ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ЛОКАЛЬНИХ ЧАСІВ МАРКОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА

РЕЗЮМЕ. Розглянуто потраєкторні властивості "точок росту" неперервного адитивного функціоналу (НАФ), пов'язаного з марковським випадковим полем. Доведено єдиність з точністю до мультиплікативної сталої локального часу марковського поля, де локальний час у точці x_0 розуміється як НАФ спеціального вигляду.

Статтю присвячено випадковим полям, тобто двопараметричним випадковим функціям, індексованим параметром $t = (t_1, t_2) \in R^2_+$, причому на R^2_+ розглядається звичайне відношення часткового порядку.

Нехай $(E, \mathcal{E})$ — вимірний простір, $\Delta \notin E$, $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$, $\mathcal{E}_\Delta$ — це σ-алгебра, яку породжують $\mathcal{E}$ і $\{\Delta\}$. Розглянемо сім'ю ймовірнісних мір $\{P^x, x \in E_\Delta\}$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F})$, а також сім'ю σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in R^2_+\}$, що задовольняють умові Каіролі та Уолша [1].

Нехай також $\{\theta_t, t \in R^2_+\}$ — сім'я зсувів, $\theta_t = \theta^1_{t_1} * \theta^2_{t_2} = \theta^2_{t_2} * \theta^1_{t_1}$, причому $\theta^i_\infty(w) = \omega_\Delta$, де ω_Δ — це виключна точка множини Ω. Розглянемо випадкове поле $x: \Omega \to E_\Delta$, яке є $\mathcal{F}_t$-узгодженим, сталим на осях і таким, що $\{x_s = \Delta \Longrightarrow x_t = \Delta$ для всіх $t \geq s\}$, $x_t(\omega) = \Delta$, якщо $\max(t_1, t_2) = \infty$, $x_0(\omega_\Delta) = \Delta$ $(0 = (0,0))$. Далі вважаємо, що поле x задовольняє такі умови:

(A1) для всіх $t \in R^2_+$, $B \in \mathcal{E}_\Delta$ функція $P^x\{x_t \in B\}: E_\Delta \to [0,1]$ є $\mathcal{E}_\Delta$-вимірною;
(A2) $P^\Delta\{x_t = \Delta, t = (0,0)\} = 1$;
(A3) $x_t \circ \theta^1_{s_1} = x_{t_1+s_1 t_2}$, $x_t \circ \theta^2_{s_2} = x_{t_1 t_2+s_2}$ для всіх $s, t \in R^2_+$;
(A4) для всіх $x \in E_\Delta$, $B \in \mathcal{E}_\Delta$, $s, t \in R^2_+$ $P^x\{x_{t+s} \in B \mid \mathcal{F}_t\} = P^{x_t}\{x_s \in B\}$.

З умови (A3) випливає, що $x_t \circ \theta_s = x_{t+s}$.

Означення 1. Сім'я $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, x_t, \theta_t, P^x)$, що задовольняє умовам (A1)–(A4), називається марковським полем.

Зауваження 1. Означення 1 є аналогом означення марковського процесу з книги [2]. Крім того, марковське поле (в нашому розумінні) буде 1- і 2-марковським в розумінні роботи [3], а також матиме марковську властивість у розумінні статті [4] (цей факт було відзначено в статті [5]).

Нехай B — простір борельових обмежених функцій $f: E \to R$. Розглянемо півгрупу операторів, пов'язану з марковським полем. Нехай $\{P_t, t \in R^2_+\}$ — така сім'я операторів на E_Δ, що для будь-яких $s, t \in R^2_+$

$$P_{s+t} = P_s \cdot P_t, \qquad P_0 = I,$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 60J25, 60J55.

де I — тотожний оператор, $P_s = P^1_{s_1} \cdot P^2_{s_2} = P^2_{s_2} \cdot P^1_{s_1}$, $P^1_{s_1} = P_{s_1 0}$, $P^2_{s_2} = P_{0 s_2}$, і для будь-яких $x \in E$, $t \in \boldsymbol{R}^2_+$, $f \in \mathcal{B}$, $P_t f(x) = E^x f(x_t)$.

