від поведінки різниці $\Delta_n = \theta_n - \theta$ при $n \to \infty$. При цьому у випадку неконтигуальних сімей гіпотез (H^n) та $(\widetilde{H}^n)$ розглянуто лише критерії δ_n з ненульовою асимптотичною поведінкою рівня α_n.

В цій роботі розглянемо критерії δ_n у випадку неконтигуальних гіпотез з нульовим асимптотичним рівнем та вивчимо залежність поведінки ймовірності помилки

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F10, 62A10; Secondary 62F05, 62M10.

2-го роду β_n від швидкості спадання рівня α_n. При цьому дослідження буде грунтуватися на теоремах про великі відхилення для логарифма відношення правдоподібності Λ_n при $n \to \infty$. У §2 визначається інтеграл Хелінгера $H_n(\varepsilon)$ порядку ε для мір $P^n_{\widetilde{\theta}}$ та P^n_θ, вказується спосіб знаходження інтервалу значень ε, в якому $H_n(\varepsilon) < \infty$, наводяться формули для визначення $H_n(\varepsilon)$. У §3 наведено граничні теореми про поведінку $H_n(\varepsilon)$ при $n \to \infty$ у двох випадках: 1) $\widetilde{\theta}$ не залежить від n; 2) $\widetilde{\theta} = \theta_n$ залежить від n так, що $\Delta_n = \theta_n - \theta \to 0$ при $n \to \infty$, але сім'ї гіпотез (H^n) та $(\widetilde{H}^n)$ неконтигуальні. У §4 доведено теореми про великі відхилення для Λ_n як у випадку сталих альтернатив $\widetilde{\theta}$, так і в випадку близьких неконтигуальних альтернатив $\widetilde{\theta} = \theta_n$. При цьому теореми про великі відхилення доведено як у випадку, коли виконується гіпотеза H^n, так і в випадку, коли виконується гіпотеза $\widetilde{H}^n$. У §5 доведено теореми про залежність експонент спадання ймовірностей помилок α_n і β_n критерію Неймана–Пірсона δ_n в умовах теорем про великі відхилення з §4.

2. Інтеграл Хелінгера

Інтеграл Хелінгера $H_n(\varepsilon)$ порядку ε для мір $P^n_{\widetilde{\theta}}$ і P^n_θ, визначимо за формулою

$$H_n(\varepsilon) = H(\varepsilon; P^n_{\widetilde{\theta}}, P^n_\theta) = E^n_\theta e^{\varepsilon\Lambda_n}, \tag{4}$$

де Λ_n визначається рівністю (2). Аналогічно визначимо інтеграл Хелінгера $\widetilde{H}_n(\varepsilon)$ порядку ε для мір P^n_θ і $P^n_{\widetilde{\theta}}$, покладаючи

$$\widetilde{H}_n(\varepsilon) = H(\varepsilon; P^n_\theta P^n_{\widetilde{\theta}}) = E^n_{\widetilde{\theta}} e^{\varepsilon\widetilde{\Lambda}_n},$$

де $\widetilde{\Lambda}_n$ є логарифм щільності міри P^n_θ відносно міри $P^n_{\widetilde{\theta}}$. Оскільки, $\widetilde{\Lambda}_n = -\Lambda_n$ ($P^n_{\widetilde{\theta}}$ — м.н.) та (P^n_θ — м.н.), то $\widetilde{H}_n(\varepsilon) = H_n(1-\varepsilon)$.

З рівнянь (2) та (4) легко видно, що

$$H_n(\varepsilon) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp\left(-\frac{1}{2}x' A_n x\right) dx, \tag{5}$$

де $A_n = A_n(\varepsilon) = (a_{ij})$ є квадратною матрицею порядку n, у якої $a_{ij} = 0$ при $|i-j| \geq 2$, $a_{ij} = b$ при $|i-j| = 1$, $a_{ij} = c$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$ і $a_{nn} = 1$. Тут $b = b(\varepsilon) = -\theta - \varepsilon(\widetilde{\theta} - \theta)$ та $c = c(\varepsilon) = 1 + \theta^2 + \varepsilon(\widetilde{\theta}^2 - \theta^2)$. Позначимо

$$\varepsilon_-^{(n)} = \inf\{\varepsilon : H_n(\varepsilon) < \infty\}, \qquad \varepsilon_+^{(n)} = \sup\{\varepsilon : H_n(\varepsilon) < \infty\}.$$

Очевидно, що $H_n(\varepsilon) < \infty$ тоді і тільки тоді, коли матриця $A_n(\varepsilon)$ додатно визначена. Тому для знаходження величин $\varepsilon_-^{(n)}$ та $\varepsilon_+^{(n)}$ достатньо знайти такі значення ε, щоб матриця $A_n(\varepsilon)$ була додатно визначеною.

