УСЕРЕДНЕННЯ ТА ДИФУЗІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ РЕКУРЕНТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ СХЕМИ УРНИ

УДК 519.21

О. І. ЛЯШЕНКО

РЕЗЮМЕ. Розглядається рекурентна послідовність схеми урни з кулями $N+1$ ($N \geq 1$) кольорів, коли в кожний дискретний момент часу в урну додається лише одна куля. Отримано достатні умови збіжності системи рекурентних послідовностей для усередненної траєкторії X_{nk} та дифузійної складової Y_{nk} до розв'язків відповідно детермінованого та стохастичного диференціальних рівнянь.

Наводиться приклад ($N = 1$, $q_{nk} = \mathrm{const}$).

Для дослідження еволюційних біологічних, економічних процесів зручною є модель урни з кулями кількох кольорів. Для цієї схеми характерна багатогранність граничного стану концентрацій куль, який залежить як від властивостей детермінованих функцій, що задають зміну концентрацій в середньому за один крок, так і від початкових кількостей куль в урні. Крім цього, вказаній схемі урни притаманна природна стохастичність, що визначається правилом додавання куль в залежності від часу та поточних концентрацій. Ця схема досліджувалась в роботах В. Б. Артура, Ю. М. Єрмольєва, Ю. М. Каніовського [2, 4] на предмет одержання умов збіжності до деяких конструктивно побудованих множин граничних значень, а також випадковості такої збіжності. В цій статті для дослідження схеми урни застосовується метод асимптотичного аналізу рекурентних процесів, запропонований В. В. Анісімовим [1]. На основі принципу усереднення та дифузійної апроксимації дослідження рекурентних послідовностей схеми урни зводиться до дослідження відповідних детермінованих та стохастичних диференціальних рівнянь, теорія яких розвинута в роботах І. І. Гіхмана, А. В. Скорохода [3].

Нехай маємо урну нескінченного об'єму, яка може містити кулі $N+1$ кольорів. В кожний момент часу $k = 0, 1, 2, \ldots$ в урну додається одна куля одного з $N+1$ можливих кольорів. Вектор

$$\xi_{nk} = (\xi_{nk}^1, \xi_{nk}^2, \ldots, \xi_{nk}^N)$$

описує пропорції (концентрації) куль кольорів від 1 до N в момент часу k (після того, як k куль уже додані в урну). В початковий момент в урні знаходиться $\gamma_n \geq 1$ куль.

Нехай

$$q_{nk}(x) = \left(q_{nk}^1(x), q_{nk}^2(x), \ldots, q_{nk}^N(x)\right), \qquad k \geq 0$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F05, 60G60; Secondary 62F17.

— послідовність вектор-функцій (функцій урни), кожна з яких пропорції x куль в урні ставить у відповідність ймовірність додавання кулі кожного з кольорів $1, 2, \ldots, N$ в момент часу k. Таким чином, починаючи з заданого початкового вектора концентрації куль ξ_{n0}, в урну в кожний момент часу $k = 0, 1, 2, \ldots$ додається одна куля, яка з ймовірністю $q^i_{nk}(\xi_{nk}) > 0$ буде кольору i, де $\sum_{i=1}^N q^i_{nk}(\xi_{nk}) < 1$.

Впровадимо сукупність незалежних випадкових величин

$$\beta_{nk}(x) = \big(\beta^1_{nk}(x), \beta^2_{nk}(x), \ldots, \beta^N_{nk}(x)\big), \qquad k \geq 0,$$

де

$$x \in S^n = \left\{x: x = (x^1, x^2, \ldots, x^N), x^i \geq 0, \sum_{i=1}^N x^i \leq 1\right\},$$

$$\beta_{nk}(x) = \begin{cases} \bar{e}^i & \text{з ймовірністю } q^i_{nk}(x) > 0, \\ \bar{0} & \text{з ймовірністю } 1 - \sum_{i=1}^N q^i_{nk}(x) > 0, \end{cases}$$

$\bar{e}^i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $\bar{0}$ — нульовий вектор, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Нехай

$$\Gamma_{nk} = (\Gamma^1_{nk}, \Gamma^2_{nk}, \ldots, \Gamma^N_{nk})$$

— вектор, що показує кількість куль в урні кожного з кольорів $1, 2, \ldots, N$ в момент k.

