Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 122–128

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 122–128

ДИФУЗІЯ З НЕРЕГУЛЯРНИМ ПЕРЕНОСОМ

УДК 519.21

М. М. ОСИПЧУК

РЕЗЮМЕ. В роботі побудовано узагальнений дифузійний процес в скінченномірному просторі. Перенос одержаного процесу задовольняє деяку умову інтегровності за гауссовою мірою. Доведено ряд властивостей побудованого процесу.

1. Рівняння збуреної дифузії

Припустимо, що на множині $[0,T] \times \boldsymbol{R}^m$ задано функція $b(t,x)$, значеннями якої є симетричні матриці порядку $m \times m$. Нехай виконуються наступні умови:

а) $c_1|\theta|^2 \le (b(t,x)\theta,\theta) \le c_2|\theta|^2$ при всіх $t \in [0,T]$, $x \in \boldsymbol{R}^m$, $\theta \in \boldsymbol{R}^m$, де c_1 і c_2 додатні сталі;

б) при всіх $t,t' \in [0,T]$, $x,x' \in \boldsymbol{R}^m$, $j,k = 1,2,\dots,m$
$$|b_{jk}(t,x) - b_{jk}(t',x')| \le L(|x-x'|^\alpha + |t-t'|^{\alpha/2}),$$
де $b_{jk}(t,x)$ елементи матриці $b(t,x)$, а L і α — деякі додатні сталі, $\alpha \le 1$.

Ці умови гарантують (див. [1]) існування фундаментального розв'язку $g(s,x,t,y)$ рівняння
$$\frac{\partial u}{\partial s} + \sum_{j,k=1}^m b_{jk}(s,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$
функція $g(s,x,t,y)$ є щільністю ймовірності переходу дифузійного процесу з нульовим вектором переносу і матрицею дифузії (t,x); $g(s,x,t,y)$ неперервно диференційовна по x і виконуються нерівності ($0 \le s < t \le T$, $x,y \in \boldsymbol{R}^m$)
$$g(s,x,t,y) \le K(t-s)^{-m/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t-s}\right\}, \tag{1}$$
$$|\nabla_x g(s,x,t,y)| \le K(t-s)^{-m/2-1/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t-s}\right\}, \tag{2}$$
де K і μ — додатні сталі.

Нехай функція $\alpha(t,x)$ задана на $[0,T] \times \boldsymbol{R}^m$ зі значеннями в $\boldsymbol{R}^m$ така, що

в) існують такі сталі $\delta > 0$, $C > 0$, $\gamma > -\delta/2$, що для всіх $x \in \boldsymbol{R}^m$, $0 \le s < t \le T$
$$\int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} |\alpha(\tau,y)|^{2+\delta}(\tau-s)^{-m/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{\tau-s}\right\}dy \le C(t-s)^\gamma$$
(сталі δ, C, γ можливо залежать від T).

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60; Secondary 60E99.

Методом послідовних наближень можна довести, що існує розв'язок $V(s,x,t,\varphi)$ інтегрального рівняння

$$V(s,x,t,\varphi) = V_0(s,x,t,\varphi) + \int_s^t d\tau \int_{R^m} V(\tau,x,t,\varphi)|a(\tau,y)|(\nabla_x g(s,x,\tau,\varphi), e(s,x))\,dy, \tag{3}$$

де $V_0(s,x,t,\varphi) = \int_{R^m} \varphi(y)(\nabla_x g(s,x,\tau,\varphi), e(s,x))\,dy$, $\varphi: R^m \to R$ обмежена вимірна функція, $e(s,x) = a(s,x)/|a(s,x)|$ для тих s і x, для яких $|a(s,x)| > 0$ (в протилежному випадку $e(s,x)$ визначається довільно із збереженням вимірності і $|e(s,x)| = 1$). Розв'язок одержуємо у вигляді ряду $V(s,x,t,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(s,x,t,\varphi)$, де

$$V_{k+1}(s,x,t,\varphi) = \int_s^t d\tau \int_{R^m} V_k(\tau,y,t,\varphi)|a(\tau,y)|(\nabla_x g(s,x,\tau,\varphi), e(s,x))\,dy,$$
$$k = 0,1,2,\ldots$$

і

$$|V_k(s,x,t,\varphi)| \le C_n(t-s)^{-(n+1)/2+n(1+\delta)/(2+\delta)+n\gamma/(2+\delta)},$$

