Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 137–146

Teor. Ímovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 137–146

ВИПАДКОВІ ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. I

УДК 519.21

О. І. ПОНОМАРЕНКО

РЕЗЮМЕ. Розглядається загальна теорія випадкових лінійних функціоналів на лінійних та лінійних топологічних просторах. Подібні функціонали можна інтерпретувати як узагальнені випадкові елементи в дуальних просторах. Вивчаються ймовірнісні характеристики випадкових функціоналів, такі як їхні розподіли, характеристичні функціонали, моментні оператори, умовні середні, умовні регулярності тощо. Основна увага приділяється випадковим функціоналам другого порядку. Наводяться як огляд відомих результатів, так і нові результати по цій тематиці.

Випадкові лінійні функціонали другого порядку є досить поширеним об'єктом в сучасній теорії ймовірностей, зокрема в таких її розділах, як теорія випадкових процесів і полів, загальний стохастичний аналіз. Найважливішими прикладами подібних функціоналів є різноманітні стохастичні інтеграли, узагальнені випадкові процеси та поля другого порядку, узагальнені випадкові елементи другого порядку в різних лінійних просторах. Проте корреляційні теорії цих об'єктів, хоч вони мають багато спільних рис, традиційно будують окремо одна від одної. Метою цієї статті є розгляд загальною корреляційної теорії випадкових лінійних функціоналів другого порядку та подання відповідних результатів, як відомих, так і нових в систематизованому вигляді. Їх також можна інтерпретувати як стохастичну теорію двоїстості або теорії узагальнених випадкових елементів другого порядку в лінійних просторах.

1. Основні позначення

Під полем скалярів $\mathbb{K}$ розуміємо або поле дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ або поле комплексних чисел $\boldsymbol{C}$. В подальшому X, Y, Z позначають лінійні простори над $\mathbb{K}$, тобто дійсні або комплексні лінійні простори, а $\mathcal{L}(X,Y)$ позначає простір лінійних операторів, що відображають X в Y. Якщо $X = Y$, то простір $\mathcal{L}(X,Y)$ коротко позначаємо $\mathcal{L}(X)$.

Під лінійними топологічними просторами $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ розуміємо хаусдорфові простори, $\mathcal{L}_C(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ позначає множину всіх неперервних лінійних операторів, що діють з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Простір $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ називається алгебраїчно спряженим до простору X і позначається X^a. Значення функціоналу $f \in X^a$ на елементі $x \in X$ записується $f(x)$. Топологічно спряжений простір $\mathcal{L}_C(\mathcal{X},\mathbb{K})$ до простору $\mathcal{X}$ позначається $\mathcal{X}'$. Для оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ його спряжений оператор $A^* \in \mathcal{L}(Y^a, X^a)$ визначається рівністю $f(Ax) = (A^*f)(x)$, $x \in X$, $f \in Y^a$.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60B11, 60B05, 60G60, 60G12, 60G20.

Робота виконана при частковій підтримці фонду "Відродження" за програмою ISSEP.

Лінійні простори X та Y знаходяться у двоїстості з функціоналом спарування $\langle\cdot,\cdot\rangle$, якщо відображення $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$, $(x,y)\in X\times Y$ є білінійним функціоналом, що розділяє елементи цих просторів

$$(\forall x\in X, x\neq 0)\quad(\exists y\in Y)\colon\langle x,y\rangle\neq 0,$$
$$(\forall y\in Y, y\neq 0)\quad(\exists x\in X)\colon\langle x,y\rangle\neq 0.$$

Той факт, що простори X, Y знаходяться у двоїстості із спаруванням $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначається $\langle X,Y\rangle$, така пара просторів називається дуальною. Надалі для нас важливими випадками просторів у двоїстості будуть:

1) пара $\langle X,X^a\rangle$, де двоїстість визначається білінійним функціоналом $\langle x,f\rangle = f(x)$ або $\langle f,x\rangle = f(x)$, $x\in X$, $f\in X^a$;
2) пара $\langle\mathcal{X},\mathcal{X}'\rangle$, де $\mathcal{X}$ — локально опуклий простір, $\mathcal{X}'$ його топологічно спряжений, а спарування має вигляд $\langle x,f\rangle = f(x)$ $x\in\mathcal{X}$, $f\in\mathcal{X}'$.

Для просторів у двоїстості $\langle X,Y\rangle$ локально опукла топологія $\varkappa$ в X узгоджується із двоїстістю, якщо $Y = X'_\varkappa$, де $X'_\varkappa$ — простір усіх лінійних неперервних в топології $\varkappa$ функціоналів на X. Найслабша з таких топологій — слабка топологія $\sigma(X,Y)$ в X, що визначається системою переднорм $p_y(x) = |\langle x,y\rangle|$, $y\in Y$, а найсильніша — топологія Маккі $\tau(X,Y)$, тобто топологія рівномірної збіжності на всіх абсолютно опуклих $\sigma(Y,X)$ — компактних множинах з $Y = X'_\sigma$. Для локально опуклого простору $\mathcal{X}$ через $\beta(\mathcal{X}',\mathcal{X})$ позначається сильна топологія в $\mathcal{X}'$, тобто топологія рівномірної збіжності на обмежених підмножинах з $\mathcal{X}$.