Отже, для будь-якого $\varepsilon \in (\varepsilon_-^{(n)}, \varepsilon_+^{(n)})$ з рівності (5) маємо

$$H_n(\varepsilon) = |A_n(\varepsilon)|^{-1/2}, \tag{6}$$

де $|A_n(\varepsilon)|$ — визначник матриці $A_n(\varepsilon)$.

Щоб обчислити визначник $|A_n(\varepsilon)|$ і довести додатну визначеність матриці $A_n(\varepsilon)$ розглянемо головні мінори $D_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, матриці $A_n = A_n(\varepsilon)$, які стоять у лівому верхньому куті матриці A_n. За критерієм Сильвестра матриця A_n додатно визначена тоді і тільки тоді, коли додатні всі головні мінори $D_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 2$, то $D_{2,1} = c$ та $D_{2,2} = c - b^2$. Тому матриця A_n додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $c - b^2 \geq 0$, тобто коли

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4(\widetilde{\theta}-\theta)^{-2}}+1\right) < \varepsilon < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4(\widetilde{\theta}-\theta)^{-2}}-1\right).$$

Отже, при $n = 2$ задача знаходження $\varepsilon_-^{(2)}$ і $\varepsilon_+^{(2)}$ та обчислення $H_n(\varepsilon)$ розв'язана. Тому нижче розглядатимемо лише $n \geq 3$.

Для обчислення мінорів $D_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ використаємо відомий рекурентний метод [3].

Очевидно, що для будь-якого $n \geq 3$ виконується рівність

$$D_{n,n} = D_{n,n-1} - b^2 D_{n,n-2} \tag{7}$$

і $D_{n,1} = c$, $D_{n,2} = c^2 - b^2$. Звідси випливає, що при $n = 3$ усі визначники $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ та $D_{3,3}$ знайдено. Нехай тепер $n > 3$. При $k = 3, 4, \ldots, n-1$ виконується рекурентне співвідношення

$$D_{n,k} = cD_{n,k-1} - b^2 D_{n,k-2}. \tag{8}$$

Шоб обчислити $D_{n,k}$ розглянемо квадратне рівняння $x^2 - cx + b^2 = 0$, розв'язки якого позначимо через α та β:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(c + \sqrt{c^2 - 4b^2}\right), \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(c - \sqrt{c^2 - 4b^2}\right). \tag{9}$$

Якщо $\alpha \neq \beta$, то з (7)–(9) легко вивести, що

$$D_{n,k} = (\alpha - \beta)^{-1}(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}), \qquad k = 3, 4, \ldots, n-1, \quad n > 3, \tag{10}$$

$$D_{n,n} = (\alpha - \beta)^{-1}\left((1-\beta)\alpha^n - (1-\alpha)\beta^n\right), \qquad n \geq 3. \tag{11}$$

Якщо $\alpha = \beta$, то дістанемо, що

$$D_{n,k} = (k+1)(c/2)^k, \qquad k = 3, 4, \ldots, n-1, \quad n > 3, \tag{12}$$

$$D_{n,n} = (n - (n-1)c/2)(c/2)^{n-1}, \qquad n \geq 3. \tag{13}$$

Зауважимо, що $D_{n,n} = |A_n|$. Звідси, враховуючи вигляд мінора $D_{n,n}$, який визначається рівностями (11) та (13), та вигляд розв'язків α і β, що задані формулами (9), з (6) одержуємо вираз для інтеграла Хелінгера $H_n(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (\varepsilon_-^{(n)}, \varepsilon_+^{(n)})$.

На підставі формул (10)–(13) для мінорів $D_{n,k}$ легко дістати необхідні та достатні умови додатної визначеності матриці A_n при $n \geq 3$ у термінах величин b і c, які сформулюємо у вигляді такої леми ([4], леми 2–4).

Лема 1. *Якщо $c^2 - 4b^2 > 0$, то матриця A_n додатно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови*

1) $c > 0$;
2) $1 - \beta \geq 0$ *або* $1 - \beta < 0$ *та*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n < \left(\frac{\alpha - 1}{\beta - 1}\right).$$

Якщо $c^2 - 4b^2 = 0$, то матриця A_n додатно визначена тоді і тільки тоді, коли виконується умова

3) $0 < c < 2n/(n-1)$.

Якщо $c^2 - 4b^2 < 0$, то матриця A_n додатно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

4) $c > 2|b|\cos\frac{\pi}{n}$;

5) $\sin n\varphi - |b|\sin(n-1)\varphi > 0$, *де* $\varphi = \arccos\frac{c}{2|b|}$.