де

$$C_n = \sup|\varphi(x)|\mathrm{const}^n \left(B\left(1-\frac{(2+\delta)}{2(1+\delta)}, 1-\frac{(2+\delta)}{2(1+\delta)}\right)\right.$$
$$\left.\times\cdots\times B\left(1-\frac{(2+\delta)}{2(1+\delta)}, n-\frac{n(2+\delta)}{2(1+\delta)}+\frac{(n-1)\gamma}{1+\delta}\right)\right)^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}.$$

Крім того цей розв'язок єдиний в класі функцій, що задовольняють нерівність

$$|V(s,x,t,\varphi)| \le K_T(t-s)^{-1/2}, \tag{4}$$

де K_T — деяка додатна стала, що залежить від T.

Визначимо двопараметричну сім'ю операторів $\{T_{st}, 0 \le s \le t \le T\}$ заданих на обмежених вимірних функціях $\varphi: R^m \to R$

$$T_{st}\varphi(x) = T^0_{st}\varphi(x) + \int_s^t d\tau \int_{R^m} V(\tau,x,t,\varphi)|a(\tau,y)|g(s,x,\tau,y)\,dy, \tag{5}$$

де $T^0_{st}\varphi(x) = \int_{R^m} \varphi(y) g(s,x,\tau,\varphi)\,dy$.

Інтеграл в правій частині (5) існує, оскільки, враховуючи (1) і (4), можна одержати, що при $0 \le s < t \le T$, $x \in R^m$

$$\int_s^t d\tau \int_{R^m} |V(\tau,x,t,\varphi)|\cdot|\alpha(\tau,y)|g(s,x,\tau,y)\,dy \le \mathrm{const}_T(t-s)^{\beta},$$
$$\beta = \frac{1+\delta}{2+\delta} - \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2+\delta} > 0.$$

Безпосереднє обчислення показує, що для довільних $0 \le s \le u \le t \le T$

$$T_{su}T_{ut} = T_{st}.$$

Лема 1. *Нехай для послідовності функцій $ak(t,x)$ виконується умова* в) *рівномірно щодо k і при $k \to +\infty$ та всіх $0 \le s < t \le T$, $x \in \boldsymbol{R}^m$*

$$\int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} |a_k(\tau, y) - a(\tau, y)|^{2+\delta} (\tau - s)^{-m/2} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{\tau - s}\right\} dy \to 0.$$

Тоді $\lim_{k\to+\infty} T^k_{st}\varphi(x) = T_{st}\varphi(x)$ *для всіх $x \in \boldsymbol{R}^m$, $0 \le s \le t \le T$ (тут T^k_{st} і T_{st} оператори, побудовані за функціями a_k і a відповідно).*

Доведення. Виберемо $e_k(s,x)$ і $e(s,x)$ такими, щоб $e_k(s,x) \to e(s,x)$, $k \to +\infty$ за мірою Лебега щодо s і x. Розглянемо розв'язки рівнянь (3) $V^k(s,x,t,\varphi)$ і $V(s,x,t,\varphi)$ з функціями a_k і a відповідно. Легко бачити, що функція $W^k(s,x,t,\varphi) = V^k(s,x,t,\varphi) - V(s,x,t,\varphi)$ є розв'язком рівняння

$$W^k(s,x,t,\varphi) = \Gamma_k(s,x,t,\varphi) + \int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} W^k(\tau,x,t,\varphi)|\alpha(\tau,y)|(\nabla_x g(s,x,\tau,y), e(s,x))\,dy$$

і $\Gamma_k(s,x,t,\varphi) \to 0$, $k \to +\infty$ за мірою Лебега щодо s і x на множині $[0,t] \times \boldsymbol{R}^m$ для всіх $t \le T$. Оскільки $W^k(s,x,t,\varphi)$ і $\Gamma_k(s,x,t,\varphi)$ задовольняють (4) рівномірно щодо k і виконується (2), то $W^k(s,x,t,\varphi) \to 0$, $k \to +\infty$ за мірою Лебега щодо s і x на множині $[0,t] \times \boldsymbol{R}^m$ для всіх $t \le T$.