Нехай $\mathcal{X}$ локально опуклий простір з топологією α і $R(X,\alpha)$ — сукупність всіх гільбертових переднорм q на $\mathcal{X}$, що є неперервними в топології α. Позначимо через $\overline{X}_q$ поповнення фактор-простору $X_q = X_q/N_q$, де $N_q = \{x\in\mathcal{X}\colon q(x) = 0\}$ відносно переднорми q з $R(x,\alpha)$ і через $\overline{Q}_q$ відображення вигляду $\overline{Q}_q = i_qQ_q$, де Q_q — канонічне відображення $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}_q$, а i_q — природне укладення $\mathcal{X}_q$ в $\overline{\mathcal{X}}_q$. Нехай для додатного оператора Гільберта–Шмідта S в $\overline{\mathcal{X}}_q$ переднорма p визначається рівністю $p(x) = q(S\overline{Q}_qx)$. Систему подібних переднорм позначимо через $\mathcal{P}(\mathcal{X},\alpha)$. Топологію в $\mathcal{X}$, що породжується $\mathcal{P}(\mathcal{X},\alpha)$, називають ядерною топологією $\tau_s(\mathcal{X},\alpha)$, що асоційована з топологією α. Локально опуклий простір $(\mathcal{X},\alpha)$ називається ядерним, якщо $\tau_s(\mathcal{X},\alpha) = \alpha$. Зауважимо, що простір $(\mathcal{X},\sigma)$ — ядерний і будь-яка ядерна топологія в $\mathcal{X}$ сильніша слабкої топології $\sigma(\mathcal{X},\mathcal{X}')$, а у випадку гільбертового простору $\mathcal{X}$ $\mathcal{P}(\mathcal{X},\alpha)$ складається з переднорм вигляду $p_s(x) = \|Sx\|$, де S пробігає сукупність всіх невід'ємних операторів Гільберта–Шмідта.

Якщо $\langle X,Y\rangle$ пара лінійних просторів у двоїстості, то через $\mathfrak{C}_X$ позначається алгебра циліндричних множин простору Y, побудована за елементами простору X. Зауважимо, що алгебру $\mathfrak{C}_X$ можна описати як об'єднання всіх σ-алгебр $\mathfrak{C}_\lambda$, що є прообразами борельових σ-алгебр $\mathfrak{B}(Y/Y_\lambda)$ відносно канонічних відображень $Q_\lambda\colon Y\to Y/Y_\lambda$ для всіх можливих фактор-просторів Y/Y_λ по $\sigma(Y,X)$ — замкнених підпросторах $Y_\lambda\subset Y$ скінченної коразмірності,

$$\mathfrak{C}_\lambda = \{y\in Y\colon Q_\lambda y\in B, B\in\mathfrak{B}(Y/Y_\lambda)\}.$$

Простір $(X,\mathfrak{C}_Y)$, де $\langle X,Y\rangle$ — простори у двоїстості, називається вимірним лінійним простором. Якщо $(X_1,\mathfrak{C}_{Y_1})$ і $(X_2,\mathfrak{C}_{Y_2})$ — вимірні лінійні простори, то лінійне відображення $f\colon X_1\to X_2$ є вимірне при виконанні умови $(\forall C\in\mathfrak{C}_{Y_2})\colon f^{-1}(C)\in\mathfrak{C}_{Y_1}$. Для вимірності f достатньо (але не необхідно), щоб воно було неперервним при наділенні X_1 і X_2 топологіями $\sigma(X_1,Y_1)$ та $\sigma(X_2,Y_2)$ відповідно. Функція $g\colon X\to\mathcal{U}$, де $(\mathcal{U},\mathfrak{A})$ — деякий вимірний простір, називається циліндричною, якщо вона вимірна, як відображення $g\colon(X,\mathfrak{C}_Y)\to(\mathcal{U},\mathfrak{A})$.

Для локального опуклого простору $\mathcal{X}$ із спряженим простором $\mathcal{X}'$, що наділений $\sigma(\mathcal{X}', \mathcal{X})$-топологією, $\mathfrak{L}_{\mathcal{X}}$ буде позначати алгебру циліндричних множин в $\mathcal{X}'$, побудовану за елементами простору $\mathcal{X}$. Циліндрична міра ν на $(\mathcal{X}', \mathfrak{L}_{\mathcal{X}})$ називається $\mathcal{X}$-регулярною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така компактна в $\mathcal{X}'_\sigma$ підмножина K_ε, що для кожної $\mathcal{X}$-циліндричної множини C, що лежить зовні $K_\varepsilon (C \cap K_\varepsilon = \varnothing)$, $\nu(C) < \varepsilon$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — деякий імовірнісний простір і $L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — алгебра всіх $\mathbb{K}$-значних випадкових величин на ньому (як звичайно P-еквівалентні величини не розрізняються). На $L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = L_0(\Omega)$ будуть розглядатися збіжності за розподілом, або ж ймовірністю. Останні відповідають метриці $\rho(\xi, \eta) = \mathsf{E}(|\xi - \eta| \ / \ 1 + |\xi - \eta|)$ $\xi, \eta \in L_0(\Omega)$.

Якщо $\langle X, Y \rangle$ — пара лінійних просторів у двоїстості, то під X-слабким випадковим елементом ξ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ з значеннями у просторі Y розуміється X-слабко вимірне відображення $\xi \colon \Omega \to Y$, тобто $(\forall x \in X) \colon \langle x, \xi(w) \rangle \in L_0(\Omega)$. Якщо $\mathcal{Y}$ — локально опуклий простір. то слабкий випадковий елемент в $\mathcal{Y}$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — це $\mathcal{Y}'$-слабкий випадковий елемент. X-слабкий елемент ξ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ має p-тий слабкий порядок, $p > 0$, якщо $(\forall x \in X) \colon \langle x, \xi \rangle \in L_p((\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})) = L_p(\Omega)$.