Лема 1 дає змогу знайти значення величин $\varepsilon_-^{(n)}$ та $\varepsilon_+^{(n)}$. Щоб сформулювати відповідний результат, розглянемо наступні два рівняння відносно ε. Перше рівняння має вигляд

$$\sin n\varphi(\varepsilon) - |b(\varepsilon)|\sin(n-1)\varphi(\varepsilon) = 0, \tag{14}$$

де $\varphi(\varepsilon) = \arccos(c(\varepsilon)/(2/|b(\varepsilon)|))$. Тут ε змінюється в області, де виконується умова

$$0 < c(\varepsilon) < 2|b(\varepsilon)|, \qquad 0 < \varphi(\varepsilon) < \frac{\pi}{n}.$$

Друге рівняння має вигляд

$$\left(\frac{c(\varepsilon) + \sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)}}{c(\varepsilon) - \sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)}}\right)^n = \frac{c(\varepsilon) - 2 + \sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)}}{c(\varepsilon) - 2 - \sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)}}, \tag{15}$$

де ε змінюється в області, в якій $\varepsilon > 1$ та $c(\varepsilon) - \sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)} > 0$.

Лема 2. *Нехай $|\theta| < 1$. Тоді величини $\varepsilon_-^{(n)}$ та $\varepsilon_+^{(n)}$ при $\widetilde{\theta} > \theta$ мають вигляд*

$$\varepsilon_-^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_1 - \delta_n^{(1)}, & \text{якщо } -2 < \widetilde{\theta} + \theta \le 2 \\ & \text{або } \widetilde{\theta} + \theta > 2 \text{ та } 1 - \theta\widetilde{\theta} > 0, \\ \varepsilon_2 - \delta_n^{(2)}, & \text{якщо } \widetilde{\theta} + \theta > 2 \text{ та } 1 - \theta\widetilde{\theta} < 0, \\ \varepsilon_2, & \text{якщо } \widetilde{\theta} + \theta > 2 \text{ та } 1 - \theta\widetilde{\theta} = 0; \end{cases}$$

$$\varepsilon_+^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_2 + \overline{\delta}_n^{(2)}, & \text{якщо } |\widetilde{\theta} + \theta| < 2, |\widetilde{\theta}| \le 1 \text{ і } n \ge 3 \\ & \text{або } 0 < \widetilde{\theta} + \theta < 2,\ \widetilde{\theta} > 1 \text{ і } n < n_0, \\ \varepsilon^{(n)}, & \text{якщо } \widetilde{\theta} + \theta \ge 2 \text{ і } n \ge 3 \\ & \text{або } 0 < \widetilde{\theta} + \theta < 2,\ \widetilde{\theta} > 1 \text{ і } n > n_0, \\ \varepsilon_2 & \text{якщо } 0 < \widetilde{\theta} + \theta < 2,\ \widetilde{\theta} > 1 \text{ і } n = 3; \end{cases}$$

або при $\widetilde{\theta} < \theta$

$$\varepsilon_-^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_2 - \delta_n^{(2)}, & \text{якщо } -2 < \widetilde{\theta} + \theta \le 2 \\ & \text{або } \widetilde{\theta} + \theta < -2 \text{ і } 1 - \theta\widetilde{\theta} > 0, \\ \varepsilon_1 - \delta_n^{(1)}, & \text{якщо } \widetilde{\theta} + \theta < -2 \text{ і } 1 - \theta\widetilde{\theta} < 0, \\ \varepsilon_1, & \text{якщо } \widetilde{\theta} + \theta < -2 \text{ і } 1 - \theta\widetilde{\theta} = 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon_+^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_1 + \overline{\delta}_n^{(1)}, & \text{якщо } |\widetilde{\theta} + \theta| < 2, |\widetilde{\theta}| \ge -1 \text{ і } n \ge 3 \\ & \text{або } -2 < \widetilde{\theta} + \theta < 0\ \widetilde{\theta} < -1 \text{ і } n < n_1, \\ \varepsilon^{(n)}, & \text{якщо } -2 < \widetilde{\theta} + \theta < 0,\ \widetilde{\theta} < -1 \text{ і } n > n_1 \\ & \text{або } \widetilde{\theta} + \theta \le -2 \text{ і } n \ge 3, \\ \varepsilon^{(2)}, & \text{якщо } -2 < \widetilde{\theta} + \theta < 0,\ \widetilde{\theta} < -1 \text{ і } n = n_1, \end{cases}$$

де ε_1 та ε_2 — розв'язки рівняння $c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon) = 0$ виду

$$\varepsilon_1 = -\frac{(1+\theta)^2}{(\widetilde{\theta} - \theta)(\widetilde{\theta} + \theta + 2)}, \qquad \varepsilon_2 = -\frac{(1-\theta)^2}{(\widetilde{\theta} - \theta)(2 - \widetilde{\theta} - \theta)}$$