Зауваження 2. Існування марковської реалізації x півгруп P було встановлено в статтях [5, 6] причому вказано, що у випадку, коли E — локально компактний простір із зліченною базою, а $\mathcal{E}_\Delta$ — борельова σ-алгебра на E_Δ, то можливий такий вибір цієї реалізації, що траєкторії її м.н. належать до простору $D(\boldsymbol{R}^2_+)$. Тому далі розглядаються саме такі поля.

Означення 2. Випадкове поле $(B_t, \mathcal{F}_t, t \in \boldsymbol{R}^2_+)$, назвемо неспадним, якщо $B]s,t] := B_t - B_{s_1 t_2} - B_{t_1 s_2} + B_s \geq 0$ для всіх $s \leq t$.

Означення 3. Неперервним адитивним функціоналом (НАФ), пов'язаним з марковським полем x, назвемо таке неперервне неспадне поле $(A_t, \mathcal{F}_t, t \in \boldsymbol{R}^2_+)$, що $A_{0 t_2} = A_{t_1 0} = 0$ для всіх $t \in \boldsymbol{R}^2_+$ і $A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t + A_{s_1 t_2} \circ \theta^1_{t_1} + A_{t_1 s_2} \circ \theta^2_{t_2}$.

Означення 4. Марковське поле x називається

1) строго марковським, якщо $\{x_{t_1(t_2)}, t_1 \geq 0\}$ і $\{x_{(t_1)t_2}, t_2 \geq 0\}$ — строго марковські процеси для будь-яких $t_2 \geq 0$ і $t_1 \geq 0$, відповідно,
2) нормальним, якщо $P^x\{x_t = x, t = (0,0)\} = 1$ для будь-якого $x \in E$.

Нехай A — НАФ, пов'язаний з марковським полем x. Покладемо $M_A = \{t \in \boldsymbol{R}^2_+ : A_t > 0\}$, L_A — дебют множин M_A (означення дебюту множини наведено, наприклад, в роботі [7]),

$$R = \inf_{t \in L_A} (t_1 + t_2), \qquad \operatorname{supp} A = \{x \in E : E^x e^{-R} = 1\}.$$

Крім того, якщо множина $B \in \mathcal{E}$, $T_B = \inf_{t>0, x_t \in B}(t_1 + t_2)$, то множиною регулярних точок B назвемо множину

$$B^r = \{x \in E : P^x\{T_B = 0\} = 1\}.$$

Означення 5. Локальним часом марковського поля x у точці x_0 називається такий НАФ A, що $\operatorname{supp} A = \{x_0\}$.

Зауваження 3. Означення 3 і 5 є природним узагальненням відповідних понять для марковських процесів, які детально розглянуто в книзі [2].

Зауваження 4. Позначимо $R_\delta = \{t \in \boldsymbol{R}^2_+ : \min(t_1, t_2) < \delta\}$,

$$M_{x_0} = \{t \in \boldsymbol{R}^2_+ : x_t = x_0\},$$

L_{x_0} — дебют множини M_{x_0}. В роботі [8] доведено, що при виконанні умов

(B1) Існує така точка зупинки τ, що $\tau \in L_{x_0}$ м.н.;

(B2) Існує $\delta > 0$ таке, що

$$\sup_{x \neq x_0} P^x\{L_{x_0} \cap R_\delta\} = 0;$$

(B3) точка x_0 є регулярною для множини $\{x_0\}$,

нормальне строго марковське поле x має локальний час в точці x_0.

Вивчимо тепер деякі властивості траєкторій НАФ, пов'язаних з марковським полем. Нехай A — такий НАФ. Позначимо

$$F = \{t \in \boldsymbol{R}^2_+ : x_t \in \operatorname{supp} A\},$$
$$I = \{t \in \boldsymbol{R}^2_+ : A]t, t+\varepsilon] > 0 \text{ для всіх } \varepsilon > 0\}$$
$$J = \{t \in \boldsymbol{R}^2_+ : A]t-\varepsilon, t+\varepsilon] > 0 \text{ для всіх } \varepsilon > 0\}.$$

