Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 147–154

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 147–154

СТАБІЛЬНІСТЬ РЕКУРЕНТНОСТІ ТА ДИСИПАТИВНОСТІ ЗАГАЛЬНИХ ЯДЕР

УДК 519.21

Ю. П. ФІЛОНОВ

Анотація. Нехай $P(x, dy)$ та $\overline{P}(x, dy)$ загальні, незвідні невід'ємні ядра на деякому просторі та P — рекурентне (дисипативне) ядро. В статті доводяться достатні умови рекурентності (дисипативності) ядра $\overline{P}$, сформульовані в термінах оператора $\overline{P} - P$, гармонічних функцій оператора P та з використанням інформації про потенціал оператора P.

Вступ

Невід'ємне ядро $P = P(x, dy)$ (тобто вимірна функція за x та міра за dy) найчастіше зустрічається як перехідна ймовірність ($P1 \le 1$), але все більше ймовірнісних результатів викладають для загальних ядер. Тут ми назвемо монографії В. М. Шуренкова [1], Е. Нуммелина [2], на поняття та факти з яких будемо спиратися. В цій статті для загальних ядер подаємо умови стабільності властивостей рекурентності та дисипативності, аналогічні за формою умовам стабільності однорідних, з нестохастичними збуреннями ядер на дискретному просторі, наведеним в другому розділі книги [3], де є література з цього питання.

У роботі P та $\overline{P}$ — невід'ємні, Ψ — незвідні ядра в загальному просторі E з сепарабельною σ-алгеброю. Позначимо $J = P^0$ — одиничне ядро, $J_g(x, dy) = J(x, dy)g(y)$ — діагональне ядро, A — множину чи її індикатор 1_A, 1 — функцію, що тотожно дорівнює 1, Pf — функцію $\int f(y)P(x, dy)$, ΨP — міру $\int \Psi(dx)P(x, dy)$ (інтегрування за x), $f \cdot \Psi$ — ядро $f(x)\Psi(dy)$. Міра Ψ задовольняє умови $\Psi \sim \Psi G$ (де $G = \sum_0^\infty P^n$) та $GA > 0$ на E для будь-якої множини A додатної міри Ψ (тобто Ψ — максимальна серед мір, відносно яких ядро P незвідне). Усі ядра (тотожно — оператори), функції, міри є невід'ємними, міри — σ-скінченними, функції — вимірними та не дорівнюють тотожно нескінченності, якщо не припускається інше. Запис $P_1 = O(P_2)$ тотожний існуванню числа k, для якого $P_1 \le kP_2$. Майже усі співвідношення треба розуміти з додатком "Ψ — майже усюди", який ми не пишемо. Символи n, m, i, j, k використовуються тільки для натуральних чисел, ε, c — для додатних дійсних, g, τ — для супергармонічних функцій та мір (тобто за умови $Pg \le g$, $\tau P \le \tau$), h, π — гармонічних ($Ph = h$, $\pi P = \pi$), s, ν — мінорантних (тобто $s \cdot \nu = O(P^m)$ для деякого $m = m(s, \nu)$), при цьому ці функції та міри вважаємо не нульовими. Ядро P називаємо дисипативним, якщо $Gs < \infty$ та рекурентним, якщо $G(z)s < \infty$ для $z < 1$ (де $G(z) = \sum z^n P^n$), але $Gs = \infty$. За загальними фактами відносно цих понять відсилаємо до вказаних вище книг. Для аналогічних величин, пов'язаних з ядром $\overline{P}$, використовуємо риску ($\overline{h}$, $\overline{\tau}$, $\overline{\pi}$ і т.д.). Зауважимо,

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60J05, 60J10, 60J45.

що оскільки σ-алгебра сепарабельна, то існують ядра $\delta^{(\pm)}$ (де $\delta = \overline{P} - P$ — розклад Хана), $\overline{P} \wedge P = \overline{P} - \delta^{+}$ і т.д. Ми будемо вільно використовувати дуальні факти (заміняти в співвідношеннях функції на міри та навпаки за кофунктором).