(ε_1 *визначено лише при* $\widetilde{\theta}+\theta\neq-2$, *а* ε_2 — *при* $\widetilde{\theta}+\theta\neq 2$), δ_n^i — *єдиний розв'язок рівняння* (14) *відносно* $\delta>0$ *при* $\varepsilon=\varepsilon_i-\delta$, $\overline{\delta}_n^i$ — *єдиний розв'язок рівняння* (14) *відносно* $\delta>0$ *при* $\varepsilon=\varepsilon_i+\delta$, $i=1,2$, $\varepsilon^{(n)}$ — *єдиний розв'язок рівняння* (15), *причому* $\delta_n^{(i)}\downarrow 0$, $\overline{\delta}_n^{(i)}\downarrow 0$ *та* $\varepsilon^{(n)}\downarrow 1$ *при* $n\to\infty$, *та*

$$n_0=\frac{1-\theta\widetilde{\theta}}{(\widetilde{\theta}-1)(1-\theta)},\qquad n_1=\frac{\theta\widetilde{\theta}-1}{(1+\widetilde{\theta})(1+\theta)},$$

Доведення леми 2 подано у роботі [4]. Воно полягає у перевірці умов 1–5 леми 1.

3. Граничні теореми для інтеграла Хелінгера

Виконується наступна теорема про асимптотичну поведінку інтеграла Хелігнера $H_n(\varepsilon)$ при $n\to\infty$, коли $\widetilde{\theta}$ не залежить від n.

Теорема 1. *Нехай* $|\theta|<1$ *та* $\widetilde{\theta}$ *не залежить від* n. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon\in(-\infty,\infty)$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln H_n(\varepsilon)=\varkappa(\varepsilon),\tag{16}$$

де

$$\varkappa(\varepsilon)=-\frac{1}{2}\ln\frac{c(\varepsilon)+\sqrt{c^2(\varepsilon)-4b^2(\varepsilon)}}{2}\tag{17}$$

при $\varepsilon\in(\varepsilon_-,\varepsilon_+)$ *у випадку* $1-\theta\widetilde{\theta}=0$, *при* $\varepsilon\in[\varepsilon_-,\varepsilon_+]$ *у випадку* $1-\theta\widetilde{\theta}\neq 0$ *та* $|\widetilde{\theta}|\le 1$, *при* $\varepsilon\in[\varepsilon_-,\varepsilon_+)$ *у випадку* $1-\theta\widetilde{\theta}\neq 0$ *та* $|\widetilde{\theta}|>1$, $\varkappa(\varepsilon)=0$ *при* $\varepsilon=\varepsilon_+$, *якщо* $1-\theta\widetilde{\theta}=0$ *або* $1-\theta\widetilde{\theta}\neq 0$ *та* $|\widetilde{\theta}|>1$, $\varkappa(\varepsilon)=\infty$ *для всіх інших значень* ε, *а величини* ε_- *та* ε_+ *мають вигляд*

$$\varepsilon_-=\begin{cases}\varepsilon_1 I(\widetilde{\theta}>\theta)+\varepsilon_2 I(\widetilde{\theta}<\theta), & \text{якщо } 1-\theta\widetilde{\theta}>0,\\ \varepsilon_2 I(\widetilde{\theta}>\theta)+\varepsilon_1 I(\widetilde{\theta}<\theta), & \text{якщо } 1-\theta\widetilde{\theta}\le 0,\end{cases}$$

$$\varepsilon_+=\begin{cases}\varepsilon_2 I(\widetilde{\theta}>\theta)+\varepsilon_1 I(\widetilde{\theta}<\theta), & \text{якщо } |\widetilde{\theta}|\le 1,\\ 1, & \text{якщо } |\widetilde{\theta}|>1.\end{cases}$$

Доведення. З леми 2 випливає, що $H_n(\varepsilon)<\infty$ при $\varepsilon\in(\varepsilon_-^{(n)},\varepsilon_+^{(n)})$ і $H_n(\varepsilon)=\infty$ при $\varepsilon\notin(\varepsilon_-^{(n)},\varepsilon_+^{(n)})$, причому $\varepsilon_-^{(n)}\uparrow\varepsilon_-$ та $\varepsilon_+^{(n)}\downarrow\varepsilon_+$ при $n\to\infty$. Враховуючи рівність (6), де $|A_n(\varepsilon)|=D_{n,n}$, а мінор $D_{n,n}$ задається рівностями (11) і (13), дістанемо, що при будь-якому $\varepsilon\in(-\infty,\infty)$ існує границя (16), де функція $\varkappa(\varepsilon)$ визначається формулою (17) при $\varepsilon\in(\varepsilon_-^{(n)},\varepsilon_+^{(n)})$ у випадку $1-\theta\widetilde{\theta}=0$ і при $\varepsilon\in(\varepsilon_-^{(n)},\varepsilon_+^{(n)})$ у випадку $1-\theta\widetilde{\theta}\neq 0$, $|\widetilde{\theta}|\le 1$, причому покладається $\varkappa(1)=0$ при $|\widetilde{\theta}|\ge 1$, для інших значень ε покладається $\varkappa(\varepsilon)=\infty$. □

Розглянемо тепер випадок, коли $\widetilde{\theta}=\theta_n$ залежить від n, причому $\Delta_n=\theta_n-\theta\to 0$ при $n\to\infty$. У цьому випадку справджується така теорема про асимптотичну поведінку $H_n(\varepsilon)$ при $n\to\infty$.