Теорема 1. *Справджуються включення $I \subset F \subset J$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\begin{aligned}\{\omega: F \not\subset J\} &= \{\omega: \text{існує } t \in F, t \notin J\} \\ &= \{\omega: \text{існує } t \in R^2_+, \text{ таке, що } A]t-\varepsilon_0, t+\varepsilon_0] = 0 \text{ для деякого } \varepsilon_0\} \\ &\subset \bigcup_{\substack{u,v\in Q^2 \\ 0\le u<v}} \{A]u,v] = 0, \text{ існує } t \in [u,v[\,, x_t \in \operatorname{supp} A\}.\end{aligned} \tag{1}$$

Позначимо $M_{\operatorname{supp} A} = \{t \in R^2_+ : x_t \in \operatorname{supp} A\}$. Тепер для будь-якого $x \in E$

$$\begin{aligned}P^x\{A]u,v] = 0, \text{ існує } t \in [u,v[: x_t \in \operatorname{supp} A\} \\ = P^x\{A]u,v] = 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [u,v[\ne \varnothing\} \\ = E^x P^{x_u}\{A_{v-u} = 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, v-u[\ne \varnothing\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Далі, для будь-якого $y \in E$

$$\begin{aligned}&P^y\{A_{v-u} = 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, v-u[\ne \varnothing\} \\ &= P^y\{M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, v-u[\ne \varnothing; L_A \circ \theta_z \ne (0,0) \text{ для будь-якого } z \in [0, v-u]\} \\ &= P^y\Big\{M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, v-u] \ne \varnothing, \bigcap_{z\in[0,v-u]} L_A \circ \theta_z \ne (0,0)\Big\} \\ &= E^y I\{M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, v-u] \ne \varnothing\} \inf_{z\in[0,v-u]} I\{L_A \circ \theta_z \ne (0,0)\} \\ &\le E^y I\{M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, v-u] \ne \varnothing\} \inf_{z\in[0,v-u]} (I\{L_A \circ \theta_z \ne (0,0)\} I\{z \in M_{\operatorname{supp} A}\}) \\ &\quad + E^y I\{M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, v-u] \ne \varnothing\} \inf_{z\in[0,v-u]} I\{z \notin M_{\operatorname{supp} A}\} \\ &\le E^y \inf_{z\in[0,v-u]} I\{L_A \circ \theta_z \ne (0,0)\} I\{z \in M_{\operatorname{supp} A}\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Але для будь-якого $z \in [0, v-u]$

$$E^y I\{L_A \circ \theta_z \ne (0,0)\} I\{z \in M_{\operatorname{supp} A}\} = E^y E^{x_z}\{L_A \ne (0,0)\} I\{z \in M_{\operatorname{supp} A}\} = 0. \tag{4}$$

З (1)–(4) випливає, що $F \subset J$.

Нехай $t \in I$, $t \notin F$. Тоді $E^{x_t} e^{-R} < 1$. Оскільки траєкторії x м.н. належать до $D_{R^2_+}$, то $E^{x_z} e^{-R} < 1$ для $r \le z \le z_0$, де $z_0 = z_0(w)$. Тому

$$\{I \not\subset F\} \subset \bigcup_{\substack{r,q\in Q^2 \\ 0\le r<q}} \{A]r,q] > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [r,q] = \varnothing\}. \tag{5}$$

Але для будь-якого $x \in E$

$$\begin{aligned}P^x\{A]r,q] > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [r,q] = \varnothing\} \\ = E^x P^{x_r}\{A_{q-r} > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, q-r] = \varnothing\}.\end{aligned} \tag{6}$$

В свою чергу, для будь-якого $y \in E$

$$\begin{aligned}P^y\{A_{q-r} > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, q-r] = \varnothing\} \\ \le P^y\{\text{існує } t < q-r, A_t = 0, A_{t_1+\alpha, t_2} > 0 \\ \text{для всіх } \alpha > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, q-r] = \varnothing\} \\ + P^y\{\text{існує } t < q-r, A_t = 0, A_{t_1, t_2+\alpha} > 0 \\ \text{для всіх } \alpha > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, q-r] = \varnothing\}\end{aligned} \tag{7}$$