У першому параграфі ми сформулюємо та доведемо деякі допоміжні факти з теорії потенціалу, більшість з яких має технічний характер та більш-менш близькі аналоги в математичній літературі. В другому параграфі ми доведемо сформульовані нижче теореми.

Теорема 1. *Нехай ядро P дисипативне, $\overline{g}$ є супергармонічною функцією для ядра $\overline{P}$, τ — супергармонічна міра для P, $P' = P \wedge \overline{P}$ — спільна частка, $\delta = \overline{P} - P$ — збурення. Якщо існує функція u з умовами*

$$P'u \le u \le Pu, \qquad u = O(\overline{g}), \qquad u \in \Psi^{+}$$

та виконується хоча б одна з нерівностей $\tau\delta^{-}u < \infty$ чи $\tau\delta^{+}\overline{g} < \infty$, то ядро $\overline{P}$ дисипативне.

Зауваження 1. В теоремі 1, на відміну від умов на малість $\delta = \overline{P} - P$, може виникнути питання про необхідність умови $u = O(\overline{g})$ (без якої для стохастичних ядер можна обійтись, якщо вважати, що $u = \overline{g} = 1$). Наведемо приклад, в якому P стохастичне і дисипативне, але $\overline{P}$ рекурентне (тобто існує єдина з точністю до пропорційності функція $\overline{g}$ з умовою $\overline{P}\overline{g} \le \overline{g}$), хоча обидві умови $\tau\delta^{-}u < \infty$ та $\tau\delta^{+}\overline{g} < \infty$ виконуються для довільної функції u та довільної супергармонічної міри τ.

Приклад. Нехай P — дисипативна стохастична матриця на просторі N невід'ємних цілих чисел, для якої позначимо $p_x = P(x, x+1)$, $q_x = P(x, 0) = 1 - p_x$. Якщо $r_x = \prod_0^{x-1} p_i$, $r_0 = 1$, то $r = \downarrow r_x (\neq 0)$ — імовірність неповернення в 0. Збільшимо тільки q_x таким чином: $q'_x = q_x + \varepsilon_x$ $(x \in N)$, щоб було $\sum_i r_i \varepsilon_i = r$, і це буде матриця $\overline{P}$. Розглянемо рівняння для $\overline{g}$ (при $\theta = 1$ для потенціалу $\{0\}$ і при $\theta = 0$ для гармонічної функції):

$$\overline{g}_{x-1} = q'_{x-1}\overline{g}_0 + p_{x-1}\overline{g}_x + \theta 1_{\{0\}}, \qquad (x = 1, 2, \dots).$$

Легко перевірити, що ця система еквівалентна системі послідовних різниць слідуючих рівнянь:

$$b_x \overline{g}_0 = \theta + r_x \overline{g}_x, \qquad (x > 0)$$

де позначено $b_x = r_x - \sum_0^{x-1} r_i \varepsilon_i$. Оскільки $b_x \downarrow 0$, то гармонічна функція $\overline{g}$ існує (є потрібний розв'язок при $\theta = 0$), але скінченного потенціалу нема (випадок $\theta = 1$). Таким чином ядро $\overline{P}$ рекурентне. Нерівність $\tau\delta^{-}u < \infty$ очевидна, оскільки $\delta^{-} = 0$. Нерівність $\tau\delta^{+}\overline{g} < \infty$ випливає з того, що $(\delta^{+}\overline{g})_x = \varepsilon_x g_0$, $\sum \varepsilon_x < \infty$, τ_x обмежена.

Зауваження 2. а) Якщо в наведеному прикладі рівність $\sum r_i \varepsilon_i = r$ замінити на нерівність ($<$), то P та $\overline{P}$ будуть задовольняти умови теореми 1 (де з необхідністю буде $u = 1$).

б) Цей же приклад дасть необхідність умови $\overline{u} = O(h)$ у теоремі 4, потрібно лише поміняти місцями P та $\overline{P}$ (тоді буде $\delta_2^{+} = 0$, $\overline{u} = 1$, P_1 — хоча б звуження P на $\{0\}$). В інших теоремах умова $(\cdot) = O(\cdot)$ аналогічно необхідна з причини нестохастичності.