Теорема 2. *Нехай* $|\theta|\le 1$, *а* θ_n *залежить від* n *так, що* $\Delta_n=\theta_n-\theta\to 0$ *та* $n\Delta_n^2\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тоді для будь-якого* $\varepsilon\in(-\infty,\infty)$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty}\psi^{-1}\ln H_n(\varepsilon)=\varkappa(\varepsilon),\tag{18}$$

де $\psi_n=n\Delta_n^2$, $\varkappa(\varepsilon)=-2^{-1}(1-\theta^2)^{-1}\varepsilon(1-\varepsilon)$.

Доведення. Якщо виконується рівність (6), в якій $|A_n(\varepsilon)=D_{n,n}$, де $D_{n,n}$ — мінор матриці $A_n(\varepsilon)$, що визначається рівностями (11) та (12), для будь-якого $\varepsilon\in(\varepsilon_-^{(n)},\varepsilon_+^{(n)})$

дістаємо

$$\ln H_n(\varepsilon) = -\frac{n}{2}\ln\alpha - \frac{1}{2}\ln\frac{1-\beta-(1-\alpha)(\beta/\alpha)^n}{\alpha-\beta}, \tag{19}$$

де α і β — розв'язки рівняння $x^2 - c^2x + b^2 = 0$, що визначаються рівностями (9), а величини $\varepsilon_-^{(n)}$ і $\varepsilon_+^{(n)}$ визначені у лемі 2. Оскільки $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\varepsilon_1 \to -\infty$ і $\varepsilon_2 \to \infty$ при $n \to \infty$ для тих n, для яких $\Delta_n > 0$, та $\varepsilon_1 \to \infty$, а $\varepsilon_2 \to -\infty$ при $n \to \infty$ для тих n, для яких $\Delta_n < 0$. Тоді з формул для $\varepsilon_-^{(n)}$ і $\varepsilon_+^{(n)}$ легко дістаємо, що $\varepsilon_-^{(n)} \to -\infty$, а $\varepsilon_+^{(n)} \to \infty$ при $n \to \infty$. Після нескладних обчислень одержуємо, що для будь-якого фіксованого $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ при $n \to \infty$

$$\alpha = 1 + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1-\theta^2}\Delta_n^2 + O(\Delta_n^3), \tag{20}$$

звідки випливає, що

$$\ln\alpha = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1-\theta^2}\Delta_n^2(1 + O(\Delta_n)). \tag{21}$$

Аналогічно доведемо, що для будь-якого фіксованого $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ при $n \to \infty$

$$\beta = \theta^2 + 2\theta\varepsilon\Delta_n + O(\Delta_n^2). \tag{22}$$

З (20) та (22) випливає, що для фіксованого $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ при $n \to \infty$

$$\alpha - \beta = 1 - \theta^2 - 2\theta\varepsilon\Delta_n + O(\Delta_n^2). \tag{23}$$

Об'єднуючи (20), (22) і (23), одержуємо для $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ при $n \to \infty$

$$\ln\frac{1-\beta-(1-\alpha)(\beta/\alpha)^n}{\alpha-\beta} = O(\Delta_n^2). \tag{24}$$

Співвідношення (18) випливає з рівностей (19), (21) та (24). □

4. Теореми про великі відхилення

Нехай спочатку $\widetilde{\theta}$ не залежить від n. Тоді з теореми 1 випливає, що при всіх $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ існує границя (16), в якій функція $\varkappa(\varepsilon)$ строго опукла та диференційовна на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$. Щоб сформулювати наступні теореми впровадимо позначення

$$\gamma_- = \varkappa'(\varepsilon_- +), \qquad \gamma_0 = \varkappa'(0), \qquad \gamma_1 = \varkappa'(1), \qquad \gamma_+ = \varkappa'(\varepsilon_+ -),$$

де штрих позначає похідну, а γ_1 позначено лише у випадку $\varepsilon_+ > 1$. Зауважимо, що $\gamma_- = -\infty$ завжди, а $\gamma_+ = \infty$, коли $|\widetilde{\theta}| \le 1$ і $\gamma_+ < \infty$, коли $|\widetilde{\theta}| > 1$. Крім того,

$$\gamma_0 = -\frac{(\widetilde{\theta}-\theta)^2}{2(1-\theta^2)}, \qquad \gamma_1 = -\frac{(\widetilde{\theta}-\theta)^2}{2(1-\theta^2)}. \tag{25}$$

Виконується наступна теорема про ймовірності великих відхилень Λ_n при гіпотезі H^n, коли $n \to \infty$.