2. Випадкові лінійні функціонали. Їх розподіли та характеристичні функціонали

Випадковим лінійним функціоналом Ξ відносно $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ на лінійному просторі X називається лінійне відображення $\Xi \colon X \to L_0(\Omega)$. Множина усіх таких функціоналів $\mathfrak{M}(\Omega; X) = \mathcal{L}(X, L_0(\Omega))$ є лінійним простором, а також правим унітарним модулем над алгеброю операторів $\mathcal{L}(X)$. Звичайно, що X^a є підпростором $\mathfrak{M}(\Omega; X)$. Функціонал $\Xi \in \mathfrak{M}(\Omega; \mathcal{X})$, де $\mathcal{X}$ — лінійний топологічний простір, називається неперервним (неперервним за ймовірністю), якщо для будь-якої сітки елементів $\{x_n, n \in N\}$ в $\mathcal{X}$, що збігається до $x \in \mathcal{X}$, $\lim_{n \in N} x_n = x$, сітка Ξx_n збігається до Ξx за розподілом (за ймовірністю). Лінійний простір випадкових лінійних неперервних функціоналів позначимо через $\mathfrak{M}^c(\Omega; \mathcal{X})$. Очевидно, що $\mathcal{X}'$ є підпростором $\mathfrak{M}^c(\Omega; \mathcal{X})$.

Позначимо через $C^Y_{x_1, \ldots, x_n}(B)$, де $x_1, \ldots, x_n \in X$ і B — борельова множина в $\mathbb{K}^n$, циліндричну множину в просторі Y вигляду

$$C^Y_{x_1, \ldots, x_n}(B) = \{y \in Y \colon (\langle x_1 y \rangle, \ldots, \langle x_n, y \rangle) \in B\}.$$

Ці множини утворюють алгебру $\mathfrak{L}_X$ X-циліндричних множин в Y, на якій випадковий функціонал $\Xi \in \mathfrak{M}(\Omega; X)$ породжує циліндричну ймовірнісну міру

$$P_\Xi\big(C^Y_{x_1, \ldots, x_n}(B)\big) = \mathsf{P}\{w \in \Omega \colon ((\Xi x_1), \ldots, (\Xi x_n)) \in B\}.$$

Цю міру P_Ξ природно називати розподілом функціоналу Ξ.

Випадковий функціонал $\Xi \in \mathfrak{M}(\Omega; X)$ визначає на просторі X функціонал $\chi_\Xi(x) = \mathsf{E}\exp(i(\Xi x))$, $x \in X$, що називається характеристичним функціоналом для Ξ. Оскільки для кожного $x \in X$ $\exp\{i \langle x, y \rangle\}$ є обмеженою циліндричною функцією на Y, то

$$\chi_\Xi(x) = \int_Y \exp\{i \langle x, y \rangle\} P_\Xi(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz} P^x_\Xi(dz),$$

де $P^x_\Xi(B) = P_\Xi\{y \in Y \colon \langle x, y \rangle \in B\}$ — одновимірна проекція P_Ξ на $\boldsymbol{R}$. Звідси χ_Ξ є додатно визначеною комплекснозначною функцією на X, звуження котрої на кожний скінченновимірний підпростір L з X є неперервним у точці $x = 0$ та $\chi_\Xi(0) = 1$. Функціонал χ_Ξ випадкового функціоналу Ξ однозначно визначає всі скінченновимірні проекції розподілу P_Ξ ([1], проп. 3.2, с. 42). Якщо $\mathcal{X}$ — лінійний топологічний простір і Ξ — неперервний випадковий лінійний функціонал на $\mathcal{X}$, то $\chi_\Xi(x)$, $x \in \mathcal{X}$ є неперервною додатно визначеною функцією.

3. Випадкові лінійні функціонали як узагальнені випадкові елементи в дуальному просторі

Нехай простір X знаходиться у двоїстості з простором Y відносно спарування $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тоді кожний X-слабкий випадковий елемент $\xi(w)$ $w\in\Omega$ зі значеннями в Y утворює випадковий лінійний функціонал $\Psi_\xi\in\mathfrak{M}(\Omega;X)$ за формулою

$$\Psi_\xi x=\langle x,\xi(w)\rangle\,,\qquad w\in\Omega.$$

Обернене твердження, взагалі кажучи, хибне. Досить розглянути, наприклад, випадок, коли $\Omega=[0,1]$, $X=L_2[0,1]$ і випадковий функціонал Ξ, що дорівнює тотожньому операторові I в $L_2[0,1]$, $\Xi=I\colon L_2[0,1]\to L_2[0,1]$.

Якщо для випадкового функціоналу $\Xi\in\mathfrak{M}(\Omega;X)$ існує такий X-слабкий елемент ξ в Y, що для всіх $x\in X$ маємо $\Xi x=\langle x,\xi\rangle$, то випадковий функціонал Ξ будемо називати регулярним. В протилежному разі функціонал Ξ будемо називати сингулярним. Неважко переконатись, що усі випадкові лінійні функціонали Ξ в скінченновимірному просторі X є регулярними і породжуються певними випадковими векторами з X^a. Дійсно, якщо $\{e_i\}_{i=1}^n$ базис в X, то для будь-якого вектора $x=\sum_{i=1}^n a_ie_i$ з X, $\Xi x=\sum_{i=1}^n a_i\xi_i$, де випадкові величини $\xi_i=\Xi e_i$. Отже, наявність сингулярних випадкових функціоналів є специфічною для нескінченновимірних лінійних просторів.

Ясно, що питання регулярності випадкових лінійних функціоналів безпосередньо пов'язане з питанням про продовження циліндричних ймовірнісних мір на лінійних просторах, якому присвячена значна література (див., наприклад, [1]–[4]). Наведемо декілька типових результатів про регулярність випадкових функціоналів.