Додавання в урну куль i-го кольору підкоряється динаміці

$$\Gamma_{nk+1} = \Gamma_{nk} + \beta_{nk}(\xi_{nk}), \qquad k \geq 0,$$

а еволюція пропорцій

$$\xi_{nk} = \frac{\Gamma_{nk}}{\gamma_n + k}, \qquad k \geq 0$$

($\gamma_n + k$ — загальна кількість куль в урні в момент k)

$$\xi_{nk+1} = \xi_{nk} + \frac{1}{\gamma_n + k + 1}\big(\beta_{nk}(\xi_{nk}) - \xi_{nk}\big), \qquad k \geq 0. \tag{1}$$

Послідовність ξ_{nk}, $k \geq 0$ із значеннями в одиничному симплексі S^n породжує монотонний потік σ-алгебр F_{nk} ($F_{nk} \subset F_{nk+1}$), таких, що величини ξ_{nk} — F_{nk}-вимірні (ξ_{n0} задане), а $\beta_{nk}(\xi_{nk})$ — F_{nk+1}-вимірні випадкові величини.

Рекурентне співвідношення (1) перепишемо у вигляді

$$\xi_{nk+1} = \xi_{nk} + \frac{q_{nk}(\xi_{nk}) - \xi_{nk}}{(\gamma_n + k + 1)/n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{\beta_{nk}(\xi_{nk}) - q_{nk}(\xi_{nk})}{(\gamma_n + k + 1)/n} \cdot \frac{1}{n}, \qquad k \geq 0. \tag{2}$$

Останнє приведемо до вигляду

$$\xi_{nk+1} = \xi_{nk} + a_{nk}(\xi_{nk}) \cdot \frac{1}{n} + b_{nk}(\xi_{nk})\psi_{nk}, \qquad k \geq 0. \tag{3}$$

де $a_{nk}(x)$ — векторно-, $b_{nk}(x)$ — матрично-значні F_{nk}-вимірні функції, ψ_{nk} — F_{nk+1}-вимірні функції такі, що

$$\mathbf{M}(\psi_{nk}/F_{nk}) = 0, \qquad \mathbf{M}(\psi_{nk}\psi^*_{nk}/F_{nk}) = \frac{J}{n}, \tag{4}$$

J — одинична діагональна матриця.

Для подання (2) у вигляді (3), (4) вектор ψ_{nk} відшукаємо у вигляді

$$\psi_{nk} = B_{nk}\big(\beta_{nk}(\xi_{nk}) - q_{nk}(\xi_{nk})\big),$$

де B_{nk} — додатно-визначена симетрична матриця.

Маємо

$$\mathbf{M}\left(\left(\beta_{nk}(\xi_{nk})-q_{nk}(\xi_{nk})\right)\left(\beta_{nk}(\xi_{nk})-q_{nk}(\xi_{nk})\right)^*/F_{nk}\right)$$
$$=[q_{nk}(\xi_{nk})]-q_{nk}(\xi_{nk})q^*_{nk}(\xi_{nk})=A^2_{nk}(\xi_{nk}),$$

де

$$[q_{nk}(\xi_{nk})]=[q^1_{nk}(\xi_{nk}),q^2_{nk}(\xi_{nk}),\ldots,q^N_{nk}(\xi_{nk})]$$

— діагональна матриця.

Можна показати, що власні значення симетричної матриці $A^2_{nk}(\xi_{nk})$ визначаються як корені характеристичного рівняння

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{(q^i_{nk}(\xi_{nk}))^2}{\lambda-q^i_{nk}(\xi_{nk})}+1=0$$

і за умов $q^i_{nk}(\xi_{nk})>0$, $i=1,2,\ldots,N$, $\sum_{i=1}^{N}q^i_{nk}(\xi_{nk})<1$ лежать у проміжку $0<\lambda<1$.