Теорема 3. *Якщо $|\theta| < 1$ та $\widetilde{\theta}$ не залежіть від n, то виконуються наступні твердження:*

1) *для будь-якого $\gamma \in (\gamma_0; \gamma_+)$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P_\theta^n\left(\frac{\Lambda_n}{n} > \gamma\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P_\theta^n\left(\frac{\Lambda_n}{n} \ge \gamma\right) = -I(\gamma);$$

2) *для будь-якого* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_0)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} < \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} \le \gamma \right) = -I(\gamma);$$

де $I(\gamma) = \gamma\varepsilon(\gamma) - \varkappa(\varepsilon(\gamma))$, *а* $\varepsilon(\gamma)$ — *єдиний розв'язок рівняння* $\varkappa'(\varepsilon) = \gamma$.

Для доведення теореми достатньо зауважити, що з теореми 1 випливає справедливість умови H з [5] при $\varepsilon_- < 0$, та застосувати лему 1 з [5].

Наступна теорема є теоремою про великі відхилення Λ_n при гіпотезі $\widetilde{H}^n$, коли $n \to \infty$.

Теорема 4. *Нехай* $|\theta| < 1$ *та* $\widetilde{\theta}$ *не залежить від* n. *Тоді виконуються такі твердження:*

1) *якщо* $|\widetilde{\theta}| < 1$, *то для будь-якого* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{\widetilde{\theta}}^n \left(\frac{1}{n}\Lambda_n < \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{\widetilde{\theta}}^n \left(\frac{1}{n}\Lambda_n \le \gamma \right) = -I(\gamma) + \gamma, \tag{26}$$

де $\gamma - I(\gamma) \in (-\infty, \infty)$;

2) *якщо* $|\widetilde{\theta}| \ge 1$, *то для будь-якого* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ *виконується співвідношення* (26), *де* $\gamma - I(\gamma) \in (-\infty, \varkappa(1-))$.

Доведення. Якщо $|\widetilde{\theta}| < 1$, то з теореми 1 випливає справедливість умови H^* з [6] і, отже, твердження 1 дістанемо з висновку 2 [6]. Якщо $|\widetilde{\theta}| \ge 1$, то з теореми 1 випливає, що виконується умова H з [5] при $\varepsilon_- < 0$, $\varepsilon_+ = 1$. Тому твердження 2 дістанемо з теореми 3 [5]. □

Зауваження 1. Якщо $|\theta| < 1$ та $|\widetilde{\theta}| = 1$, то в твердженні 2 теореми 3 маємо $\varkappa(1-) = \varkappa(1) = 0$, і, отже, $\gamma - I(\gamma) \in (-\infty, 0)$. Якщо ж $|\theta| < 1$ та $|\widetilde{\theta}| > 1$, то $\varkappa(1-) < \varkappa(1) = 0$, і, отже $\gamma - I(\gamma) \in (-\infty, \varkappa(1-)) \subset (-\infty, 0)$.

Нехай тепер $\widetilde{\theta} = \theta_n$ залежить від n таким чином, що $\Delta_n = \theta_n - \theta \to 0$ при $n \to \infty$. Виконується така теорема про ймовірності великих відхилень Δ_n при гіпотезі H^n, коли $n \to \infty$.

Теорема 5. *Нехай* $|\theta| < 1$ *і* θ_n *залежить від* n *так, що* $\Delta_n = \theta_n - \theta \to 0$ *та* $n\Delta_n^2 \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тоді мають місце наступні твердження:*

1) *для будь-якого* $\gamma \in (\gamma_0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{\psi_n} > \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{\psi_n} \ge \gamma \right) = -I(\gamma),$$

де

$$\psi_n = n\Delta_n^2, \qquad \gamma_0 = -\big(2(1-\theta^2)\big)^{-1}, \qquad I(\gamma) = \frac{\big(2\gamma(1-\theta^2)+1\big)^2}{8(1-\theta^2)}; \tag{27}$$

2) *для будь-якого* $\gamma \in (-\infty, \gamma_0)$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{\psi_n} < \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{\psi_n} \le \gamma \right) = -I(\gamma).$$

Доведення. З теореми 2 випливає, що виконується умова H з [5] при $\varepsilon_- = -\infty$, $\varepsilon_+ = \infty$, $\varkappa(\varepsilon) = -2^{-1}\varepsilon(1-\varepsilon)(1-\theta^2)^{-1}$. Звідси одержуємо, що $\gamma_- = -\infty$, $\gamma_+ = \infty$, а γ_0 та $I(\gamma)$ задається рівностями (27). Тоді твердження теореми випливають з теореми 1 [5]. □

Наступна теорема є теоремою про великі відхилення Λ_n при гіпотезі $\widetilde{H}^n$, коли $n \to \infty$.