Нехай $\mathcal{X}$ — банахів простір. Циліндрична ймовірнісна міра μ на $\mathcal{X}$ називається радонівською, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує такий компакт K в $\mathcal{X}$, що $\mu(K+N)\geq 1-\varepsilon$ для всіх підпросторів N в $\mathcal{X}$, що мають скінченну корозмірність.

Теорема 1. *Лінійний випадковий функціонал $\Xi\in\mathfrak{M}(\Omega,\mathcal{X}')$ є регулярним, що породжується деяким сильно вимірним випадковим елементом $\xi\colon\Omega\to\mathcal{X}$,*

$$\Xi f=\langle\xi,f\rangle\,,\qquad f\in\mathcal{X}',$$

тоді і лише тоді, коли його розподіл P_Ξ є радонівською циліндричною мірою. При цьому P_Ξ однозначно продовжується до регулярної міри $\widetilde{P}_\Xi$ на σ-алгебрі борельових множин простору $\mathcal{X}$ і $\widetilde{P}_\Xi$ збігається з образом $\xi(P)$ міри P відносно відображення ξ.

Доведення цієї теореми можна знайти в [2], [3], або [4].

Теорема 2. *Лінійний випадковий функціонал $\Xi\in\mathfrak{M}(\Omega;X)$, де $\mathcal{X}$ — нормальний простір, є регулярним, що породжується $\mathcal{X}$-сепарабельним випадковим елементом в $\mathcal{X}'$ тоді і лише тоді, коли виконується одна з еквівалентних умов:*

1) *якщо $\|x_n\|\to 0$, то $\Xi x_n\to 0$ майже напевно;*
2) *якщо $\|x_n\|\leq 1$, то $\sup_n|\Xi x_n|<\infty$ майже напевно;*
3) *множина $S=\{\Xi x\colon\|x\|\leq 1\}$ порядково обмежена в $L_0(\Omega)$, тобто існує така випадкова величина $\eta\in L_0(\Omega)$, що $|\zeta|\leq\eta$ для всіх $\zeta\in S$.*

Наслідок. *Функціонал $\Xi\in\mathcal{L}_c(\mathcal{X},L_\infty(\Omega))$ є регулярним.*

Дійсно з неперервності Ξ випливає обмеженість $\Xi(\{x\in\mathcal{X}\colon\|x\|\leq 1\})$ в $L_\infty(\Omega)$, і отже порядова обмеженість Ξ в $L_0(\Omega)$.

Доведення теореми 2 можна знайти в [5], Теорема 1.2, с. 87.

Інші результати, пов'язані з умовами регулярності випадкових лінійних функціоналів подаються у §5 та §8 цієї статті.

Зауважимо, що для широкого класу просторів Y для кожної циліндричної ймовірнісної міри P' на Y існує такий ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ та такий випадковий лінійний функціонал $\Xi \in \mathfrak{M}(\Omega, Y')$, що $P' = P_\Xi$ (див. [2]–[4]).

В загальному випадку кожна циліндрична ймовірнісна міра μ на вимірному лінійному просторі $(Y, \mathfrak{C}_X)$ (в тому числі розподіл випадкового функціоналу $\Xi \in \mathfrak{M}(\Omega; X)$) може бути перетворена в σ-адитивну міру шляхом розширення простору Y. Якщо $Y = X'$, то це розширення складається з деякої сукупності функцій на X, що не обов'язково є лінійними неперервними функціоналами (див. [1], Теорема 3.1, с. 40). Це разом з попередніми результатами дає змогу трактувати випадкові лінійні функціонали в лінійному просторі X як узагальнені (або циліндричні) випадкові елементи в дуальному просторі Y.

4. Випадкові лінійні функціонали порядку p та їхні моментні оператори

Випадковим лінійним функціоналом порядку p, $p \geq 1$ відносно ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ на лінійному просторі X називається лінійне відображення $\Xi: X \to L_p(\Omega)$.

Множина усіх таких функціоналів $\mathfrak{M}_p(\Omega; X) = \mathcal{L}(X, L_p(\Omega))$ є лінійним простором та правим унітарним модулем над алгеброю операторів $\mathcal{L}(X)$. Очевидно, що при $1 \leq p \leq q$ мають місце включення

$$\mathfrak{M}(\Omega; X) \supset \mathfrak{M}_p(\Omega; X) \supset \mathcal{M}_q(\Omega; X) \supset X^a. \tag{1}$$

Зауважимо, що модульна структура $\mathfrak{M}_2(\Omega; X)$ відіграє в корреляційній теорії випадкових лінійних функціоналів другого порядку роль подібну до лінійної структури простору $L_2(\Omega)$ у корреляційній теорії випадкових величин другого порядку.

