Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 155–162

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 155–162

О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА, СВЯЗАННОГО С РАЗНОСТНОЙ СХЕМОЙ, К ДИФФУЗИОННОМУ

УДК 519.21

Я. М. ХУСАНБОЕВ И Г. М. РАХИМОВ

РЕЗЮМЕ. Исследовано асимптотическое поведение ступенчатых процессов, построенных на последовательности случайных величин.

Пусть $\mathcal{F}_{n0} \subset \mathcal{F}_{n1} \subset \dots$, $n \geq 1$, — возрастающая последовательность σ-алгебр на некотором вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и X_{n0}, $X_{n1}, \dots$ — действительнозначные случайные величины, определяемые рекуррентным соотношением

$$X_{nk+1} = X_{nk} + \tilde{g}_n(X_{nk}) + \xi_{nk+1}, \tag{1}$$

где $\tilde{g}_n(x)$ — неслучайная $\mathcal{B}_R$-измеримая числовая функция, ξ_{n1}, ξ_{n2} — квадратично интегрируемые мартингал-разности относительно потока $\{\mathcal{F}_{ni}, i \geq 0\}$.

Многие задачи таких разделов теории вероятностей, как теория массового обслуживания, теория ветвящихся процессов и стохастической аппроксимации, приводят к изучению последовательностей вида (1). Поэтому изучению таких последовательностей посвящено много работ. Например, В. В. Анисимовым [1] установлены теоремы типа принципа усреднения для процессов, построенных по последовательности (1). В случае, когда X_{nk} не зависят от n (не в схеме серий), Г. Керстинг [2] установил слабую сходимость при $m \to \infty$ условных распределений величин $m^{-1}G(X_m)$, где $G(X) = \int_1^x \tilde{g}^{-1}(u)\,du$, к Г-распределению при условии $\{\omega \in \Omega: X_k(\omega) \to \infty, k \to \infty\}$. В стохастической аппроксимации процедуры Роббинса–Монро и Кифера–Волфовица также описываются величинами типа (1) и этой тематике посвящена обширная литература (см., например, [3, 4] и имеющуюся в них библиографию).

В данной работе изучена диффузионная аппроксимация для процессов, построенных по последовательности величин (1).

В дальнейшем будем считать, что случайные величины X_{nk} измеримы относительно $\mathcal{F}_{nk}$, $\mathsf{E}\,X_{n0}^2 < \infty$ и существует такая неслучайная $\mathcal{B}_R$-измеримая положительная функция $\tilde{\sigma}_n(x)$, что $\mathsf{E}(\xi_{nk+1}^2/\mathcal{F}_{nk}) = \tilde{\sigma}_n^2(X_{nk})$. Пусть $\{\tau_{nk}(x), x \in \boldsymbol{R}\}$, $k \geq 0$, — независимые от $\{X_{nk}, k \geq 0\}$ и в совокупности семейства неотрицательных случайных величин, причем для простоты рассмотрим случай, когда величины $\tau_{nk}(x)$ одинаково распределены по k.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60J80; Secondary 60G42.

Введем обозначения

$$g_n(x) = \tilde{g}_n(nx), \qquad m_n(x) = \mathsf{E}\,\tau_{n1}(nx),$$
$$b_n^2(x) = D\tau_{n1}(x), \qquad b_n^2 = \sup_x b_n^2(x),$$
$$\chi_{nk+1} = \frac{\xi_{nk+1}}{\sqrt{n}\,\tilde{\sigma}_n(X_{nk})}, \qquad \sigma_n^2(x) = \frac{\tilde{\sigma}_n^2(nx)}{n}.$$

Положим $t_{n0=0}$, $t_{nk+1} = t_{nk} + \tau_{nk}(X_{nk})$ и определим процесс $X_n(t)$ следующим образом: $X_n(t) = n^{-1}X_{nk}$, $t \in [t_{nk}, t_{nk+1})$. Всюду в дальнейшем предельный переход осуществляется при $n \to \infty$, а C обозначает константу, не всегда одну и ту же, знаки $\Rightarrow$, $\xrightarrow{S}$ обозначают соответственно слабую сходимость случайных величин и сходимость в S-топологии случайных процессов, через $W(\cdot)$ обозначено стандартный винеровский процесс.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

A_1:

1) *при некотором фиксированном* K

$$|g_n(x)| + m_n(x) + \sigma_n(x) \le K(1 + |x|), \qquad x \in \boldsymbol{R},\ n \ge 0;$$

2) *для любого* $r > 0$ *найдется константа* C_r *такая, что*

$$|g_n(x) - g_n(y)| + |m_n(x) - m_n(y)| + |\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \\ \le C_r|x - y|$$

для всех $|x| \le r$, $|y| \le r$, $n \ge 0$.