Таким чином, оскільки для $x \in \boldsymbol{R}^m$, $0 \le s \le t \le T$

$$|T^k_{st}\varphi(x) - T_{st}\varphi(x)| \le \int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} |V^k(\tau,x,t,\varphi)| \cdot |a_k(\tau,y) - a(\tau,y)| g(s,x,\tau,y)\,dy + \int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} |W^k(\tau,x,t,\varphi)|\,|a(\tau,y)| g(s,x,\tau,y)\,dy,$$

то за теоремою Лебега отримаємо твердження леми. □

Лема 2. *Нехай T_{st}, $0 \le s < t \le T$, є оператори, побудовані за функцією $a(t,x)$, $\{\varphi_k, k \ge 1\}$ послідовність обмежених вимірних функцій із $x \in \boldsymbol{R}^m$ в $\boldsymbol{R}$ і така, що $\sup_{k,x} |\varphi_k(x)| < +\infty$ та $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$, $k \to +\infty$ для $x \in \boldsymbol{R}^m$.*

Тоді $\lim_{k\to+\infty} T_{st}\varphi_k(x) = T_{st}\varphi(x)$, $0 \le s < t \le T$, $x \in \boldsymbol{R}^m$.

Доведення. За умови леми, скориставшись методом послідовних наближень, можна одержати, що $V(s,x,t,\varphi_k) \to V(s,x,t,\varphi)$, $k \to +\infty$ при всіх $0 \le s < t \le T$, $x \in \boldsymbol{R}^m$, бо ряд, що визначає $V(s,x,t,\varphi_k)$, збігається рівномірно щодо k. А оскільки для $V(s,x,t,\varphi_k)$ рівномірно щодо k виконується нерівність (4), то з теореми Лебега випливає твердження леми. □

Леми 1 і 2 дають змогу стверджувати, що для довільної вимірної обмеженої невід'ємної функції $\varphi(x)$ виконується нерівність $T_{st}\varphi(x) \ge 0$, $0 \le s \le t \le T$, $x \in \boldsymbol{R}^m$, оскільки це виконується для невід'ємної неперервно диференційовної і обмеженої разом зі своїми похідними функції $\varphi(x)$ і оператора T_{st}, побудованого за обмеженою неперервною гельдеровою щодо x рівномірно відносно x функцією $a(t,x)$.

Звідси одержуємо, що сім'я операторів T_{st}, визначає марковський процес в $\boldsymbol{R}^m$ з перехідною ймовірністю $P(s,x,t,\Gamma)$, $0 \le s < t \le T$, $x \in \boldsymbol{R}^m$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^m)$($\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^m)$) — борелева σ-алгебра в $\boldsymbol{R}^m$, причому

$$T_{st}\varphi(x) = \int_{\boldsymbol{R}^m} \varphi(y) P(s,x,t,dy) \tag{6}$$

(розповсюдивши дію операторів T_{st} на всі ті функції, для яких (3) має єдиний розв'язок і інтеграли в (5) збігаються, матимемо, що рівність (6) виконується і для таких функцій).

Розглянемо тепер $\varphi_0(x) = |x - x_0|^4$, $x_0 \in R^m$, $x \in R^m$ і $V(s, x, t, \varphi_0)$ — розв'язок відповідного рівняння (3). Методом послідовних наближень можна одержати нерівність ($0 \le s < t \le T$, $x \in R^m$)

$$\int_{R^m} |y - x_0|^4 P(s, x_0, t, dy) \le \mathrm{const}_T (t-s)^2, \tag{7}$$

а це означає, що побудований марковський процес є неперервним з ймовірністю 1.

Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай матричнозначна функція* $b(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in R^m$ *задовольняє умови* а) *і* б), *а векторнозначна функція* $a(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in R^m$ *є такою, що виконується умова* в).

Тоді існує неперервний марковський процес з перехідною ймовірністю $P(s, x, t, \Gamma)$ $0 \le s < t \le T$, $x \in R^m$, $\Gamma \in \mathcal{B}(R^m)$ *і такий, що для довільної вимірної обмеженої функції* $\varphi(x)$, $x \in R^m$ *з дійсними значеннями функція*

$$u(s, x, t, \varphi) = \int_{R^m} \varphi(y) P(s, x, t, dy)$$

є розв'язком рівняння

$$u(s,x,t,\varphi) = \int_{R^m} \varphi(y) g(s,x,t,y)\, dy + \int_s^t d\tau \int_{R^m} g(s,x,t,y)(\nabla_y u(\tau, y, t, \varphi), a(\tau, y))\, dy,$$

(*рівняння збуреної дифузії — аналог обмеженого рівняння Колмогорова*) *і виконується нерівність*

$$\left|(\nabla_x u(s,x,t,\varphi), e(s,x))\right| \le K \|\varphi\| (t-s)^{-1/2},$$

де K — *стала,* $\|\varphi\| = \sup|\varphi(x)|$, $e(s,x) = a(s,x)/|a(s,x)|$.

