Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 109–115

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 109–115

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ НЕЗАЛЕЖНИХ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ПРОСТОРАХ ℓ_p, $1 \le p < \infty$

УДК 519.21

І. К. МАЦАК

РЕЗЮМЕ. Добре відомі результат про слабку збіжність максимуму дійсних незалежних гауссових випадкових величин узагальнюється на випадкові величини із значеннями у просторі ℓ_p, $1 \le p < \infty$.

1. Вступ

Нехай (γ_n) послідовність гауссових незалежних випадкових величин (н.в.в.),

$$\mathbf{M}\,\gamma_n = 0, \qquad \mathbf{M}\,\gamma_n^2 = 1,$$
$$a_n = (2\ln(n))^{1/2} - (2\ln(n))^{-1/2}(\ln\ln(n) + \ln(4\pi))/2,$$
$$b_n = (2\ln(n))^{1/2}.$$

Добре відомий наступний класичний результат [1], [2]:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(b_n\Big(\max_{1\le k\le n}\gamma_k - a_n\Big) < x\Big) = \exp(-e^{-x}). \tag{1}$$

Максимум двох елементів може бути визначений і для деяких загальних банахових просторів. Тому природно ставити задачу узагальнення асимптотичної рівності (1) на нескінченновимірний випадок.

Мета даної роботи — дати аналог рівності (1) для гауссових незалежних випадкових елементів (н.в.е.) із значеннями у просторі ℓ_p, $1 \le p < \infty$.

Нехай E — сепарабельний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, Y — випадковий елемент в E [3]. Через P_y позначатимемо розподіл ймовірностей випадкового елемента Y в E. Кажуть, що послідовність (Y_n) випадкових елементів в E збігається до випадкового елемента Y (і позначають $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$), якщо послідовність розподілів (P_{y_n}) слабко збігається до розподілу P_y, тобто якщо для будь-якої обмеженої неперервної функції $f\colon E \to \boldsymbol{R}^1$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(x)P_{y_n}(dx) = \int_E f(x)P_y(dx) \tag{2}$$

(див. [3]). Достатню умову виконання рівності (2) дає наступна

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60B12.

Лема 1. *Нехай E — банахів простір з базисом (e_i),*

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ni} e_i, \qquad n \ge 1,$$

такі, що

(i) *для будь-яких цілих m, $i_1, i_2, \ldots, i_m$ послідовність векторів $\overline{\xi}_n = (\xi_{ni_1}, \xi_{ni_2}, \ldots, \xi_{ni_m})$ збігається за розподілом до вектора $\overline{\xi} = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_m})$ у просторі $\boldsymbol{R}^m$;*

(ii) *для будь-якого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\ge 1} \mathsf{P}\left(\left\| \sum_{i=m}^{\infty} \xi_{ni} e_i \right\| > \varepsilon \right) = 0.$$

Тоді $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ (див. [3], *с.* 182–185).

Розглянемо $E = \ell_p$, $1 \le p < \infty$, банахів простір абсолютно сумовних у степені p послідовностей, (e_i) — стандартний базис простору ℓ_p,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

норма в ℓ_p елемента $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$.

Для довільних елементів $x, y \in l_p$,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i,$$

природним чином впроваджується верхня межа $\max(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \max(x_i, y_i) e_i$. Коли X та Y випадкові елементи в l_p, то звичайно $Z = \max(X,Y)$ буде борелевим випадковим елементом в l_p ([3], с. 80).

Далі через X будемо позначати гауссів в.е. в l_p, $X = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \sigma_i e_i$, η_i — гауссові в.в. в $\boldsymbol{R}^1$, $\mathbf{M}\,\eta_i = 0$, $\mathbf{M}\,\eta_i^2 = 1$, $\sigma_i \ge 0$, $i \ge 1$.

Звичайно буде збігатися ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^p$ і можна розглядати елемент $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i$.