Оцінимо перший доданок в правій частині (7) (другий можна оцінити аналогічно).

$$
\begin{aligned}
&P^y\{\text{існує } t < q - r, A_t = 0, A_{t_1+\alpha, t_2} > 0, \\
&\qquad\qquad \text{для будь-якого } \alpha > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, q-r] = \varnothing\} \\
&\quad \le P^y\{\text{існує } t < q - r, A_t = 0, A_{\alpha, t_2} \circ \theta^1_{t_1} > 0 \\
&\qquad\qquad \text{для всіх } \alpha > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, q-r] = \varnothing\} \\
&\quad \le \sum_{t \in Q^2 \cap [0, q-r]} P^y\{A_{\alpha, t_2} \circ \theta^1_{t_1} > 0 \text{ для всіх } \alpha > 0, M_{\operatorname{supp} A} \cap [0, q-r] = \varnothing\} \\
&\quad = \sum_{t \in Q^2 \cap [0, q-r]} E^y \Big\{ \inf_{\alpha > 0} I\{A_{\alpha, t_2} \circ \theta^1_{t_1} > 0\Big\} I\{x_{t_1 0} \notin \operatorname{supp} A\}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Але,

$$
\begin{aligned}
&E^y \inf_{\alpha > 0} I\{A_{\alpha, t_2} \circ \theta^1_{t_1} > 0\} I\{x_{t_1 0} \notin \operatorname{supp} A\} \\
&\quad = \lim_{\alpha \to 0} E^y I\{A_{\alpha, t_2} \circ \theta^1_{t_1} > 0\} I\{x_{t_1 0} \notin \operatorname{supp} A\} \\
&\quad = \lim_{\alpha \to 0} E^y P^{x_{t_1 0}}\{A_{\alpha, t_2} > 0\} I\{x_{t_1 0} \notin \operatorname{supp} A\} = 0,
\end{aligned} \tag{9}
$$

оскільки для $z \notin \operatorname{supp} A$

$$
P^{x_z}\{A_{\alpha, t_2} > 0\} \to 0, \qquad \alpha \to 0.
$$

З (5)–(9) випливає, що $I \subset F$. Теорему доведено. □

Нехай A — НАФ, функція $f \in \mathcal{B}$. Позначимо

$$
(fA)_t = \int_{[0,t]} f(x_s)\, dA_s,
$$

$$
u_A(f)(x) = E^x \int_{R^2_+} f(x_s)\, dA_s.
$$

Лема 1. *Нехай A і B — НАФ, пов'язані з марковським полем x, причому*

$$
A_t = \int_{[0,t]} a(x_s)\, ds, \qquad B_t = \int_{[0,t]} b(x_s)\, ds.
$$

і для будь-якої невід'ємної функції $g \in \mathcal{B}$ з того, що $u_A(g) = 0$ випливає, що $u_B(g) = 0$. Тоді існує борельова функція $h \ge 0$ така, що $B = hA$.

Доведення. Нехай $I_s = I\{a(x_s) = 0\}$. Тоді

$$
E^x \int_{R^2_+} a(x_s) I_s\, ds = 0.
$$

Отже,

$$
E^x \int_{R^2_+} b(x_s) I_s\, ds = 0.
$$

звідки $b(x_s) I_s = 0$. Покладемо

$$
h(x_s) = b(x_s) a^{-1}(x_s) I\{a(x_s) \ne 0\}.
$$

Тоді, очевидно,

$$
B_t = \int_{[0,t]} h(x_s) a(x_s)\, ds = \int_{[0,t]} h(x_s)\, A_s.
$$

і лему доведено. □

Розглянемо тепер локальний час $A = A^{x_0}$ в точці x_0, що його побудовано в статті [8] (див. зауваження 4). Згідно з теоремами 1 і 3 [8], цей локальний час A^{x_0} задовольняє співвідношення

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} E^x e^{-\tau} = E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2}\, dA_s^{x_0}, \qquad x \in E,$$

причому $A_t^{x_0}$ можна обрати таким чином:

$$A_t^{x_0} = \int_{[0,t]} a(x_s)\, ds,$$

де

$$a(x) = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(I - P_{1/n}^1 - P_{1/n}^2 + P_{1/n}^1 P_{1/n}^2\right)\varphi(x),$$

і границя існує рівномірно відносно $x \in E$.