У випадку, коли $\mathcal{X}$ — лінійний топологічний простір, доцільно розглядати неперервні випадкові лінійні функціонали $\Xi \in \mathfrak{M}_p^c(\Omega; X) = \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, L_p(\Omega))$. Якщо $\mathcal{X}$ — нормований простір, то $\mathfrak{M}_p^c(\Omega; \mathcal{X})$ є банаховим простором зі звичайною нормою

$$\|\Xi\| = \sup\{\|\Xi x\|_{L_p(\Omega)} : \|x\| \leq 1\}.$$

Тоді в термінах розподілу P_Ξ включення $\Xi \in \mathfrak{M}_p^c(\Omega; \mathcal{X})$ рівнозначне існуванню рівномірного p-того слабкого моменту циліндричної міри P_Ξ:

$$\alpha_p(\Xi) = \sup\left\{\int_{\mathcal{X}'} |\langle x, f\rangle|^p \, dP_\Xi(f) : \|x\| \leq 1, x \in \mathcal{X}\right\}.$$

Нехай n — натуральне число, $n \leq p$, та $\Xi_j \in \mathfrak{M}_p(\Omega; X_j)$, $j = 1, \ldots, n$, причому не виключається, що деякі або навіть усі лінійні простори X_j збігаються і те ж саме стосується функціоналів Ξ_j за умови, що вони задані на тому ж самому просторі. Тоді рівність

$$\mathcal{M}_{\Xi_1,\ldots,\Xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{E}\left(\prod_{j=1}^{n} (\Xi_j x_j)\right), \qquad x_j \in X_j$$

визначає на прямому добуткові X просторів X_j, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ n-лінійну форму $\mathcal{M}_{\Xi_1,\ldots,\Xi_n}$, що називається моментною формою n-того порядку випадкових функціоналів Ξ_j, $j = 1, \ldots, n$. Моментній формі $\mathcal{M}_{\Xi_1,\ldots,\Xi_n}$ однозначно відповідає полілінійний оператор

$$\mathcal{M}_{\Xi_1,\ldots,\Xi_n} \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, \ldots, \mathcal{L}(X_n, \mathbb{K}))\ldots) = \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, \ldots, \mathcal{L}(X_n^a))\ldots),$$

що називається моментним оператором n-ного порядку випадкових функціоналів Ξ_j та визначається рівністю

$$\mathcal{M}_{\Xi_1,\ldots,\Xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = (\ldots((\mathcal{M}_{\Xi_1,\ldots,\Xi_n}x_n)x_{n-1})\ldots)x_1, \qquad x_j \in X_j.$$

Оператор M_{Ξ_j} першого порядку природно називати математичним сподіванням випадкового лінійного функціоналу $\Xi_j \in \mathfrak{M}_p(\Omega; X_j)$ і позначити його $\mathsf{E}\,\Xi_j$. При цьому очевидно, що $\mathsf{E}\,\Xi_j \in X_j^a$ та $\mathsf{E}(\Xi_j x) = (\mathsf{E}\,\Xi_j)(x)$, $x \in X_j$. Оператори M_{Ξ_j,Ξ_k} другого порядку у випадку дійсних просторів X_j та X_k називаються кросс-корреляційними операторами пар функціоналів Ξ_j, Ξ_k другого порядку і позначаються $[\Xi_j, \Xi_k]$. При цьому очевидно, що $[\Xi_j, \Xi_k] \in \mathcal{L}(X_k, X_j^a)$ і для всіх $x_k \in X_k$, $x_j \in X_j$

$$([\Xi_j, \Xi_k]x_k)(x_j) = \mathsf{E}(\Xi_j x_j)(\Xi_k x_k).$$

У випадку комплексних просторів X_j та X_k кросс-корреляційний оператор $[\Xi_j, \Xi_k]$ є антилінійним оператором, що діє з X_k в X_j та визначається рівністю

$$([\Xi_j, \Xi_k]x_k)(x_j) = \mathsf{E}(\Xi_j, x_j)\overline{(\Xi_k, x_k)}, \qquad x_k \in X_k,\ x_j \in X_j.$$

Надалі простір антилінійних операторів, що діють з X_k в X_j^a, будемо позначати $\overline{\mathcal{L}}(X_k, X_j^a)$. Оператор $[\Xi, \Xi]$ називається корреляційним оператором випадкового лінійного функціоналу Ξ другого порядку.

Завдяки включенню (1) випадкові лінійні функціонали Ξ в $\mathfrak{M}_h(\Omega; X)$ можна центрувати, переходячи до функціоналів $\Xi - \mathsf{E}\,\Xi$ з $\Xi(\Xi - \mathsf{E}\,\Xi) = 0$. Це дає змогу розглядати кросс-корреляційні оператори

$$\mathrm{Cov}(\Xi, \Lambda) = [\Xi - \mathsf{E}\,\Xi, \Lambda - \mathsf{E}\,\Lambda],$$

а також коваріаційні (дисперсні) оператори $\mathrm{Cov}(\Xi\Xi) = D(\Xi)$ для випадкових функціоналів $\Xi \in \mathfrak{M}_2(\Omega; X)$, $\Lambda \in \mathfrak{M}_2(\Omega; Y)$.

Для лінійних топологічних просторів $\mathcal{X}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ і неперервних лінійних випадкових функціоналів $\Xi_j \in \mathfrak{M}_p^c(\Omega; \mathcal{X}_j)$ моментні форми цих функціоналів є неперервними. Зокрема, для $\Xi \in \mathfrak{M}_p^c(\Omega; \mathcal{X})$, $\Lambda \in \mathfrak{M}_p^c(\Omega; Y)$ маємо, що $\mathsf{E}\,\Xi \in \mathcal{X}'$ та $[\Xi, \Lambda] \in \overline{\mathcal{L}}_c(\mathcal{Y}, \mathcal{X}')$ (для випадку комплексних просторів). Якщо $\mathcal{X}_j$ — нормовані простори, то моментні оператори є обмеженими і, наприклад, для $\Xi \in \mathfrak{M}_2^c(\Omega; \mathcal{X})$ та $\Lambda \in \mathfrak{M}_p^c(\Omega; \mathcal{Y})$ маємо, що $\|[\Xi, \Lambda]\| \le \|\Xi\| \cdot \|\Lambda\|$.