Перейдемо до інших теорем. Для рекурентних ядер будемо віднімати "менші" частки, а для дисипативних залишків розглядати ядра подібні тим, що в теоремі 1, тобто далі буде: $P = P_1 + P_2$, $\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$, $P' = P_2 \wedge \overline{P}_2$ (усі ядра суттєво ненульові), $\delta_2 = \overline{P}_2 - P_2$, $G' = \sum P'^n$. Буде використовуватись норма $\|Q\|_f = \operatorname{ess\,sup}_\Psi \mathcal{J}_f^{-1} Qf$, де Q — деяке ядро, а J_f — діагональне ядро. За змістом ми матимемо справу (за термінологією книги [1]) з частковими ядрами та частковими потенціалами, які є узагальненням ядер J_AP, PJ_A, G_A (див. [2]) і т.д. та узагальненнями пробних функцій, які звичайно використовуються в критеріях стабільності.

Теорема 2. *Нехай ядро P рекурентне, P, h є мінорантою функцією для $\overline{P}$, для гармонічних функцій ядер виконується співвідношення $\overline{h} = O(h)$. Якщо $\|G'\delta_2^-\|_h < 1$, то ядро $\overline{P}$ рекурентне.*

Для широкого класу ядер (усіх дискретних та багатьох неперервних, що використовуються в теорії ймовірностей) має місце умова: для деякої міри μ та будь-якого потенціального ядра G' (для власного під'ядра $P' < P$) виконується рівність

$$PG' = O(h \cdot \mu), \tag{1}$$

де, як усюди, $Ph = h$. (Для неперервних блукань з відбиттям дивись кінець [4].)

Необхідну та достатню умову для (1) автор опублікує в іншій роботі. Скажемо тільки, що достатньо виконання умови (1) для одного ядра виду $G' = \sum_{n=0}^{\infty}(P - s \cdot \nu)^n$, де $P > s \cdot \nu$, а ця нерівність можлива для абсолютної більшості ядер P, що зустрічаються в теорії ймовірностей.

Як наслідок теореми 2 сформулюємо теорему.

Теорема 3. *Нехай для рекурентного ядра P виконується умова (1) та умови $\overline{h} = O(h)$, $\mu\delta^- h < \infty$, $\|\delta^-\|_h < 1$ для деяких μ та гармонічних h, $\overline{h}$. Тоді ядро P рекурентне.*

Наведемо приклад застосування теореми 3 (простий, але не настільки, щоб можна було простіше перевірити іншим методом).

Приклад. Нехай P — перехідна матриця простого симетричного блукання на $Z = \{0, \pm1, \pm2, \dots\}$: $P(x, x+1) = P(x, x-1) = \frac{1}{2}$. Тоді умова (1) виконується при $h = 1$, $\mu(\{x\}) = |x| + 1$ $(x \in Z)$. Дамо означення $\overline{P}$:

$$\overline{P}(x, x+1) = \frac{1}{2e_x}, \qquad \overline{P}(x+1, x) = \frac{e_x}{2} > \frac{1}{2},$$
$$\overline{P}(x+1, x+2) = \frac{1}{2} - \varepsilon_x, \qquad \overline{P}(x+1, x+3) = \varepsilon_x$$

(при $x \in 3N$, тобто при $x = 3k$, $k = 0, 1, \dots$), а для інших аргументів P та $\overline{P}$ збігаються, $\varepsilon_x = 0$, $e_x = 1$. Нехай $\overline{h} = \prod_{-\infty<i<x} e_i$. Тоді функція $\overline{h}(x)$ обмежена, якщо $\prod e_i < \infty$, та має сходинки довжини 3: $e_x\overline{h}(x) = \overline{h}(x+1) = \overline{h}(x+2) = \overline{h}(x+3)$ $(x \in 3N)$. З останніх рівностей та означення $\overline{P}$ випливає гармонічність функції $\overline{h}$

$$\overline{h}(x) = \frac{1}{2}\overline{h}(x-1) + \frac{1}{2e_x}\overline{h}(x+1),$$
$$\overline{h}(x+1) = \frac{e_x}{2}\overline{h}(x) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_x\right)\overline{h}(x+2) + \varepsilon_x\overline{h}(x+3)$$