Теорема 2. *Нехай B^{x_0} — локальній час марковського поля в точці x_0, причому B^{x_0} припускає зображення*

$$B_t^{x_0} = \int_{[0,t]} b(x_s)\, ds.$$

Тоді існує $k > 0$ таке, що $B^{x_0} = kA^{x_0}$.

Доведення. Нехай $g \geq 0$, $g \in B$ — функція, для якої

$$u_{A x_0}(f)(x) = E^x \int_{R_+^2} g(x_s)\, dA_s^{x_0} = 0,$$

тобто

$$E^x \int_{R_+^2} g(x_s) a(x_s)\, ds = 0.$$

Тоді, зокрема,

$$g(x_0) E^x \int_{R_+^2} I\{x_s = x_0\}\, ds = 0.$$

Отже,

$$E^x \int_{R_+^2} g(x_s) b(x_s)\, ds = E^x \int_{R_+^2} g(x_s) I\{x_s \neq x_0\}\, dB_s^{x_0}.$$

Але, $\operatorname{supp} B_s^{x_0} = \{x_0\}$, і тому із співвідношення $I \subset F$ одержуємо

$$I\{x_s \neq x_0\} B^{x_0}\,]s, z] = 0$$

для деякого $z \geq s$, $z = z(\omega)$. Тому

$$E^x \int_{R_+^2} g(x_s) I\{x_s \neq x_0\}\, dB_s^{x_0} = 0,$$

тобто $u_{B^{x_0}}(g) = 0$. З леми 1 випливає існування функції $h \geq 0$ такої, що

$$\begin{aligned} B_t &= \int_{[0,t]} h(x_s)\, dA_s = \int_{[0,t]} h(x_s) a(x_s) I\{x_s = x_0\}\, ds \\ &= h(x_0) \int_{[0,t]} a(x_s) I\{x_s = x_0\}\, ds = h(x_0) A_t. \end{aligned}$$

Якщо покласти $k = h(x_0)$, одержимо доведення. $\square$

Зауваження 5. Існування та єдиність локального часу для марковського поля x з півгрупою P, що задовольняє співвідношення

$$P_{t_1+s_1 t_2} = P_t P_{s_1 t_2}, \qquad P_{t_1 t_2+s_2} = P_t P_{t_1 s_2},$$

були вивчені в статті [9].

Література

1. R. Cairoli and J. B. Walsh, *Stochastic integrals in the plane*, Acta Mathem. **134** (1975), № 1–2, 111–183.
2. R. M. Blumental and R. K. Getoor, *Markov processes and potential theory*, Academic Press (1968), New York, 312.
3. H. Korezlioglu, P. Lefort, and G. Mazziotto, *Une propriete markovienne et diffusions associees*, Lect. Notes Math. **863** (1981), 245–274.
4. D. Nualart and M. Sanz, *A Markov propety for two-parameter Gaussian processes*, Stochastica **3** (1979), № 1, 1–16.
5. G. Mazziotto, *Two-parameter Hunt processes and a potential theory*, Ann. Prob. **16** (1988), № 2, 600–619.
6. ———, *Probleme de Dirichlet et processus de Markov a deux indices*, C.R.Acad.Sci. **302** (1985), № 6, 237–240.
7. P. A. Meyer, *Theorie elementaire des processus a deux indices*, Lect. Notes Math. **863** (1981), 1–39.
8. Yu. S. Mishura, *Continuous additive functionals and local times for Markov feilds*, New Trends in Prob. and Stat., Proceedings of the 2nd Ukr.-Hund. Conf., "TBiMC", Kiev, 1993, стор. 169–182.
9. Ю. С. Мишура, *Существование и свойства локальных времен для марковських случайных полей*, Украин. матем. журнал **47** (1995), № 1, 56–63.

252127, КИЇВ, ПР. АКАД. ГЛУШКОВА, 6, КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Надійшла 12.11.93