Припускатимемо, що виконується наступна умова: для будь-яких $i \ne j$

$$\mathbf{M}\,\eta_i \eta_j = 0, \tag{3}$$

тобто η_i, $i \ge 1$, — це незалежні випадкові величини. Нехай $X_1, X_2, \ldots$ незалежні копії в.е. X, $X_n = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{ni} \sigma_i e_i$, $n \ge 1$, а $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ незалежні копії в.в. ζ, такої, що

$$\mathsf{P}(\zeta < x) = \exp(-e^{-x}).$$

Покладемо

$$\begin{gathered} Z_n(\sigma) = \max_{1\le k\le n} X_k = \sum_{i=1}^{\infty} z_{ni} \sigma_i e_i, \\ z_{ni} = \max_{1\le k\le n} \eta_{ki}, \\ Z(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \sigma_i e_i. \end{gathered} \tag{4}$$

Основний результат роботи містить наступна теорема

Теорема. *Ряд* (4) *збігається майже напевно* (*м.н.*) *в* ℓ_p *і при виконанні умови* (3)

$$b_n(Z_n(\sigma) - \sigma a_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z(\sigma) \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

2. Допоміжні леми

Лема 2. *Виконуються нерівності:*
для $x \geq 0$

$$1 - \exp(-e^{-x}) \leq (e-1)e^{-x}, \tag{6}$$

$$\exp(-e^{x}) \leq e^{-x}, \tag{7}$$

для $0 \leq x \leq n$

$$1 - (1 - x/n)^n \leq x, \tag{8}$$

$$(1 - x/n)^n \leq e^{-x}. \tag{9}$$

Для доведення леми 2 скористаємося нерівністю із [4]:

$$y^{\alpha} - \alpha y + \alpha - 1 \geq 0, \tag{10}$$

для $y \geq 0$, $\alpha \leq 0$ або $\alpha \geq 1$. Покладемо в (10) $y = e$, $\alpha = -e^{-x}$. Тоді маємо (6). Якщо в (10) покладемо $y = 1 - x/n$, $\alpha = n$, то одержимо оцінку (8). Нерівність (7) перевіряється елементарно. Оцінку (9) будемо мати із добре відомої нерівності $e^{-y} \geq 1 - y$ (див. [2], с. 50).

Лема 3. *Для будь-якого* $1 \leq p < \infty$

$$\mathbf{M}\,|\zeta|^p = C_p < \infty. \tag{11}$$

Доведення леми 3 випливає із оцінок (6), (7) леми 2. Дійсно, для $x > 0$

$$\mathsf{P}(|\zeta| > x) = 1 - \exp(-e^{-x}) + \exp(-e^{x}) \leq e^{-x+1}.$$

Остання нерівність достатня для виконання співвідношення (11).

Лема 4. *Нехай* $z_n = \max_{1 \leq k \leq n} \gamma_k$. *Тоді існують абсолютні константи* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, *такі, що для довільних* $n \geq 2$, $x > 0$

$$\mathsf{P}(b_n|z_n - a_n| > x) \leq C_1 \exp(-C_2 x). \tag{12}$$

Доведення леми 4. Позначимо

$$\begin{aligned} P_x^+ &= \mathsf{P}(b_n(z_n - a_n) > x), \\ P_x^- &= \mathsf{P}(b_n(z_n - a_n) < -x), \end{aligned} \qquad x > 0.$$

Маємо

$$\mathsf{P}(b_n|z_n - a_n| > x) = P_x^+ + P_x^-. \tag{13}$$

Оцінимо зверху величину P_x^+. Нехай

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy,$$

$$\varphi(y) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$$

— функція та щільність стандартного нормального розподілу, $u_n(x) = xb_n^{-1} + a_n$. Тоді

$$P_x^+ = \mathsf{P}(z_n > u_n(x)) = 1 - (1 - \tau_n(x)/n)^n,$$
$$\tau_n(x) = n\big(1 - \Phi(u_n(x))\big).$$

Звідси та з оцінки (8) леми 2 маємо

$$P_x^+ \le \tau_n(x). \tag{14}$$

Далі, використовуючи відомі оцінки для нормального розподілу

$$(\varphi(x)/x)(1 - x^{-2}) \le 1 - \Phi(x) \le \varphi(x)/x, \qquad x > 0, \tag{15}$$

одержуємо

$$\begin{aligned}\tau_n(x) &= n\big(1 - \Phi(u_n(x))\big) \le n\varphi(u_n(x))/u_n(x)\\ &= (2\pi)^{-1/2} nb_n(x + a_nb_n)^{-1}\exp(-u_n^2(x)/2) \le (2\pi)^{-1/2} na_n^{-1}\exp(-u_n^2(x)/2).\end{aligned} \tag{16}$$