Теорема 6. *Нехай $|\theta| < 1$, а θ_n залежить від n так, що $\Delta_n = \theta_n - \theta \to 0$ та $n\Delta_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Тоді для будь-якого $\gamma \in (-\infty, \gamma_1)$*

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln P_{\theta_n}^n (\psi_n^{-1}\Lambda_n < \gamma) = \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln P_{\theta_n}^n (\psi_n^{-1}\Lambda_n \le \gamma) = -I(\gamma) + \gamma,$$

де $\gamma_1 = (2(1-\theta^2))^{-1}$, а ψ_n і $I(\gamma)$ задані в (27).

Доведення. З теореми 2 випливає, що виконується умова H^* з [6] при $\varepsilon_- = -\infty$, $\varepsilon_+ = \infty$ та $\varkappa(\varepsilon) = -2^{-1}(1-\theta^2)^{-1}\varepsilon(1-\varepsilon)$. Звідси одержуємо, що $\gamma_- = -\infty$, $\gamma_1 = (2(1-\theta^2))^{-1}$, а $I(\gamma)$ задається рівністю з (27). Отже, твердження теореми випливає з висновку 2 [6]. □

5. Швидкість спадання ймовірностей критерію Неймана–Пірсона

Нехай δ_n — критерій Неймана-Пірсона рівня $\alpha_n \in (0,1)$ для розрізнення гіпотез H^n та $\widetilde{H}^n$ за спостереженням ξ^n процесу авторегресії (1), що визначається рівністю (2). Розглянемо взаємозв'язок між швидкостями спадання рівня α_n та ймовірності помилки 2-го роду β_n критерію δ_n при $n \to \infty$.

Теорема 7. *Нехай $|\theta| < 1$ та $\widetilde{\theta}$ не залежить від n і $|\widetilde{\theta}| < 1$. Тоді виконуються такі твердження:*

1) *для будь-якого $a \in (0, \gamma_1)$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = -a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n = -b(a), \tag{28}$$

де $b(a) = a - \gamma(a) \in (0, -\gamma_0)$, а $\gamma(a)$ — єдиний розв'язок рівняння $I(\gamma) = a$ в області $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_1)$;

2) *для будь-якого $a \ge \gamma_1$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = -a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n = 0,$$

і для будь-якого $b \ge -\gamma_0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n = -b \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = 0. \tag{29}$$

Тут γ_0 і γ_1 визначаються рівностями (25), а $I(\gamma)$ визначена у теоремі 3.

Для доведення достатньо зауважити, що з теореми 1 у випадку $|\theta| < 1$ і $|\widetilde{\theta}| < 1$ випливає, що виконується умова H^* з [6], а потім застосувати теорему 2 з [6] (див. також теорему 4 з [5]).

Теорема 8. *Нехай $|\theta| < 1$, $\widetilde{\theta}$ не залежить від n і $|\widetilde{\theta}| \ge 1$. Тоді виконуються наступні твердження:*

1) *для будь-якого $a \in (0, \varkappa'(1-) - \varkappa(1-))$ має місце співвідношення* (28), *де $b(a) \in (-\varkappa(1-), -\varkappa'(0))$;*

2) *для будь-якого $b \ge \varkappa'(0)$ має місце співвідношення* (29).

Для доведення достатньо зауважити, що з теореми 1 при $|\theta| < 1$ та $|\widetilde{\theta}| \ge 1$ випливає виконання умови H з [5] при $\varepsilon_- < 0$ та $\varepsilon_+ = 1$, а потім застосувати теорему 6 з [5].

Зауваження 2. Якщо $|\theta| < 1$ і $|\widetilde{\theta}| = 1$, то з теореми 1 випливає, що $\varepsilon_+ = 1$, $\varkappa(1-) = \varkappa(1) = 0$ і $\varkappa'(1-) = \gamma_+ = \infty$. Тоді у твердженні 1 теореми 8 маємо, що $a \in (0, \infty)$ і $b(a) \in (0, -\varkappa'(0))$. Якщо $|\theta| < 1$ і $|\widetilde{\theta}| > 1$, то знову з теореми 1 випливає, що $\varepsilon_+ = 1$, $\varkappa(1-) < \varkappa(1) = 0$ і $\varkappa'(1-) = \gamma_+ < \infty$. Тоді у твердженні 1 теореми 8 маємо, що $a \in (0, \varkappa'(1-) - \varkappa(1-))$ та $b(a) \in (-\varkappa(1-), -\varkappa'(0))$.