Отже, матриця $A^2_{nk}(\xi_{nk})$ — додатно-визначена і для неї існує додатний корінь — симетрична додатно-визначена матриця

$$A_{nk}(\xi_{nk})=\sqrt{[q_{nk}(\xi_{nk})]-q_{nk}(\xi_{nk})q^*_{nk}(\xi_{nk})},\tag{5}$$

а також обмежена матриця $A^{-1}_{nk}(\xi_{nk})$, яка також симетрична і додатно-визначена.

З урахуванням сказаного шуканий вектор ψ_{nk}, що має властивості (4), набуває вигляду

$$\psi_{nk}=\frac{1}{\sqrt{n}}A^{-1}_{nk}(\xi_{nk})\left(\beta_{nk}(\xi_{nk})-q_{nk}(\xi_{nk})\right).\tag{6}$$

Отже, шукане рекурентне співвідношення (3) має вигляд

$$\xi_{nk+1}=\xi_{nk}+\frac{q_{nk}(\xi_{nk})-\xi_{nk}}{(\gamma_n+k+1)/n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{[q_{nk}(\xi_{nk})]-q_{nk}(\xi_{nk})q^*_{nk}(\xi_{nk})}}{(\gamma_n+k+1)/n}\cdot\frac{\psi_{nk}}{\sqrt{n}}.\tag{7}$$

Впровадимо детерміновану послідовність x_{nk}, $k\ge 0$, що визначається рекурентним співвідношенням

$$x_{nk+1}=x_{nk}+\frac{q_{nk}(x_{nk})-x_{nk}}{(\gamma_n+k+1)/n}\cdot\frac{1}{n},\qquad k\ge 0,\quad x_{n0}=\xi_{n0},$$

і стохастичну послідовність

$$y_{nk}=\sqrt{n}(\xi_{nk}-x_{nk}),\qquad k\ge 0,\quad y_{n0}=0.$$

Щоб одержати рекурентне співвідношення для y_{nk}, $k\ge 0$, досить зробити формальну заміну

$$\xi_{nk}=x_{nk}+y_{nk}/\sqrt{n},\qquad k\ge 0,\tag{8}$$

де $x_{n0}=\xi_{n0}$ $y_{n0}=0$.

Після підстановки (8) в (7) і відокремлення змінних для x_{nk} та y_{nk} одержимо систему рекурентних співвідношень

$$x_{nk+1}=x_{nk}+a_{nk}(x_{nk})\frac{1}{n},\qquad k\ge 0,\quad x_{n0}=\xi_{n0},\tag{9}$$

$$y_{nk+1}=y_{nk}+r_{nk}(x_{nk},y_{nk})\frac{1}{n}+\sigma_{nk}(x_{nk},y_{nk})\psi_{nk},\qquad k\ge 0,\quad y_{n0}=0,\tag{10}$$

де

$$a_{nk}(x) = \frac{q_{nk}(x) - x}{(\gamma_n + k + 1)/n}, \qquad r_{nk}(x, y) = \frac{\sqrt{n}(q_{nk}(x + y/\sqrt{n}) - q_{nk}(x)) - y}{(\gamma_n + k + 1)/n}, \quad (11)$$

$$\sigma_{nk}(x, y) = \frac{\sqrt{[q_{nk}(x + y/\sqrt{n})] - q_{nk}(x + y/\sqrt{n}) q^*_{nk} q^*_{nk}(x + y/\sqrt{n})}}{(\gamma_n + k + 1)/n}. \quad (12)$$

Застосуємо до рекурентних співвідношень (11) та (12) відповідно принцип усереднення та дифузійну апроксимацію.