B_1: *для любого* $x \in \boldsymbol{R}$

$$g_n(x) \to g_0(x), \qquad m_n(x) \to m_0(x), \qquad \sigma_n(x) \to \sigma_0(x),$$

причем $m_0(x) > 0$.

C_1: $b_n^2 < \infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1} b_n^2 \to 0$.

D: *существуют* $\delta > 2$ *и* $C > 0$ *такие, что*

$$\mathsf{E}\big(|\xi_{nk+1}|^{\delta}/\mathcal{F}_{nk}\big) \le C\tilde{\sigma}_n^{\delta}(X_{nk})$$

с вероятностью 1.

Если, кроме того, $n^{-1}X_{n0} \Rightarrow X_0$, *то*

$$X_n(nt) \xrightarrow{U} X(t) = \eta(\mu(t)),$$

где $\eta(t)$ — *решение стохастического дифференциального уравнения* $\eta(0) = X_0$,

$$d\eta(t) = g_0\big(\eta(t)\big)\,dt + \sigma_0\big(\eta(t)\big)\,dW(t), \tag{2}$$

а $\mu(t) = \inf(u\colon \varkappa(u) \ge t)$, *процесс* $\varkappa(t)$ *является решением уравнения*

$$d\varkappa(t) = m_0(\eta(t))\,dt, \qquad \varkappa(0) = 0, \tag{3}$$

причем считается, что $\varkappa(+\infty) > T$.

Замечание 1. При предположениях теоремы 1 решения уравнений (2) и (3) существуют и единственны.

Замечание 2. Процесс $X(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $X(0) = X_0$,

$$dX(t) = g_0\big(X(t)\big)m_0^{-1}\big(X(t)\big)\,dt + \sigma_0\big(X(t)\big)m_0^{-1/2}\big(X(t)\big)\,dW(t).$$

Теперь сформулируем теорему типа принципа усреднения для процессов $X_n(t)$ в случае, когда величины в представлении (1) и σ-алгебры $\mathcal{F}_{nk}$ не зависят от параметра серии n.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

A_2:

1) *при некотором фиксированном* K

$$|g_n(x)| + m_n(x) \le K(1+|x|), \qquad x \in \boldsymbol{R},\ n \ge 0;$$

2) *для любого* $r > 0$ *найдется константа* C_r *такая, что*

$$|g_n(x) - g_n(y)| + |m_n(x) - m_n(y)| \le C_r|x-y|$$

для всех $|x| \le r$, $|y| \le r$, $n \ge 0$.

B_2: *для любого* $x \in \boldsymbol{R}$

$$g_n(x) \to g_0(x), \qquad m_n(x) \to m_0(x),$$

причем $m_0(x) > 0$.

C_2: $\sup_x\big(b_n^2(x) + \tilde\sigma_n^2(x)\big) < \infty$, $\lim_{n\to\infty} n^{-1}b_n^2 = 0$.

Тогда

$$\sup_{0\le t\le T} |X_n(nt) - \eta(\mu(t))| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

где $\eta(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$d\eta(t) = g_0(\eta(t))\,dt, \qquad \eta(0) = 0, \tag{4}$$

а процесс $\mu(t)$ *тот же, что и в теореме* 1.

Пусть теперь $\tilde g_n(x)$ — строго положительные и дифференцируемые функции при $x \ge 1$, $X_{nk} \ge 1$. Введем обозначения

$$G_n(x) = \int_1^x \frac{du}{\tilde g_n(u)}, \qquad \varphi_n(x) = \frac{\tilde\sigma_n(G_n^{-1}(nx))}{\sqrt{n}\,\tilde g_n(G_n^{-1}(nx))},$$
$$\psi_n(x) = n\tilde g_n'(G_n^{-1}(nx)), \qquad \alpha_n(x) = m_n(n^{-1}G_n^{-1}(nx)),$$
$$Z_n(t) = \frac{1}{n}G_n(X_{nk}), \qquad t \in [t_{nk}, t_{nk+1}),$$

где $\tilde g_n'$ — производная функции $\tilde g_n$, G_n^{-1} обозначает обратную функцию к G_n.