Теорема 9. *Нехай* $|\theta| < 1$ *та* θ_n *залежить від* n *так, що* $\Delta_n = \theta_n - \theta \to \infty$ *і* $n\Delta_n^2 \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тоді виконуються наступні твердження:*

1) *для будь-якого* $a \in (0, \gamma_1)$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln \alpha_n = -a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln \beta_n = -b(a),$$

де

$$\psi_n = n\Delta_n^2, \qquad \gamma_1 = \bigl(2(1-\theta^2)\bigr)^{-1}, \qquad b(a) = \bigl(\sqrt{2a} - 1/\sqrt{2(1-\theta^2)}\bigr)^2;$$

2) *для будь-якого* $a \ge \gamma_1$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln \alpha_n = -a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln \beta_n = 0,$$

та при $b \ge -\gamma_0 = \bigl(2(1-\theta^2)\bigr)^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln \beta_n = -b \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln \alpha_n = 0.$$

Доведення. З теореми 2 випливає виконання умови H з [5] при $\varepsilon_- = -\infty$, $\varepsilon_+ = \infty$, $\varkappa(\varepsilon) = -2^{-1}(1-\theta^2)^{-1}\varepsilon(1-\varepsilon)$. Враховуючи вигляд функції $I(\gamma)$ в (27), знаходимо, що розв'язок рівняння $I(\gamma)$ при $\gamma > \gamma_0$ має вигляд

$$\gamma(a) = \left(\frac{2a}{1-\theta^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2(1-\theta^2)},$$

звідси випливає шуканий вигляд $b(a)$. Таким чином, твердження теореми випливають з теореми 4 [5]. □

Приклад. Нехай $|\theta| < 1$ і $1 - \theta\widetilde{\theta} = 0$. Тоді з теореми 1 випливає, що існує границя (16), $\varepsilon_- = -\theta^2/(1-\theta^2)$, $\varepsilon_+ = 1$, а функція $\varkappa(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (\varepsilon_-, 1)$ має вигляд

$$\varkappa(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{b^2(\varepsilon)\bigl((\widetilde{\theta}+\theta)^2 - 4\bigr)} - b(\varepsilon)(\widetilde{\theta}-\theta)}{2},$$

$\varkappa(1) = 0$ і $\varkappa(\varepsilon) = \infty$ при $\varepsilon \notin (\varepsilon_-, 1]$. Неважко показати, що $\varkappa'(\varepsilon) = (\widetilde{\theta} - \theta)(2b(\varepsilon))^{-1}$, звідси випливає, що $\gamma_- = -\infty$, $\gamma_0 = -(1-\theta^2)(2\theta^2)^{-1}$, $\gamma_+ = -2^{-1}(1-\theta^2)$ і $I(\gamma) = f(z(\gamma))$, де $f(z) = 2^{-1}(z - 1 - \ln z)$, $z(\gamma) = -2\theta^2(1-\theta^2)^{-1}\gamma$. Зауважимо, що $z(\gamma) \in (\theta^2, 1)$ при $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$. Крім того, $I(\gamma_+) = \varkappa'(1-) - \gamma(1-) = f(z(\gamma_+)) = f(\theta^2)$. Позначимо z_a розв'язок рівняння $f(z) = a$ при $a \in (0, f(\theta^2))$ в області $z \in (\theta^2, 1)$. Тоді розв'язок рівняння $I(\gamma) = a$ при $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$ має вигляд $\gamma(a) = -2^{-1}\theta^{-2}(1-\theta\theta)z_a$ і, отже, у твердженні 1 теореми 8 маємо $b(a) = a + 2^{-1}\theta^{-2}(1-\theta\theta)z_a$.

Література

1. Ю. Н. Линьков, *Асимптотические методы статистики случайных процессов*, "Наукова думка", Киев, 1993.
2. ———, *Асимптотическое различение процессов авторегрессии*, Україн. матем. журнал **48** (1996), № 5, 620–626.
3. А. П. Мишина, И. В. Проскуряков, *Высшая алгебра*, "Физматгиз", Москва, 1962.
4. Ю. Н. Линьков, М. И. Медведева, *Теоремы о больших уклонениях в задаче различения процессов нормальной авторегрессии*, Теория случайных процессов **1(17)** (1995), № 1, 71–81.
5. ———, *Граничні теореми про великі відхилення для логарифма відношення правдоподібності*, Теор. ймовірност. та матем. статист. **53** (1995), 87–96.

6. ———, *Теоремы о больших уклонениях в задаче проверки двух простых гипотез*, Україн. матем. журнал **47** (1995), № 2, 227–235.

340114, ДОНЕЦЬК, ВУЛ. Р. ЛЮКСЕМБУРГ, 74, ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ

Надійшла 20.06.94