Зауваження. Можливість диференціювання по x функції $u(s,x,t,\varphi)$ випливає з того, що з врахуванням (2) і (4) можна співвідношення (5) продиференціювати під знаком інтеграла. Одержимо рівняння (3), однозначність розв'язку якого дає змогу стверджувати, що $V(s,x,t,\varphi) = (\nabla_x u(s,x,t,\varphi), e(s,x))$.

Приклад. Умову в) задовольняють, зокрема, такі функції $a(t,x)$ як:

1) $\int_0^T d\tau \int_{R^m} |a(\tau,y)|^p\, dy < +\infty$ при деякому $p > m+2$ (такі функції розглянуто в роботі [2]);
2) $a(t,x) = c|x|_n^{-\beta}$, при $|x| \le C$ і $a(t,x) = 0$ в противному випадку (тут $c \in R^m$ сталий вектор, $|x|_n^2 = \sum_{j=1}^n x_{k(j)}^2$ ($k(j) \ne k(i)$ при $i \ne j$ $1 \le k(i) \le m$, $1 \le i \le n \le m$, $0 < \beta < \min(1, n/2)$).

Зауважимо, що при $\beta \ge n/(m+2)$ умова пункту 1) не виконується.

2. Розв'язок стохастичного диференціального рівняння

Розглянемо при фіксованому $z \in \boldsymbol{R}^m$ функції $\varphi_1(x) = (x,z)$ і $\varphi_2(x) = (x,z)^2$ та позначимо через $V_1(s,x,t)$ і $V_2(s,x,t)$ розв'язки рівняння (3) з функціями φ_1 і φ_2 відповідно. Використовуючи метод послідовних наближень при розв'язуванні рівнянь (3), можна одержати, що при $0 \le s < t \le T$, $x \in \boldsymbol{R}^m$

$$V_1(s,x,t) = \frac{(a(s,x),z)}{|a(s,x)|} + \widetilde{V}_1(s,x,t), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} V_2(s,x,t) = \int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} (\nabla_x g(s,x,\tau,y), e(s,x))(b(\tau,y)z,z)\,dy \\ + 2(x,z)\frac{(a(s,x),z)}{|a(s,x)|} + \widetilde{V}_1(s,x,t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$|\widetilde{V}_1(s,x,t)| \le \mathrm{const}_T (t-s)^{-1/2+(1+\delta+\gamma)/(2+\delta)}, \tag{10}$$

$$|\widetilde{V}_2(s,x,t)| \le \mathrm{const}_T (t-s)^{-1/2+(1+\delta+\gamma)/(2+\delta)}((t-s)^{1/2} + |x|). \tag{11}$$

Оскільки для обмеженої неперервної гельдерової щодо x рівномірно відносно t функції $a(t,x)$ виконуються співвідношення (див. [2])

$$\int_{\boldsymbol{R}^m} (y-x,z)P(s,x,t,dy) = \int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} (a(\tau,y),z)P(s,x,t,dy), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{R}^m} (y-x,z)^2 P(s,x,t,dy) = \int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} (b(\tau,y)z,z)P(s,x,t,dy) \\ + 2\int_s^t d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} (a(\tau,y),z)(y-x,z)P(s,x,t,dy), \end{aligned} \tag{13}$$

де $P(s,x,t,\Gamma)$ — міра, побудована в теоремі 1 за функцією $a(t,x)$, то, враховуючи (8)–(11), з допомогою леми 1 одержимо, що рівності (12) і (13) виконуються і для функції $a(t,x)$, яка задовольняє умову в).

Розглянемо простір Ω неперервних функцій $w(t)$, заданих на $[0,t]$ із значеннями в $\boldsymbol{R}^m$, і σ-алгебру $\mathcal{M}_s^t$ підмножин Ω, породжену множинами вигляду $\{w(\tau) \in \Gamma\}$, де $\tau \in [s,t]$, $0 \le s < t \le T$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^m)$. Покладемо $x(t) = x(t,w) = w(t)$.