$(x \in 3N)$, а інші рівності мають вид $a = (1/2)a + (1/2)a$. Таким чином, $\overline{P}$ рекурентне, якщо перевірити умову $\mu\delta^- h < \infty$, яка еквівалентна умові

$$\sum_0^{\infty} i\left(\frac{e_i - 1}{2e_i} + \varepsilon_i\right) < \infty.$$

Ця нерівність і є достатньою умовою для рекурентності. Ясно, що в цьому прикладі число 3 як "квазіперіод" не є принциповим.

Далі наводимо ще одну теорему.

Теорема 4. *Нехай P — рекурентне ядро, для деякої функції $\overline{u}$ виконуються умови $\overline{P}_2\overline{u} \le \overline{u} \le \overline{P}\overline{u}$, $\overline{u} = O(h)$, $\overline{P}_1\overline{u}$ — мінорантна функція для ядра $\overline{P}$. Тоді $\overline{P}$ є рекурентним ядром, якщо $\|G'\delta_2^+\|_{\overline{u}} < 1$.*

Основні теореми сформульовано. Наведемо одну природничу модель.

Приклад: *Розповсюдження неперервної популяції в R^3 з загибеллю та розмноженням.* Під неперервністю популяції розуміємо довільну подільність її об'єму. Ядра для простоти вважаємо такими, що мають неперервну щільність (за мірою Лебега, яка й визначає незвідність ядер), блукання, звісно, нерекурентні. Вивчається нестохастичне ядро $\overline{P}$, розміщена у початковий момент у точці x популяція з об'ємом $v = 1$ (локальне джерело) в наступний момент має у просторі розподіл $\overline{P}(x,dy)$. Уявний механізм розповсюдження передбачає можливість зображення: $\overline{P}(x,dy) = \alpha(x)\widetilde{P}(x,dy)k(y)$; тобто частина $(1-\alpha(x))v$ вилучається з процесу (гине), залишок розповсюджується у просторі ($\widetilde{P}$ стохастичне ядро) й розмножується там з коефіцієнтом $k(y)$. Розповсюдження назвемо рівноважним, якщо $\alpha(x)k(x) = 1$ (фактори переміщення та загибелі-розмноження різні і без переміщення загибель та розмноження знаходяться у динамічній рівновазі), та назвемо чистим, якщо $\alpha(x) = k(x) = 1$ (нема загибелі та розмноження) і ядро є просторово однорідним. Скажемо, що загальний ефект в області S від початкового локального джерела у точці x дорівнює $\overline{G}(x,s)$ (наприклад, загальне випромінювання в області за увесь час, якщо речовина популяції радіоактивна). З теореми 1 випливає твердження: загальний ефект від розповсюдження (з ядром $\overline{P}$) з локального джерела скінченний, якщо $\overline{P}$ близьке до ядра P деякого чистого розповсюдження:

$$\int_{R^3\times R^3} |\overline{P}(x,dy) - P(x,dy)|\,dx < \infty$$

та є підстави вважати розповсюдження рівноважним, а коефіцієнт розмноження обмеженим. Для обґрунтування достатньо взяти в теоремі 1 $u = 1$, $\overline{g} = 1/k$, а за τ — міру Лебега, бо для чистого розповсюдження P є стохастичним, просторово однорідним, дисипативним ядром.

Наступні два твердження не заслуговують назви теорем (оскільки доведення майже не потрібні) і лише демонструють дуже очевидний інший метод дослідження стабільності: узяти пробну функцію f з деякого критерію дисипативності чи рекурентності ядра P та накласти такі умови, щоб вона задовольняла такому ж критерію вже для ядра $\overline{P}$.

Теорема 5. *Нехай P є дисипативне ядро, для деякої функції f виконуються умови*

$$\delta_2 f \le f - Pf, \qquad P_1\overline{g} = O(P_1 f), \qquad \operatorname*{ess\,inf}_{\Psi} \frac{f}{\overline{g}} = 0$$

для деякої $\overline{P}$-супергармонічної функції $\overline{g}$. Тоді $\overline{P}$ є дисипативне ядро.