Имеем

$$G_n'(x) = \frac{1}{\tilde g_n(x)}, \qquad G_n''(x) = -\frac{\tilde g_n'(x)}{\tilde g_n^2(x)}.$$

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} G_n(X_{nk+1}) &= G_n\big(X_{nk} + \tilde g_n(X_{nk}) + \xi_{nk+1}\big) \\ &= G_n(X_{nk}) + 1 + \frac{\xi_{nk+1}}{\tilde g_n(X_{nk})} - \frac{\tilde g_n'(X_{nk})}{2}\left(1 + \frac{\xi_{nk+1}}{\tilde g_n(X_{nk})}\right)^2 + R_{nk}, \end{aligned} \tag{5}$$

где R_{nk} — остаточный член.

Теорема 3. *Пусть выполнены условие D теоремы 1 с $\delta \geq 4$ и*

A_3:

1) $\sup(|\psi_n(x)|: x \geq 1, n \geq 0) < \infty$ *и при некотором фиксированном* K
$$\varphi_n^2(x) + \alpha_n(x) \leq K(1 + |x|);$$

2) *для любого $r > 0$ найдется константа C_r такая, что*
$$|\psi_n(x) - \psi_n(y)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| + |\alpha_n(x) - \alpha_n(y)| \leq C_r|x - y|$$
для любых $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, $n \geq 0$, причем $\overline{\lim}_{r\to\infty} C_r < \infty$.

B_3: *для любого x*
$$\psi_n(x) \to \psi_0(x), \qquad \varphi_n(x) \to \varphi_0(x), \qquad \alpha_n(x) \to \alpha_0(x),$$
причем $\alpha_0(x) > 0$.

C_3: $b_n^2 < \infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1} b_n^2 = 0$, $\mathsf{E}\, G_n^2(X_{nk}) < \infty$,
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-2} \sup_{k\leq n} \mathsf{E}\, G_n^2(X_{nk}) < \infty.$$

E: $n^{-1} \sup_{0\leq t\leq T} \left|\sum_{k=0}^{[nt]} R_{nk}\right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$

Если, кроме того, $n^{-1} G_n(X_{n0}) \Rightarrow Z_0$, то
$$Z_n(nt) \xrightarrow{U} Z(t) = \eta(\mu(t)),$$
где $\eta(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению
$$\eta(0) = Z_0,$$
$$d\eta(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\psi_0(\eta(t))\varphi_0^2(\eta(t))\right) dt + \varphi_0(\eta(t))\, dW(t), \tag{6}$$
а процесс $\mu(t) = \inf(u: \varkappa(u) \geq t)$, где $\varkappa(t)$ — решение уравнения
$$d\varkappa(t) = \alpha_0(\eta(t))\, dt, \qquad \varkappa(0) = 0,$$
причем считается, что $\varkappa(+\infty) > T$ с вероятностью 1.

Замечание 3. При предположениях теоремы 3 решение уравнения (6) существует и единственно. Процесс $Z(t)$ удовлетворяет уравнению
$$Z(0) = Z_0,$$
$$dZ(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\psi_0(Z(t))\varphi_0^2(Z(t))\alpha_0^{-1}(Z(t))\right) dt + \varphi_0(Z(t))\alpha_0^{-1/2}(Z(t))\, dW(t).$$

Доказательство теоремы 1. Положим $\eta_{nk} = X_{nk}/n, \dots, \eta_n(t) = \eta_{nk}$, если $t \in [k/n, (k+1)/n)$. Имеем
$$\eta_{nk+1} = \frac{1}{n}\left(X_{nk} + \tilde{g}_n(X_{nk}) + \xi_{nk+1}\right) = \eta_{nk} + \frac{1}{n} g_n(\eta_{nk}) + \sigma_n(\eta_{nk})\chi_{nk+1}. \tag{7}$$
Очевидно, что $\mathsf{E}(\chi_{nk+1}/\mathcal{F}_{nk}) = 0$ и
$$\sum_{k=1}^{[nt]} \mathsf{E}(\chi_{nk+1}^2/\mathcal{F}_{nk}) = \frac{[nt]}{n} \to t. \tag{8}$$