Неважко обчислити, що

$$\begin{aligned}u_n^2(x)/2 &= x^2(4\ln(n))^{-1} + x - x\big(\ln\ln(n) + \ln(4\pi)\big)(4\ln(n))^{-1} + \ln(n)\\ &+ \big(\ln\ln(n) + \ln(4\pi)\big)^2(16\ln(n))^{-1} - \big(\ln\ln(n) + \ln(4\pi)\big)/2.\end{aligned} \tag{17}$$

Тоді для $n \ge \exp(e^2)$

$$\big(\ln\ln(n) + \ln(4\pi)\big)(4\ln(n))^{-1} \le 1/4 \tag{18}$$

і

$$u_n^2(x)/2 \ge 3x/4 + \ln(n) - \big(\ln\ln(n) + \ln(4\pi)\big)/2. \tag{19}$$

З (16), (19) при $n \ge \exp(e^2)$ маємо

$$\begin{aligned}\tau_n(x) &\le n\big((2\pi)^{-1/2}a_n\big)^{-1}\exp(-3x/4 - \ln(n) + (\ln\ln(n) + \ln(4\pi))/2)\\ &\le b_na_n^{-1}\exp(-3x/4).\end{aligned}$$

З останньої нерівності та (14) випливає існування абсолютної константи $C > 0$ такої, що для всіх $n \ge \exp(e^2)$

$$P_x^+ \le C\exp(-3x/4). \tag{20}$$

Для $n < \exp(e^2)$ з (17) аналогічно отримуємо

$$P_x^+ \le C\exp(x - x^2/4e^2). \tag{21}$$

Перейдемо до оцінювання величини P_x^-. З означення маємо:

$$P_x^- = \mathsf{P}(z_n < a_n - x/b_n) = \mathsf{P}(z_n < u_n(-x)). \tag{22}$$

Розглянемо три випадки:

(a) $0 < x < a_nb_n - 2b_n$,
(b) $a_nb_n - 2b_n < x \le 8\ln(n)$,
(c) $x > 8\ln(n)$.

Припустимо, що виконується умова (a). Це еквівалентно умові

$$u_n(-x) \ge 2, \qquad x > 0. \tag{23}$$

Оскільки $\tau_n(-x) = n(1 - \Phi(u_n(-x)))$, то з (22) і оцінки (9) леми 2 одержуємо

$$P_x^- = (1 - \tau_n(-x)/n)^n \le \exp(-\tau_n(-x)). \tag{24}$$

Далі, скориставшися умовою (a) та нерівностями (15), (23) маємо

$$\begin{aligned}\tau_n(-x) &= n(1 - \Phi(u_n(-x))) \ge n\varphi(u_n(-x))(u_n(-x))^{-1}(1 - u_n^{-2}(x)) \\ &\ge 3n\varphi(u_n(-x))(4u_n(-x))^{-1} \ge 3n\varphi(u_n(-x))(4a_n)^{-1}.\end{aligned}$$

При виконанні умови (a) $x \le 2\ln(n)$. Звідси та з співвідношень (17), (18) отримуємо при $n \ge \exp(e^2)$

$$u_n^2(-x)/2 \le x/2 - x + x/4 + \ln(n) - \ln\ln(n)/2 + 1/16.$$

Дві останні оцінки для $\tau_n(-x)$ та $u_n^2(-x)$ дозволяють зробити висновок: існує абсолютна константа C така, що для $n \ge \exp(e^2)$

$$\tau_n(-x) \ge 3n(4a_n)^{-1} \exp\left(\frac{x}{4} - \ln(n) + 2^{-1}\ln\ln(n) - \frac{1}{16}\right) \ge C\exp\left(\frac{x}{4}\right),$$

і, враховуючи (24),

$$P_x^- \le \exp(-Ce^{x/4}).$$

Тому покладаючи $C_1 = \exp(Ce^{e^2/2})$ для будь-яких $x > 0$, $n \ge 2$ при умові (a) маємо

$$P_x^- \le C_1 \exp(-Ce^{x/4}), \tag{25}$$

де $C > 0$, $C_1 > 0$ абсолютні константи.