Для кожних $0 \le s \le T$, $x \in \boldsymbol{R}^m$ (див. [2]) можна визначити на $(\Omega, \mathcal{M}_0^t)$ міру P_{sx}^0 таку, що $P_{sx}^0\{x(s) = x\} = 1$ і процес $(x(t), \mathcal{M}_0^t, P_{sx}^0)$, $s \le t \le T$ є марковським з щільністю ймовірностей переходу $g(s,x,t,y)$. Так же доведено, що процес $(x(t) - x(s), \mathcal{M}_s^t, P_{sx}^0)$ є квадратично інтегровним мартингалом з характеристикою

$$\int_s^t b(\tau, x(\tau))\,d\tau. \tag{14}$$

Враховуючи (7), так само можна побудувати на $(\Omega, \mathcal{M}_0^t)$ міри P_{sx}, для яких

$$P_{sx}\{x(s) = x\} = 1$$

і процес $(x(t), \mathcal{M}_s^t, P_{sx})$, $s \le t \le T$ є марковській з ймовірністю переходу $P(s,x,t,\Gamma)$.

Співвідношення (12) і (13) дають змогу довести, що процес $\xi_s(t) = x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(t))\,d\tau$, $t \in [s,T]$ є квадратично інтегровним мартингалом відносно $(\mathcal{M}_s^t, P_{sx})$ з характеристикою (14). Тому в $\boldsymbol{R}^m$ існує такий вінерів процес $w_s(t)$, $t \in [s,T]$, що $w_s(s) = 0$ і при всіх $s \le t \le T$ майже напевно відносно міри P_{sx}

$$x(t) - x(s) = \int_s^t a(\tau, x(\tau))\,d\tau + \int_s^t b^{1/2}(\tau, x(\tau))\,dw_s(\tau).$$

Отже, доведена наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді процес, побудований в теоремі* 1, *є слабким розв'язком стохастичного диференціального рівняння* $dx(t) = a(t, x(t))\,dt + b^{1/2}(t, x(t))\,dw(t)$, *де* $w(t)$ — *вінерів процес в* $\boldsymbol{R}^m$.

Аналогічно тому, як це зроблено в [2], можна довести наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді звуження мір* P_{sx} *і* P^0_{sx} *на* σ-*алгебри* $\mathcal{M}^t_s$ *еквівалентні при довільному* $t \le T$ (*міри* P_{sx} *і* P^0_{sx} *визначені вище*).

3. Узагальнений дифузійний процес

Доведемо наступне твердження

Теорема 4. *Нехай матричнозначна функція* $b(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in \boldsymbol{R}^m$ *задовольняє умови* а) *і* б), *а векторнозначна функція* $a(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in \boldsymbol{R}^m$ *така, що виконується умова* в) *з* $\gamma > 1 - \delta/2$.

Тоді процес, побудований в теоремі 1, *є узагальненим дифузійним процесом* (*див.* [2]) *з вектором переносу* $A(\psi)$ *і оператором дифузії* $B(\psi)$, $\psi \in C_0(\boldsymbol{R}^m)$ *такими, що для довільних* $z \in \boldsymbol{R}^m$, $\psi \in C_0(\boldsymbol{R}^m)$

$$(A(\psi), z) = \int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x)(a(t, x), z)\,dx, \qquad (B(\psi)z, z) = \int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x)(b(t, x)z, z)\,dx.$$

Доведення. Нехай ψ — дійсна неперервна фінітна функція, задана на x. Розглянемо функції

$$a^h_t(\psi) = \frac{1}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_{\boldsymbol{R}^m} (y - x, z) P(t, x, t + h, dy)\,dx,$$
$$b^h_t(\psi) = \frac{1}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_{\boldsymbol{R}^m} (y - x, z)^2 P(t, x, t + h, dy)\,dx.$$