5. Умови регулярності випадкових лінійних функціоналів

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{X}$ — локально опуклий сепарабельний простір і Ξ — випадковий неперервний лінійний функціонал на $\mathcal{X}$ з $\mathfrak{M}^c(\Omega; \mathcal{X})$ або $\mathfrak{M}_p^c(\Omega; \mathcal{X})$, $p \ge 0$. Нехай виконується одна з таких умов:*

1) *розподіл P_Ξ є регулярною циліндричною мірою;*

2) *характеристичний функціонал $\chi_\Xi(x)$, $x \in \mathcal{X}$ є неперервним в ядерній топології $\tau_s(\mathcal{X}, \alpha)$, що відповідає будь-якій топології α простору $\mathcal{X}$, узгодженій з двоїстістю $\mathcal{X}$ і $\mathcal{X}'$;*

3) *при $\Xi \in \mathfrak{M}_p^c(\Omega; \mathcal{X})$, $p \ge 2$ корреляційна форма $B_\Xi(x, z) = ([\Xi, \Xi]z)(x)$ неперервна в ядерній топології $\tau_s(\mathcal{X})$.*

Тоді функціонал Ξ є регулярним, тобто існує такий $\mathcal{X}$-слабкий випадковий елемент ξ в $\mathcal{X}'$, що $\Xi x = \langle x, \xi \rangle$ для всіх $x \in \mathcal{X}$.

Доведення. Якщо виконана одна з умов 1)–3), то за результатами [1] (Теорема 1.1, с. 124, Твердження 1.3, с. 124, Теорема 1.8, с. 138) циліндрична ймовірнісна міра P_Ξ є σ-адитивною на $\mathfrak{L}_\mathcal{X}$ і отже може бути продовженою до σ-адитивної міри $\widehat{P}_\Xi$

на циліндричній σ-алгебрі $\widehat{\mathfrak{L}}_{\mathcal{X}}$ простору $\mathcal{X}'$, тобто найменшій σ-алгебрі, що породжується $\mathfrak{L}_{\mathcal{X}}$.

Позначимо через $\mathbb{K}^\infty$ зчисленний степінь поля $\mathbb{K}$. Нехай $\{x_i\}$ зчислена щільна скрізь множина в $\mathbb{K}^\infty$. Покладемо $\zeta_i(w) = \Xi x_i$, $w \in \Omega$; $\xi(w) = \{\zeta_i(w)\}$, $\Gamma x' = \{\langle x_i, x'\rangle\}$, $x' \in \mathcal{X}'$. $\Gamma \in \widehat{\mathfrak{L}}_{\mathcal{X}}$-вимірним лінійним відображенням $\mathcal{X}'$ в $\mathbb{K}^\infty$ і $\zeta \in \mathcal{F}$-вимірною $\mathbb{K}^\infty$-значною функцією на Ω. Розглянемо тепер канонічну сюр'єкцію Q_n з $\mathbb{K}^\infty$ на $\mathbb{K}^n$ та покладемо $\Gamma_n = Q_n\Gamma$ і $\eta_n = Q_n\zeta$. Для борельової множини B з $\mathbb{K}^\infty$ позначимо $\Delta = \{x' \in \mathcal{X}' \colon \Gamma_n x' \in B\}$, $\Delta_\Xi = \{w \in \Omega \colon \eta_n(w) \in B\}$, $\Delta_0 = \{k \in \mathbb{K}^\infty \colon Q_n k \in B\}$. Тоді маємо, що $\Delta = \Gamma^{-1}(\Delta_0)$ та $\Delta_\Xi = \zeta^{-1}(\Delta_0)$, звідки

$$[\Gamma(\widehat{P}_\Xi)](\Delta_0) = P_\Xi(\Delta) = P(\Delta_\Xi) = [\zeta(P)](\Delta_0) = P_\zeta(\Delta_0). \tag{2}$$

Оскільки борелева σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{K}^\infty)$ на $\mathbb{K}^\infty$ породжується множинами вигляду Δ_0, то з рівності (2) випливає, що образи мір $\widehat{P}_\Xi$ та P відносно відображень Γ і ζ збігаються. Скористаємося тепер регулярністю міри P_Ξ та оберемо в $\mathcal{X}'$ (що наділена $\sigma(\mathcal{X}', \mathcal{X})$-топологією) таку послідовність компактних множин K_m, що

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{P}_\Xi(K_m) = 1,$$

та покладемо

$$\Omega_0 = \left\{ w \in \Omega \colon \zeta(w) \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma(K_m) \right\}.$$

Тоді маємо, що

$$P(\Omega_0) = P_\zeta\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma(K_m)\right) = [\Gamma(\widehat{P}_\Xi)]\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma(K_m)\right) = \widehat{P}_\Xi\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m\right) = 1.$$

Виберемо для кожного $w \in \Omega_0$

$$\xi(w) \in \Gamma^{-1}(\zeta(w)) \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

Тоді отримаємо $\mathcal{X}'$-значну функцію $\xi(w)$ на Ω_0, що визначена майже скрізь на Ω, для якої

$$\Xi x_i = \langle x_i, \xi(w)\rangle, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

завдяки рівності

$$(\langle x_i, \xi(w)\rangle) = \Gamma(\zeta(w)) = \zeta(w) = (\zeta_i(w)), \qquad w \in \Omega_0.$$

Отже маємо, що $\Xi x = \langle x, \xi(w)\rangle$ для усіх $x \in \mathcal{X}$.