Согласно условию D для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\sum_{k=0}^{[nt]} \mathsf{E}\big(\chi_{nk+1}^2 I(|\chi_{nk+1}| > \varepsilon)/\mathcal{F}_{nk}\big)$$
$$\le \varepsilon^{2-\delta} n^{-\delta/2} \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{\sigma}_n^{-\delta}(X_{nk})\,\mathsf{E}\big(|\chi_{nk+1}|^{\delta}/\mathcal{F}_{nk}\big) \le Cn^{1-\delta/2}t \to 0.$$

Так как $(X_{nk}, \mathcal{F}_{nk})$, $k \ge 0$, образует мартингал-разность, то из последнего соотношения и из (8) согласно теореме 11 [6, с. 426] имеем

$$\sum_{k=0}^{[nt]} \chi_{nk+1} \xrightarrow{J} W(t). \tag{9}$$

Соотношения (7), (9) и условия теоремы обеспечивают выполнения условия теоремы 3.5 [1, с. 97], согласно которой

$$\eta_n(t) \xrightarrow{U} \eta(t), \tag{10}$$

где процесс $\eta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2). Далее положим $\varkappa_n(t) = n^{-1}\sum_{k=0}^{[nt]} \tau_{nk}(X_{nk})$, $\varkappa_{nk} = \varkappa_n(k/n)$. Тогда

$$\varkappa_{nk+1} = \varkappa_{nk} + m_n(\eta_{nk})\frac{1}{n} + \gamma_{nk},$$

где $\gamma_{nk} = n^{-1}(\tau_{nk}(n\eta_{nk}) - m_n(\eta_{nk}))$. Поскольку $(\gamma_{nk}, \mathcal{F}_{nk})$, $k \ge 0$, образует мартингал-разность, то, применяя теорему 3 [7, с. 526], с учетом условия C_1 для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\sum_{k=0}^{[nt]}\gamma_{nk}\right| > \varepsilon\right) \le \varepsilon^2\,\mathsf{E}\left(\sum_{k=0}^{[nT]}\gamma_{nk}\right)^2 = (\varepsilon n)^{-2}\sum_{k=0}^{[nT]}\mathsf{E}\,b_n^2(n\eta_{nk})$$
$$\le (\varepsilon n)^{-2}([nT]+1)b_n^2 \to 0.$$

Отсюда в силу теоремы 3.1 [1] вытекает

$$\max_{k\le nT}|\varkappa_{nk} - y_{nk}| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \tag{11}$$

где величины y_{nk}, $k \ge 0$, удовлетворяют соотношениям

$$y_{n0} = 0, \qquad y_{nk+1} = y_{nk} + \frac{m_n(\eta_{nk})}{n}.$$

Далее согласно теореме 3.2 [1], соотношение (10) в силу сделанных предположений принимает вид

$$\sup_{0\le t\le T}|y_n(t) - \varkappa(t)| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,$$

где $y_n(t) = y_{nk}$, $t \in [k/n, (k+1)/n)$. Отсюда и из (11) следует

$$\sup_{0\le t\le T}|\varkappa_n(t) - \varkappa(t)| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Отсюда аналогичными [1] рассуждениями получаем

$$\sup_{0\le t\le T}|\mu_n(t) - \mu(t)| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \tag{12}$$

где $\mu_n(t) = \inf(u: \varkappa_n(u) > t)$. Соотношения (10) и (12) вместе с теоремой 2.2 [8] с учетом непрерывности процессов $\eta(t)$, $\mu(t)$ обусловливают соотношение

$$\eta_n\left(\mu_n(t) - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{U} \eta(\mu(t)),$$

что завершает доказательство теоремы 1, поскольку

$$X_n(nt) = \mu_n\left(\mu_n(t) - \frac{1}{n}\right). \qquad \square$$

Доказательства замечания 2 и второго утверждения замечания 3 непосредственно следуют из леммы 7.1 [1].