Дослідимо спочатку асимптотичну поведінку розв'язку x_{nk} при $n \to \infty$. Нехай для простоти функції $q_{nk}(x)$ мають вигляд

$$q_{nk}(x) = q\left(\frac{k}{n}, x\right). \quad (13)$$

Дослідимо умови зближення при $n \to \infty$ послідовності x_{nk} з траєкторією розв'язку диференціального рівняння (задачі Коші)

$$dx(t) = \frac{q(t, x(t)) - x(t)}{t_0 + t}\, dt, \qquad x(0) = x_0, \quad (14)$$

де $t_0 > 0$, а $q(t, x(t))$ — неперервний аналог дискретної функції (13).

Теорема 1. *Нехай* $\lim_{n\to\infty} \gamma_n/n = t_0 > 0$, $\lim_{n\to\infty} x_{n0} = x_0$, *функція* $q(t, x(t))$ *рівномірно щодо* x, *які належать одиночному симплексу* S^n, *неперервна щодо* $t \in [0, T]$, *а також для всіх* $t \le T$, $x_1, x_2 \in S^n$ *виконується умова Ліпшиця*

$$|q(t, x_1) - q(t, x_2)| \le C|x_1 - x_2|. \quad (15)$$

Тоді при $n \to \infty$

$$\max_{k \le nT} \left| x_{nk} - x\left(\frac{k}{n}\right) \right| \to 0, \quad (16)$$

де $x(t)$ *— розв'язок задачі Коші* (14).

Доведення (*за аналогією з теоремою* 3.2 [1, с. 89–90]. З умови (15) при $x_1, x_2 \in S^n$, $t \in [0, T]$ випливає умова Ліпшиця для функції

$$\frac{q(t, x) - x}{t_0 - t},$$

а також її лінійна обмеженість.

Ці умови забезпечують існування та єдиність розв'язку задачі Коші (14).

З (14) отримуємо

$$x\left(\frac{k+1}{n}\right) = x\left(\frac{k}{n}\right) + a\left(\frac{k}{n}, x\left(\frac{k}{n}\right)\right)\frac{1}{n} + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(a(t, x(t)) - a\left(\frac{k}{n}, \left(\frac{k}{n}\right)\right)\right) dt. \quad (17)$$

Враховуючи рівномірну неперервність щодо t функції $a(t, x(t))$ і зіставляючи рекурентні послідовності (11) і (17), у відповідності з теоремою 3.1 ([1], с. 88–89) одержуємо (16).

Теорему доведено $\square$

Зауваження 1. За взірцем теореми 3.3 ([1], с. 91–94), можна розглядати загальнішу ситуацію, коли коефіцієнти $q_{nk}(x)$ в (11) поводяться в спосіб нерегулярний, але усереднюються за часом. Для цього достатньо, щоб виконувались умови обмеженості

$$|q_{nk}(x)| < C_1 + \alpha_{nk}, \qquad \max_{k \le nT} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ni} \right|, \qquad n \to 0,$$

а також щоб існувала неперервна функція $d(t, x(t))$, така, що

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[nt]} a_{nk}(x) \to \int_0^t a(u, x(u))\, du.$$

При цьому також буде виконуватись (16).

Дослідимо тепер асимптотичну поведінку розв'язку y_{nk} при $n \to \infty$. Нехай $r_{nk}(x, y)$ і $\sigma_{nk}(x, y)$ — невипадкові функції. Впровадимо ступінчасті функції $y_n(t) = y_{nk}$, $q_n(t, x) = q_{nk}(x)$ при $k/n \le t < (k+1)/n$. Покладемо

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{[nt]} \psi_{nk}, \qquad t \ge 0. \tag{18}$$

Теорема 2. *Нехай $t_0 > 0$, виконуються всі умови теореми* 1 *і умова Ліпшиця для $q(k/n, x)$ при $x \in S^n$. Крім цього, $q(t, x(t))$ є неперервно диференційовною по x при $x \in S^n$, $t \in [0, T]$.*

Тоді послідовність процесів y_n U-збігається у просторі $\mathcal{D}^N_{[0,T]}$ (у рівномірній топології) до процесу $y(t)$, що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$\begin{aligned} dy(t) = {} & \frac{1}{t_0 - t}[q_x(t, x(t)) - J] y(t)\, dt \\ & + \frac{\left([q_x(t, x(t))] - q(t, x(t)) q^*(t, x(t))\right)^{1/2}}{t_0 - t}\, dw(t), \end{aligned} \tag{19}$$