Теорема 6. *Нехай P є рекурентне ядро, для деякої функції f виконуються умови: $\delta_2 f \le f - P_2 f$, функції $\overline{P}_1\overline{h}$ та $1_{(f<c\overline{h})}\overline{h}$ для довільного числа c $\overline{P}$-мінорантні. Тоді ядро $\overline{P}$ є рекурентне.*

Зауваження 3. В сформульованих теоремах замість класу мінорантних функцій можна брати клас скінченних сум мінорантних функцій (а часто й більш широкі класи спеціальних функцій чи з іншими умовами на потенціали). Зв'язок приведених в теоремах умов з структурою (топологічною та іншою) простору можна знайти в книзі [5].

Деякі факти з теорії потенціалу

Нехай $\Psi^+ = \{f \geq 0: \Psi(f > 0) > 0\}$. Усюди в цьому параграфі $P = P_1 + P'$ є деяким розкладенням ядра P, для якого $P_1 1$, $P'1 \in \Psi^+$. Позначимо $G' = \sum_0^\infty P'^n$, $f_\infty = \lim_{n\to\infty} P'^n f$ для будь-якої функції f за умови існування границі. Викладемо такі факти з кола відомих та нових (за формою).

1. Для елементів довільного кільця має місце рівність:

$$(A+B)^n = A^n + \sum_0^{n-1} A^i B (A+B)^{n-1-i} = A^n + \sum_0^{n-1} (A+B)^i B A^{n-1-i}, \tag{1.1}$$

з якої отримуємо для нашого розкладення:

$$P^n = P'^n + \sum_0^{n-1} P'^i P_1 P^{n-1-i}, \tag{1.2}$$

$$P^n = P'^n + \sum_0^{n-1} P^i P_1 P'^{n-1-i}. \tag{1.3}$$

2. Як завжди у нас g та h — супергармонічна та гармонічна функції. Мають місце формули:

$$g \geq g_\infty + G' P_1 g, \tag{2.1}$$

$$h = h_\infty + G' P_1 h. \tag{2.2}$$

Зрозуміло, що $0 < g < \infty$ на E, тому що $g \not\equiv 0, \infty$, як зауважено у вступі, а P є незвідним ядром.

Доведення. Помноживши нерівність $g \geq P'g + P_1 g$ на P'^n $(n = 0, 1, \dots)$ та звівши подібні члени, отримаємо (2.1). Рівність (2.2) одержимо аналогічно. □

Для ядер має місце операція подібності:

$$P \longmapsto \widetilde{P} := J_g^{-1} P J_g. \tag{2.3}$$

Ця операція дає напівстохастичне ядро $\widetilde{P}$, тобто $\widetilde{P}1 \leq 1$, тому що g є супергармонічною функцією.

3. В умовах пункту 2 використовується нерівність

$$g \geq g_\infty + G P_1 g_\infty, \tag{3.1}$$

де $G = \sum_0^\infty P^n$.

Доведення. Нехай $n \to \infty$. З нерівності (1.3) маємо

$$g \geq P^n g = P'^n g + \sum_0^{n-1} P^i P_1 P'^{n-1-i} g \geq g_\infty + \left(\sum_0^{n-1} P^i\right) P_1 g_\infty,$$

звідки випливає (1.3). □

4. Для будь-якої функції $f \in \Psi^+$ з нерівності $P'f \leq f$ випливає, що $P_1 f \in \Psi^+$.