Враховуючи співвідношення (5), (6), (8), (9), (12), (13) одержимо

$$\begin{aligned}
\alpha^h_t(\psi) &= \frac{1}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_t^{t+h} d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} (a(\tau, y), z) g(t, x, \tau, y)\,dy\,dx \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_t^{t+h} d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} \widetilde{V}_1(t, y, \tau)|a(\tau, y)| g(t, x, \tau, y)\,dy\,dx \\
\beta^h_t(\psi) &= \frac{1}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_t^{t+h} d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} (b(\tau, y)z, z) g(t, x, \tau, y)\,dy\,dx \\
&\quad + \frac{2}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_t^{t+h} d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} (a(\tau, y), z)(y - x, z) g(s, x, \tau, y)\,dy\,dx \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_t^{t+h} d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} \int_t^{\tau} du \int_{\boldsymbol{R}^m} (\nabla_y g(t, y, u, \xi), e(t, y)) \\
&\qquad\qquad \times (b(u, \xi)z, z)\,d\xi |a(\tau, y)| g(t, x, u, y)\,dy\,dx \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x) \int_t^{t+h} d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} \widetilde{V}_2(t, y, \tau)|a(\tau, y)| g(t, x, \tau, y)\,dy\,dx \\
&\quad - \frac{2}{h}\int_{\boldsymbol{R}^m} \psi(x)(x, z) \int_t^{t+h} d\tau \int_{\boldsymbol{R}^m} \widetilde{V}_1(t, y, \tau)|a(\tau, y)| g(t, x, \tau, y)\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Оцінки (10), (11) дають змогу одержати, що

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\int_{R^m}\psi(x)\int_t^{t+h}d\tau\int_{R^m}\widetilde{V}_1(t,y,\tau)|a(\tau,y)|g(t,x,\tau,y)\,dy\,dx\right| \\
&\quad\le \mathrm{const}_T\|\widetilde{\psi}(x)\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(\tau-t)^{-1/2+(1+\delta+\gamma)/(2+\delta)}\,d\tau \\
&\quad\quad\times\int_{R^m}|a(\tau,y)|\int_{R^m}\exp\{-\mu|x|^2\}(\tau-s)^{-m/2}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{\tau-s}\right\}dy\,dx \\
&\quad\le \mathrm{const}_T h^{\theta}(h+1)^{\gamma/(2+\delta)},
\end{aligned}$$

де $\theta=-\frac{3}{2}+\frac{2(1+\delta)+\gamma}{2+\delta}>0$, $\widetilde{\psi}(x)=\psi(x)\exp\{\mu|x|^2\}$. Отже

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to\infty}\alpha_t^h(\varphi)&=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_{R^m}(\varphi)\int_t^{t+h}d\tau\int_{R^m}(\alpha(\tau,y),z)g(s,x,\tau,y)\,dy\,dx \\
&=\int_{R^m}\psi(x)(\alpha(t,x),z)\,dx.
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to\infty}\beta_t^h(\varphi)&=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_{R^m}(\varphi)\int_t^{t+h}d\tau\int_{R^m}(\beta(\tau,y)z,z)g(s,x,\tau,y)\,dy\,dx \\
&=\int_{R^m}\psi(x)(\beta(t,x)z,z)\,dx,
\end{aligned}$$

і теорему доведено. □

Зауваження. 1. Легко бачити, що функції, розглянуті в наведеному вище прикладі, задовольняють умови теореми 4.

2. Якщо функції $a(t,x)$ та $b(t,x)$ задані на $[0,+\infty)\times R^m$ і задовольняють умови теорем 1–4 при кожному $T<+\infty$, то одержаний процес визначений для всіх $t\ge 0$.

3. У випадку, коли дифузії a і b не залежать від часу t, при виконанні однорідних аналогів умов а) і б) та умови г) існують такі сталі $\delta>0$, $C>0$, $\gamma>-(\delta+1)/2+m/2$, що для всіх $x\in R^m$, $t>0$

$$\int_{R^m}|a(y)|^{1+\delta}\exp\left\{\frac{|y-x|^2}{t}\right\}dy\le Ct^{\gamma};$$

мають місце твердження теорем 1, 2, 4. Для виконання твердження теореми 3 треба замість умови г) вимагати, щоб існували такі сталі $\delta>0$, $C>0$, $\gamma>-(\delta+2)/2+m/2$, що при всіх $x\in R^m$, $t>0$

$$\int_{R^m}|a(y)|^{2+\delta}\exp\left\{\frac{|y-x|^2}{t}\right\}dy\le Ct^{\gamma}.$$

Література

1. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцев, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, "Наука", Москва, 1976.
2. Н. И. Портенко, *Обобщенные диффузионные процессы*, "Наукова думка", Киев, 1976 ; Переклад англійською мовою, *Обобщенные диффузионные процессы*, Transl. of Math. Monographs, AMS, Providence, RI.

284018, ІВАНО-ФРАНКІВСЬК, ВУЛ. КАРПАТСЬКА, 15, ІВАНО-ФРАНКІВСЬКІЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАФТИ І ГАЗУ, КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Надійшла 20.06.94