$y(0) = 0$, $q_x(t, x(t))$ — похідна, $x(t)$ — розв'язок задачі Коші (14), *$w(t)$ — стандартний вінерів процес в R^n при $t \in [0, T]$.*

Доведення. Теорему 2 доводимо в три етапи. Спочатку доведемо, що

$$\max_{k \le nT} |\xi_{nk} - x_{nk}| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{20}$$

Потім доведемо слабку збіжність випадкового процесу $\psi_n(t)$ до стандартного вінеріва процесу $w(t)$. Нарешті, перевіривши всі шість умов теореми 3.5 ([1], с. 97–98), одержимо доведення теореми 2.

1. Розглянемо з (2) випадкові величини

$$\delta_{nk} = \frac{\beta_{ni}(\xi_{ni}) - q_{ni}(\xi_{ni})}{(\gamma_n + i + 1)/n}, \qquad \eta_{nk} = \sum_{i=0}^{k} \delta_{nk} \frac{1}{n}, \qquad k \le nT.$$

Оскільки δ_{ni}, $i \ge 0$ — випадкові величини, такі що

$$\mathbf{M}(\delta_{ni}/F_{ni}) = 0, \qquad \mathbf{D}(\delta_{ni}/F_{ni}) < \infty,$$

$$\mathbf{M}(\eta_{nk}/F_{nk}) = 0, \qquad \mathbf{D}(\eta_{nk}/F_{nk}) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{D}(\delta_{ni}/F_{nk}) \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

то

$$\max_{k\le nT}|\eta_{nk}| \xrightarrow{P} 0.$$

Тоді на підставі результатів монографії [3] одержуємо (20) (відповідний результат для схеми урни одержано в [5]).

2. Щоб довести слабку збіжність випадкового процесу $\psi_n(t)$ до стандартного вінерівa процесу $w(t)$, досить з урахуванням (4) перевірити, що виконується умова Ліндеберга

$$L_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\int_{|x|>\tau}x^2\,dF\psi_{nk}(x) \quad \text{при } \tau>0, \quad n\to\infty.$$

3. Перевіримо тепер виконання умов теореми 3.5 ([1], с. 97–98).

Перша умова — умова Ліпшиця для функцій $r_{nk}(x,y)$ та $\sigma_{nk}(x,y)$ щодо $y\in \boldsymbol{R}^n$, $k\le nT$ є очевидною.

Друга умова — обмеженість функцій $r_{nk}(x,y)$ та $\sigma_{nk}(x,y)$ при $|y|\le L$ — також очевидна.

Третя умова — слабка збіжність скінченномірних розподілів процесу $\psi_n(t)$, $t\in[0,T]$, до розподілів стандартного вінерова процесу $w(t)$, $t\in[0,T]$, — виконується побудовою процесу $\psi_n(t)$.

Четверта умова — неперервність по t функцій

$$r(t,x(t),y(t))=\frac{1}{t_0+t}[q_x(t,x(t))-J]y(t),$$

$$\sigma(t,x(t),y(t))=\frac{1}{t_0+t}\sqrt{[q_x(t,x(t))]-q(t,x(t))q^*(t,x(t))},$$

лінійна обмеженість їх по y, а також умова Ліпшиця по y в області $y\in\boldsymbol{R}^n$ випливають з неперервної диференційовності функцій $q(t,x(t))$ по x в замкненій області $x\in S^n$, лінійної обмеженості по y функції $r(t,x(t),y(t))$ та незалежності функції $\sigma(t,x(t),y(t))$ від y.

П'ята умова — U-збіжність функцій $r_n(t,x(t),y(t))$ і $\sigma_n(t,x(t),y(t))$ до $r(t,x(t),y(t))$ і $\sigma(t,x(t),y(t))$ для $y\in\boldsymbol{R}^n$ випливає із рівномірної збіжності $q_n(t,x(t))$ до $q(t,x(t))$.