Доведення. Нехай $P_1 f = 0$. Тоді з рівності $P'f \leq f$ випливає супергармонічність: $Pf = P'f \leq f$, тобто $f > 0$ (див. п. 2) і тому $P_1 f > 0$. Суперечність. □

5a. В позначеннях пункту 2 за умовою рекурентності P маємо

$$h_\infty = 0, \qquad h = G' P_1 h. \tag{5.1}$$

Доведення. За означенням рекурентності і з нерівності (3.1) за умови $g = h$ отримаємо рівність $P_1 h_\infty = 0$ (з рекурентності: $Gf = \infty$ для $f \in \Psi^+$). Рівність $h_\infty = 0$ випливає з пункту 4, рівність $h = G'P_1 h$ випливає з рівності (2.2). □

5б. Критерій дисипативності (одне з узагальнень відомих критеріїв): якщо $\varepsilon P_1 g + P'f \le f$ та $(f < \varepsilon g) \in \Psi^+$ для деякого числа $\varepsilon > 0$ та деякої функції f, то ядро P є дисипативним.

Доведення. Нехай ядро P є рекурентним. Помножуючи $\varepsilon P_1 g + P'f \le f$ на P'^i $(i = 0, 1, \dots)$, додаючи ці рівності та застосовуючи другу рівність з (5.1) при $g = h$, отримаємо нерівність $\varepsilon g \le f$. Суперечність. □

6. Простим наслідком пункту 5а буде дисипативність ядра P за умови $g_\infty \in \Psi^+$ (треба покласти там $g = h$).

7. Символи s, ν, G', g, τ мають тут зміст, розкритий у вступі. Доведемо таке твердження:

Для будь-яких функцій $f \in \Psi^+$ та міри $\mu \ne 0$ існує номер n, для якого

$$s = O(P^n f) \quad (n = n(s, f)), \qquad \nu = O(\mu P^n) \quad (n = n(\nu, \mu)),$$

а також виконуються співвідношення

$$G's = O(g), \qquad \nu G' = O(\tau)$$

(для дисипативного ядра P замість G' можна писати G).

Доведення. Ми маємо $s \cdot \nu = O(P^m)$ для деякого $m \in N$ з означення мінорантних функцій та мір. Помножуючи рівність на $P^k f$, ми отримаємо $s = O(P^n f)$, оскільки $\nu P^k f > 0$ для деякого k для незвідного ядра P (тут буде $n = m + k$). Далі, використовуючи рівність (1.2) та нерівність $Pg \le g$ з уже доведеного маємо: $s = O(P^n P_1 g) = O(\sum_0^n P'^i g)$. Оскільки $G' \sum_0^n P'^i \le (n+1)G'$ та $G'P_1 g \le g$ (див. (1.2)), то $G's = O(G' \sum_0^n P'^i P_1 g) = O(nG'P_1 g) = O(g)$. Нехай P дисипативне. Якщо $g = 1$ та $P1 \le 1$, то $Gs = O(1)$ ([2]). Якщо $g \ne 1$, то рівність $Gs = O(g)$ можна отримати з подібності (2.3). Твердження відносно ν є дуальним. □

8. Для довільної функції f та супергармонічної міри τ з нерівності $\tau f < \infty$ випливає нерівність $G'f < \infty$ (якщо P дисипативне, то $Gf < \infty$).

Доведення. Нехай P є рекурентним. Оскільки $\tau = \tau P_1 G'$ (дуальна рівність до (5.1)) і $P'^n G' \le G'$, то можемо написати: $\infty > \tau f \ge \tau P_1 P'^n G' f$. Нерівність $G'f < \infty$ випливає з того, що

$$\sum \tau P_1 P'^n = \tau P_1 G' = \tau \sim \Psi.$$

Тепер нехай P є дисипативним. Тоді твердження цього пункту випливає з пункту 7. □

9. Для ядер має місце рівність резольвентного типу:

$$\sum_0^\infty (A+B)^n = \sum A^n \sum_0^\infty \left(B \sum_0^\infty A^n \right)^n, \tag{9.1}$$

яка просто випливає з рівності

$$\sum (A+B)^n = \sum_{k \ge 0, n_1, \dots, n_k \ge 0} \underbrace{A \dots A}_{n_1} B \underbrace{A \dots A}_{n_2} \dots B \underbrace{A \dots A}_{n_k}.$$

Зрозуміло, що можна написати й такі рівності:

$$\sum(A+B)^n = \sum\Big(\Big(\sum A^n\Big)B\Big)^n \sum A^n, \tag{9.2}$$

$$\sum(A+B)^n = \sum A^n + \sum A^n B \sum(A+B)^n, \tag{9.3}$$

$$\sum(A+B)^n = \sum A^n + \sum(A+B)^n B \sum A^n, \tag{9.4}$$

$$G = G'\sum(P_1G')^n = \sum(G'P_1)^n G' = G' + G'P_1G = G' + GP_1G'. \tag{9.5}$$

Зауважимо, що ці рівності виконуються не лише для невід'ємних ядер (тільки не було б невизначеності "$\infty - \infty$").