Перейдемо до випадку (b). Оскільки $\Phi(2) < 0.98$, то

$$\tau_n(-x) = n\big(1 - \Phi(u_n(-x))\big) \ge n(1 - \Phi(2)) \ge 0.02n.$$

При виконанні умови (b) $x/8 < \ln(n)$. Тоді

$$\tau_n(-x) \ge 0.02\exp\left(\frac{x}{8}\right)$$

і згідно (24)

$$P_x^- \ge \exp(-0.02e^{x/8}). \tag{26}$$

Розглянемо випадок (c). Для нього виконується нерівність

$$u_n(-x) < -3.$$

Із співвідношень (22), (15) та симетричності нормального розподілу одержуємо

$$P_x^- = \big(\Phi(u_n(-x))\big)^n = n\big(1 - \Phi(u_n(-x))\big)^n \le \left(\frac{\varphi(u_n(-x))}{|u_n(-x)|}\right)^n \le 3^{-n}\big(\varphi(u_n(-x))\big)^n.$$

Оскільки при виконанні умови (c)

$$\frac{u_n^2(-x)}{2} \ge 2x - x - \frac{(\ln\ln(n) + \ln(4\pi))}{2},$$

то

$$\begin{aligned}P_x^- &\le (2\pi)^{-1/2}3^{-n}\exp\left(-x + \frac{(\ln\ln(n) + \ln(4\pi))}{2}\right) \\ &\le C_1(\ln(n))^{1/2}3^{-n}\exp(-x) \le C_2\exp(-x).\end{aligned} \tag{27}$$

Для завершення доведення леми 4 залишається застосувати співвідношення (13), (20), (21), (25)–(27), з яких негайно випливає оцінка (12). □

3. Доведення теореми

Збіжність ряду (4) м.н. у просторі ℓ_p еквівалентна умові:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i|^p \sigma_i^p < \infty \quad \text{м.н.}$$

Для виконання останньої нерівності достатньою буде наступна умова ([5], с. 17)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{M}\, |\zeta_i|^p \sigma_i^p < \infty. \tag{28}$$

Оцінка (28) є наслідком збіжності ряду $\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^p$ та леми 3.

Для доведення співвідношення (5) теореми скористаємось лемою 1. При виконанні умови (3) для будь-яких $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $m \geq 1$ компоненти вектора

$$\overline{\xi}_n = \big(b_n \sigma_{i_1} (z_{ni_1} - a_n), \ldots, b_n \sigma_{i_m} (z_{ni_m} - a_n)\big)$$

незалежні і, враховуючи рівність (1), збігаються за розподілом до вектора $\overline{\xi} = (\sigma_{i_1} \zeta_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_m} \zeta_{i_m})$ у просторі R^m. Таким чином, для доведення теореми залишається перевірити умову (ii) леми 1: для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n \geq 1} \mathsf{P}\left(\left(\sum_{i=m}^{\infty} |b_n (z_{ni} - a_n)|^p \sigma_i^p \right)^{1/p} > \varepsilon \right) = 0. \tag{29}$$

Із нерівності Маркова маємо

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\left(\sum_{i=m}^{\infty} |b_n (z_{ni} - a_n)|^p \sigma_i^p \right)^{1/p} > \varepsilon \right) &\leq \sum_{i=m}^{\infty} \mathbf{M}\, |b_n (z_{ni} - a_n)| \sigma_i^p / \varepsilon^p \\ &\leq \mathbf{M}\, |b_n (z_n - a_n)|^p \sum_{i=m}^{\infty} \sigma_i^p / \varepsilon^p. \end{aligned} \tag{30}$$

Оцінка (12) леми 4 дає таке співвідношення

$$\sup_{n \geq 2} \mathbf{M}\, |b_n (z_n - a_n)|^p = C_p < \infty. \tag{31}$$

Тоді рівність (29) випливає з (30), (31) та збіжності ряду

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^p.$$

Теорему доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, "Наука", Москва, 1984.
2. М. Лидбеттер, Г. Линдгрен, Х. Ротсен, *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*, "Мир", Москва, 1989.
3. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, "Наука", Москва, 1985.
4. Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, "Мир", Москва, 1965.
5. Ж.-П. Кахан, *Случайные функциональные ряды*, "Мир", Москва, 1973.

252011, КИЇВ, В. НЕМИРОВИЧА-ДАНЧЕНКО, 2, ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЛЕГКОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ УКРАЇНИ

Надійшла 25.09.94