Теорему доведено. $\square$

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{X}$ — локально опуклий простір, Ξ — випадковий неперервний лінійний функціонал на $\mathcal{X}$ другого порядку і H_Ξ позначає простір значень Ξ, тобто замкнення у середньому квадратичному множини випадкових величин $\{\Xi x, x \in \mathcal{X}\}$. Якщо виконується одна з умов 1)–3) попередньої теореми 1, то функціонал Ξ допускає факторизацію $\Xi = V\Psi$, де Ψ — деякий регулярний випадковий неперервний лінійний функціонал другого порядку, а V — ізометричний оператор, що відображає H_Ψ на H_Ξ.*

Доведення. Якщо виконується одна з умов 1)–3) попередньої теореми, то, як було показано при її доведенні, існує σ-адитивне продовження $\widehat{P}_\Xi$ розподілу P_Ξ на циліндричну σ-алгебру $\widehat{\mathfrak{L}}_{\mathcal{X}}$ і, отже, $(\mathcal{X}', \widehat{\mathfrak{L}}_x, \widehat{P}_\Xi)$ є ймовірнісним простором. Безпосередньо заданий на ньому випадковий елемент $\zeta(y) = y$, $y \in \mathcal{X}'$ є, очевидно, $\mathcal{X}$-слабко вимірний і має слабкий другий порядок: для довільних $x, z \in \mathcal{X}$

$$\mathsf{E}\,\langle x, \zeta\rangle\,\overline{\langle z, \zeta\rangle} = \int_{\mathcal{X}'} \langle x, y\rangle\,\overline{\langle z, y\rangle}\widehat{P}_{\Xi}(dy) = \int_{\mathcal{X}'} \langle x, y\rangle\,\overline{\langle z, y\rangle}\widehat{p}_{\Xi}(dy) = \mathsf{E}(\Xi x)(\overline{\Xi z}),$$

бо функція $\varphi(y) = \langle x, y\rangle\,\langle\overline{z, y}\rangle$ є циліндричною на $\mathcal{X}'$.

Звідси випливає, що випадковий елемент ζ в $\mathcal{X}'$ породжує випадковий неперервний лінійний функціонал другого порядку $\Psi\colon \mathcal{X} \to L_2(\mathcal{X}', \widehat{\mathfrak{C}}_{\mathcal{X}}, \widehat{P}_{\Xi})$ рівністю

$$\Psi x = \langle x, \zeta\rangle\,, \qquad x \in \mathcal{X}. \tag{3}$$

Розглянемо тепер на просторі $\mathcal{X}$ дві комплекснозначні випадкові функції другого порядку $\xi(x) = \Xi x$ та $\eta(x) = \Psi x$, $x \in \mathcal{X}$. Тоді H_{Ξ} і H_{Ψ}, що є замкненими підпросторами гільбертових просторів $L_2(\Omega)$ і $L_2(\mathcal{X}', \widehat{\mathfrak{C}}_{\mathcal{X}}, \widehat{P}_{\Xi})$ відповідно, є просторами значень цих функцій. Завдяки рівностям (2), (3) корреляційні функції $\xi(x)$ та $\eta(x)$ збігаються

$$\mathsf{E}\,\xi(x)\overline{\xi(x)} = \mathsf{E}(\Xi x)(\overline{\Xi z}) = \int_{\mathcal{X}'} \langle x, y\rangle\,\langle\overline{z, y}\rangle\,\widehat{P}_{\Xi}(dy) = \mathsf{E}(\Psi x)(\overline{\Psi z}) = \mathsf{E}\,\eta(x)\overline{\eta(z)},$$

$$x, z \in \mathcal{X}.$$

Отже існує такий ізометричний оператор V, який відображає H_{Ψ} на H_{Ξ}, що для всіх $x \in \mathcal{X}$ маємо $V\eta(x) = \xi(x)$, тобто $\Xi = V\Psi$. Теорему доведено. □

Наведемо тепер теорему про умови регулярності лінійних функціоналів другого порядку в гільбертовому просторі H, що є розширеним варіантом подібної теореми з [6].

Теорема 3. *Нехай Ξ — неперервний випадковий лінійний функціонал другого порядку в гільбертовому просторі H, $\Xi \in \mathfrak{M}_2^c(\Omega; H)$. Тоді такі твердження є еквівалентними:*

1) *функціонал Ξ є регулярним, що породжується сильно вимірним випадковим елементом ξ в H з сильним другим порядком,* $\mathsf{E}\,\|\xi(w)\|^2 < \infty$;
2) *Ξ є оператором Гільберта–Шмідта, що діє з H в $L_2(\Omega)$;*
3) *множина випадкових величин $S = \{\Xi h : \|h\| \le 1\}$ є порядково обмеженою в $L_2(\Omega)$;*
4) *корреляційний оператор $R \in \mathcal{L}(H)$ функціоналу Ξ, що визначається рівністю $\mathsf{E}(\Xi x)(\overline{\Xi y}) = (x \mid Ry)$, $x, y, \in H$, де $(\cdot \mid \cdot)$ — скалярний добуток в H, є ядерним (зауважимо, що при цьому $\operatorname{Tr} R = \mathsf{E}\,\|\xi\|^2$ і $R = \Xi^*\Xi$).*

Доведення. Нехай Ξ породжується сильно вимірним випадковим елементом $\xi(w)$, $w \in \Omega$ в H, $\mathsf{E}\,\|\xi\|^2 < \infty$, тобто для всіх $x \in H$, $\Xi x = (x \mid \xi)$, і $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — довільний ортонормований базис в H. Тоді норма Гільберта–Шмідта $\|\Xi\|$ пов'язана з $\mathsf{E}\,\|\xi\|^2$ та $\operatorname{Tr} R$ рівностями

$$\|\Xi\| = \Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \|\Xi e_\lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} = (\operatorname{Tr} R)^{1/2} = \Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \|(e_\lambda \mid \xi)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$$
$$= (\mathsf{E}\,\|\xi\|^2)^{1/2} < +\infty.$$