10а. Нехай u — довільна функція з умовами $P'u \le u \le Pu$, $u \in \Psi^+$. Тоді має місце твердження: якщо $GP_1u < \infty$, то $u \le u_\infty + GP_1u_\infty$, при цьому P обов'язково дисипативне.

Доведення. Застосовуючи (1.3), маємо:

$$u \le P^n u = P'^n u + \sum_0^{n-1} P^i P_1 P'^{\,n-i-1} u \to u_\infty + GP_1u_\infty \qquad (n \to \infty)$$

за принципом обмеженої збіжності (бо $GP_1u < \infty$). □

10б. Критерій рекурентності. Нехай для деяких μ, f виконуються такі умови: $0 \le \mu - \mu P' \sim \Psi$, $\mu((P'f - f)^+ + 1_{(f<ch)}h) < \infty$ для будь-якого числа $c > 0$, та P_1h є мінорантною функцією. Тоді P рекурентне.

Доведення. Маємо рівність $\mu = \mu_\infty + (\mu - \mu P')G'$ (розкладення Рісса). Тоді (з умови на μ):

$$G'((P'f - f)^+ + \widetilde{h}) < \infty, \quad \text{де } \widetilde{h} := 1_{(f<ch)}h.$$

Тобто $\widetilde{h}_\infty = 0$ і $G'(P'f - f)^+ < \infty$. З очевидної нерівності $P'f \le f + (P'f - f)^+$ аналогічно доведенню формулі (2.1) можна одержати нерівність $f_\infty \le f + G'(P'f - f)^+$. Маємо нерівність $f_\infty < \infty$. З означення $\widetilde{h}$ випливає, що $ch \le f + c\widetilde{h}$, тобто $ch_\infty \le f_\infty + c\widetilde{h}_\infty = f_\infty$. Оскільки c довільне, то $h_\infty = 0$. Якби P було дисипативним, то було б $GP_1h < \infty$, бо P_1h — мінорантна функція, і з пункту 10а при $u = h$ мали б ненульовий (суттєво) характер h_∞, тобто одержали б суперечність. □

Наслідок з 10б: *ядро P є рекурентним, якщо P_1h та $1_{(f<ch)}h$ (для деякої функції f) є мінорантними функціями для будь-якого числа c і має місце нерівність $P'f \le f$. Цей наслідок є одним з узагальнень відомих критеріїв рекурентні.*

11. Доведення теорем.

Доведення теореми 1. Нехай $\overline{P}$ є рекурентним ядром. З пункту 8 та нерівності $\tau\delta^+\overline{g} < \infty$ маємо нерівність $G\delta^+\overline{g} < \infty$. За формулою (9.5) $G = G' + G\delta^-G'$, а за пунктом 5а $G'\delta^+\overline{g} = \overline{g}$. Тому $\infty > G\delta^+\overline{g} = G'\delta^+\overline{g} + G\delta^-G'\delta^+\overline{g} = \overline{g} + G\delta^-\overline{g}$, тобто $G\delta^-\overline{g} < \infty$. З умови теореми $u = O(\overline{g})$ маємо нерівність $G\delta^-u < \infty$. Ця ж нерівність випливає з пункту 8 та умови $\tau\delta^-u < \infty$ теореми. За пунктом 10а $u_\infty \in \Psi^+$, а тому і $\overline{g}_\infty \in \Psi^+$, бо $u = O(\overline{g})$. Але якщо $\overline{P}$ рекурентне, то $\overline{g}_\infty = 0$ за пунктом 5а. Суперечність. □