Шоста умова — слабка збіжність y_{n0} до y_0 — виконується автоматично.

Теорему доведено. □

Згідно з доведеними теоремами 1 та 2 приходимо до висновку, що для випадку $t_0>0$ послідовність концентрацій куль ξ_{nk} схеми урни з кулями $N+1$ кольорів при $n\to\infty$ має асимптотичне представлення

$$\xi_{nk}\approx x\left(\frac{k}{n}\right)+y\left(\frac{k}{n}\right)/\sqrt{n},$$

де $x(t)$ — усереднена траєкторія, що визначається як розв'язок диференціального рівняння (14), а $y(t)$ — дифузійна складова, що визначається як розв'язок стохастичного диференціального рівняння (19) і має коефіцієнт зносу

$$R(t,x(t),y(t))=\frac{[q_x(t,x(t))-J]y(t)}{t_0+t} \tag{21}$$

та коефіцієнт дифузії

$$\mathcal{D}(t,x(t),y(t))=\frac{\sqrt{[q_x(t,x(t))]-q(t,x(t))q^*(t,x(t))}}{t_0+t}. \tag{22}$$

Приклад. Розглянемо випадок $N = 1$, $0 < q_{nk}(x) = q = \text{const} < 1$. Для відповідного рекурентного співвідношення

$$\xi_{nk+1} = \xi_{nk} + \frac{q - \xi_{nk}}{\gamma_n + k + 1} + \frac{\beta(\xi_{nk}) - q}{\gamma_n + k + 1}, \qquad k \geq 0, \quad \xi_{n0} = \xi_0$$

маємо дві асимптотичні задачі

$$(t + 0 - t)\, dx(t) = (q - x(t))\, dt, \qquad x(0) = x_0,$$
$$(t + 0 - t)\, dy(t) = -y(t)\, dt + \sqrt{q - q^2}\, dw(t), \qquad y(0) = 0.$$

Розв'язками вказаних задач є

$$x(t) = \frac{t_0}{t_0 + t} x_0 + \frac{t}{t_0 + t} q,$$
$$y(t) = \frac{\sqrt{q - q^2}}{t_0 + t} w(t),$$

де $w(t)$ — стандартний вінерів процес, $w(0) = 0$.

Отже, при великих n маємо асимптотичне представлення

$$\xi_{nk} = \frac{\gamma_n}{\gamma_n + k} \xi_0 + \frac{k}{\gamma_n + k} q + \frac{\sqrt{q - q^2}}{(\gamma_n + k)/n} \frac{w(k/n)}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Зауваження 2. Диференціальні рівняння (14) та (19) можна записати також у вигляді

$$d((t_0 + t)x(t)) = q(t, x(t))\, dt, \qquad x(0) = x_0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} d((t_0 + t)y(t)) &= q_x(t, x(t))y(t)\, dt \\ &\quad + \sqrt{[q(t, x(t))] - q(t, x(t))q^*(t, x(t))}\, dw(t), \qquad y(0) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Література

1. В. В. Анисимов, Е. А. Лебедев, *Стохастические сети обслуживания. Марковские модели*, "Либідь", Київ, 1992.
2. В. Б. Артур, Ю. М. Ермольев, Ю. М. Каниовский, *Обобщенная задача об урне и ее применения*, Кибернетика **1** (1983), 49–56.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, "Наукова думка", Київ, 1982.
4. Ю. М. Каниовский, *Исследование обощенной задачи об уровне методами стохастической аппроксимации*, Препринт АН УССР, (1982), Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 82–94.
5. Е. И. Ляшенко, *Принцип усреднения для одной рекуррентной последовательности обобщенной схемы урны*, Тезисы докл. Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости схем" **87**, Общество "Знание" Украины, Киев.

252022, КИЇВ, ВУЛ. ВАСИЛЬКІВСЬКА, 90, ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

Надійшла 28.09.94