Отже мають місце твердження 2) та 4). Навпаки, якщо $\|\Xi\|$, то множина індексів λ, для яких $\|\Xi e_\lambda\|^2_{L_2(\Omega)} > 0$, не більш ніж зчисленна і ряд

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \xi_\lambda e_\lambda, \qquad \xi_\lambda = \Xi e_\lambda \in L_2(\Omega)$$

збігається в H до сепарабельнозначного випадкового елемента $\xi(w)$, $w \in \Omega$ в H і при цьому

$$\mathsf{E}\,\|\xi\|^2 = \mathsf{E}\Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda}\xi_\lambda e_\lambda\Big\|^2 = \|\Xi\|^2 < +\infty.$$

Очевидно, що тоді для довільного $x \in H$ з коефіцієнтами Фур'є $\alpha_\lambda = (x \mid e_\lambda)$ справджується рівність

$$(x \mid \xi) = \sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda\xi_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}\Xi(\alpha_\lambda e_\lambda) = \Xi x$$

і таким чином виконується твердження 1). При цьому множина $S = \{\Xi h \colon \|h\| \le 1\}$ порядково обмежена в $L_2(\Omega)$, бо

$$|\Xi h| \le \|h\|\cdot\|\xi(w)\| \le \|\xi(w)\| \in L_2(\Omega).$$

Якщо ж має місце твердження 4), то $\|\Xi\| = (\operatorname{Tr} R)^{1/2} < +\infty$ і виконується твердження 2).

Нехай має місце твердження 3), тобто існує така випадкова величина $\eta \in L_2(\Omega)$, що $|\Xi h| \le \eta$ для всіх h з $\|h\| \le 1$. Позначімо через Ξ_n звуження Ξ на підпростір H_n в H, що породжується скінченною ортогональною системою $\{e_1, \dots, e_n\}$ в H. Тоді для $h \in H$ виконується рівність $\Xi h = \big(h \mid \sum_{i=1}^n (\Xi e_i)e_i\big)$ і отже

$$\sup\{|\Xi h| \colon \|h\| \le 1, h \in H_n\} = \Big\|\sum_{i=1}^n(\Xi e_i)e_i\Big\|_H = \Big(\sum_{i=1}^n|\Xi e_i|^2\Big)^{1/2} \le \eta.$$

Таким чином для кожної ортогональні послідовності (e_n) в H

$$\sum_n \mathsf{E}\,|\Xi e_n|^2 \le \mathsf{E}\,\eta^2 < +\infty,$$

тобто Ξ є оператором Гільберта–Шмідта. Теорему доведено. □

Наслідок. *Якщо $\mathcal{X}$ — локально опуклий простір і Ξ — випадковий функціонал з $\mathfrak{M}_2(\Omega;\mathcal{X})$, що допускає факторизацію вигляду $\Xi = \Psi A$, де Ψ — оператор Гільберта–Шмідта, діючий з деякого гільбертова простору H в $L_2(\Omega)$, а оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, H)$, то тоді функціонал Ξ є регулярним.*

Дійсно, тоді за теоремою 3 випадковий функціонал $\Psi \in \mathfrak{M}_2^c(\Omega, H)$ є регулярним, що породжується сильно вимірним випадковим елементом ξ в H, $\mathsf{E}\,\|\xi\|^2 < \infty$ і отже випадковий функціонал $\Xi \in \mathfrak{M}_2(\Omega;\mathcal{X})$ породжується $\mathcal{X}$-слабким випадковим елементом $\eta(w) = A^*\xi(w)$, $w \in \Omega$ в $\mathcal{X}'$, оскільки $A^* \in \mathfrak{L}(H, \mathcal{X}')$ і для будь-якого $x \in \mathcal{X}$ маємо

$$\Xi x = \Psi A x = (Ax \mid \xi)_H = \langle x, A^*\xi\rangle\,.$$

Зауважимо, що для сепарабельного гільбертового простору H завжди існує регуляризація випадкового функціоналу $\Xi \in \mathfrak{M}_2^c(\Omega; H)$ в так званому квазіядерному розширенні H_- простору H. Тобто за допомогою додатного самоспраженого оператора T в H, у якого T^{-1} є оператором Гільберта–Шмідта, можна побудувати таке оснащення простору H просторами H_+ і H_-, $H_+ \subset H \subset H_-$, що $\Xi x = (x \mid \xi)$, де ξ — сильно вимірний випадковий елемент в H_-, $\mathsf{E}\,\|\xi\|_-^2 < \infty$ (див. [7]).

Література

1. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, "Наука", Москва, 1983.
2. A. Badrikian, *Seminaire sur les fonctions aleatiores lineaires et les mesures cylindriques*, т. 139, Lecture Notes in Mathematics, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
3. L. Schwartz, *Randon measures jn arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford, Bombay, 1973.
4. А. Пич, *Операторные идеалы*, "Мир", Москва, 1982.
5. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, "Наука", Москва, 1985.
6. О. І. Пономаренко, *Про корреляційні ядра випадкових функцій із значеннями в просторі Гільберта*, Доповіді АН УРСР сер. А 1 (1968), 35–38.
7. Л. Л. Пономаренко, *Бесконечномерные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных с многопараметрическим броуновским движением*, Кибернетика 4 (1976), 98–106.

252127 КИЇВ-127, ПРОСПЕКТ АКАДЕМІКА ГЛУШКОВА, 6, КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Надійшла 28.03.94