Доведення теореми 2. За пунктом 9 $G_2 = G' + G'\delta_2^-G_2$, де покладено $G_2 = \sum P_2^n$. За пунктом 5а $h = G_2P_1h$. З цих двох рівностей одержимо:

$$h = G_2P_1h = G'P_1h + G'\delta_2^-G_2P_1h = G'P_1h + G'\delta_2^-h.$$

Оскільки $P_1 h$ — мінорантна функція для ядра $\overline{P}$ та $\|G'\delta_2^-\|_h < 1$, то $G'P_1 h + G'\delta_2^- h \leq O(\overline{g}) + \gamma h$, де число $\gamma < 1$, а $\overline{g}$ — будь-яка $\overline{P}$-супергармонічна функція (див. п. 7). Таким чином $h = O(\overline{g})$ і з умови $\overline{h}O(h)$ випливає рівність $\overline{h} = O(\overline{g})$. Ядро $\overline{P}$ не дисипативне, бо ця рівність для потенціалів $\overline{g}$ не справджується. □

Доведення теореми 3. З нерівності $G' \leq J + PG'$ та умови (1) теореми маємо

$$G'\delta_2^- h \leq \delta_2^- h + h \cdot \mu\delta_2^- h. \tag{11.1}$$

Нехай $P_1 = J_B P$ та $B \uparrow E$ при умові, що B^c є скінчена сума мінорантних множин (див. зауваження 3 вступу). Оскільки $\mu\delta^- h < \infty$, то $\mu\delta_2^- h = \mu J_{B^c}\delta^- h \to 0$ $(B \uparrow E)$. З останнього запису, нерівностей $\|\delta^-\|_h < 1$ та (11.1) випливає, що виконуватиметься умова $\|G'\delta_2^-\|_h < 1$ та інші умови теореми 2. Кінець доведення. □

Доведення теореми 4. Нехай $\overline{P}$ є дисипативним ядром. З мінорантності $\overline{P}_1\overline{u}$ маємо нерівність $\overline{G}\,\overline{P}_1\overline{u} < \infty$. Застосовуючи пункт 10а, одержімо: $\overline{u}_{2\infty} \in \Psi^+$, де позначено $\overline{u}_{2\infty} = \lim \overline{P}_2^n\overline{u}$. Оскільки $\|G'\delta_2^+\|_{\overline{u}} < 1$, то за формулою п. 9 для $\overline{G}_2$ випливає, що $\overline{G}_2\delta_2^+\overline{u}_{2\infty} \leq \overline{G}_2\delta_2^+\overline{u} = \sum(G'\delta_2^+)^n\overline{u} < \infty$. Тепер можна застосувати п. 10а до функції $\overline{u}_{2\infty}$, тому що $P'\overline{u}_{2\infty} \leq \overline{u}_{2\infty} = \overline{P}_2\overline{u}_{2\infty}$ за означенням. В результаті одержимо $(\overline{u}_{2\infty})_\infty = \overline{u}_\infty \in \Psi^+$. (Незвідність $\overline{P}_2$ не є необхідною для останнього висновку (див. доведення п. 10а).) Але з рекурентності P за пунктом 5а $\overline{u}_\infty = O(h_\infty) = 0$. Суперечність. □

Доведення теорем 5, 6. Твердження теорем випливають відповідно з критеріїв пунктів 5б та 10б (наслідок), застосованих до ядра $\overline{P}$. □

Література

1. В. М. Шуренков, *Эргодические процессы Маркова*, "Наука", Москва, 1989.
2. Э. Нуммелин, *Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы*, "Мир", Москва, 1989.
3. Т. Лиггетт, *Марковские процессы с локальным взаимодействием*, "Мир", Москва, 1989.
4. Ю. П. Філонов, *Стійкість нульових зворотних марковських ланцюгів*, Теор. ймовірност. та матем. статист. (1993), № 48, 191–199.
5. S. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo, 1993.

252037 Київ, Повітрофлоцький проспект, 31, Київський університет будівництва та архітектури

Надійшла 1.10.94