Доказательство теоремы 2. Так как $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$, $k \geq 0$, является мартингал-разностью, то $\sum_{i=1}^k \xi_i$ образует мартингал. Согласно условию C_2 имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}(\xi_i^2/\mathcal{F}_{i-1})}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde\sigma^2(X_{i-1})}{i^2} \leq \sup_x \tilde\sigma^2(x) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty$$

с вероятностью 1. Тогда согласно теореме 4 [7, с. 554] получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} \xi_i \to 0$$

с вероятностью 1, для любого фиксированного $t \geq 0$. Теперь согласно [9, с. 44] имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]} \xi_i \xrightarrow{U} 0.$$

Следовательно,

$$\sup_{0\leq t\leq T} \frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{[nt]} \xi_i\right| \xrightarrow{P} 0.$$

Отсюда и из (6) согласно условиям доказываемой теоремы из теорем 3.1 и 3.2 [1] получаем

$$\sup_{0\leq t\leq T} |\eta_n(t) - \eta(t)| \xrightarrow{P} 0,$$

где $\eta(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (4). Теперь отсюда и из (12) следует утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Положим $\eta_{nk} = n^{-1}G_n(X_{nk})$, $\eta_n(t) = \eta_{n[nt]}$. С учетом соотношения (5) и обозначения имеем

$$\begin{aligned}\eta_{nk+1} = \eta_{nk} &+ \left(1 - \frac{\psi_n(\eta_{nk})}{2n} - \frac{\psi_n(\eta_{nk})\varphi_n^2(\eta_{nk})}{2}\right)\frac{1}{n} \\ &+ \left(\varphi_n(\eta_{nk}) - \frac{\psi_n(\eta_{nk})}{n}\varphi_n(\eta_{nk})\right)\chi_{nk+1} \\ &- \frac{1}{2n}\psi_n(\eta_{nk})\varphi_n^2(\eta_{nk})\frac{\xi_{nk+1}^2 - \tilde\sigma_n^2(X_{nk})}{\tilde\sigma_n^2(X_{nk})} + \frac{1}{n}R_{nk}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при условиях теоремы функции $\psi_n(x)\varphi_n^2(x)$, $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x) \times \varphi_n(x)$ линейно ограничены и удовлетворяют локальному условию Липшица. Далее, применяя неравенства теоремы 3 [7, с. 526], $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, учитывая, что $\sup_x |\psi_n(x)| < \infty$, и линейную ограниченность $\varphi_n^2(x)$, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\max_{m\le nT}\left|\sum_{k=0}^{m}\gamma_{nk}\right| > \varepsilon\right) &\le \varepsilon^2\,\mathsf{E}\left(\sum_{k=0}^{[nT]}\gamma_{nk}\right)^2 \\ &\le 2(\varepsilon n)^{-2} C \sup_{x,n}{}^2 |\psi_n(x)| \sum_{k=0}^{[nT]} \mathsf{E}\,\frac{1+\eta_{nk}^2}{\tilde\sigma_n^4(X_{nk})}\left(\xi_{nk+1}^2 - \tilde\sigma_n^2(X_{nk})\right)^2 \\ &\le \frac{2CT\sup_{x,n}^2|\psi_n(x)|}{\varepsilon^2 n}\left(1 + n^{-2}\sup_{k\le nT}\mathsf{E}\,G_n^2(X_{nk})\right) \to 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Далее, как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]}\frac{\xi_{nk+1}}{\tilde\sigma_n(X_{nk})} \xrightarrow{I} W(t).$$

Отсюда и из (13) на основании теоремы 3.5 [1] находим

$$\eta_n(t) \xrightarrow{U} \eta(t),$$

где процесс $\eta(t)$ является решением уравнения (6). Теперь, рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, получаем соотношение

$$Z_n(nt) = \eta_n\left(\mu_n(t) - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{I} \eta(\mu(t)),$$

что и завершает доказательство теоремы 3. □

Примеры.

1. Симметричное случайное блуждание. Пусть S_n, $n \ge 0$, — простое случайное блуждание на d-мерной решетке Z^d с переходными вероятностями $P_{xy} = (2d)^{-1}$, если $|x-y| = 1$, и $P_{xy} = 0$ — в противном случае. Положим $X_n = |S_n|^2$. Очевидно, что $X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_{n+1}$, где $g(x) \equiv 1$, $\xi_{n+1} = 2(S_n, S_{n+1} - S_n)$, а $(\cdot\,,\cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов. Обозначим $\mathcal{F}_k = \sigma\{S_0, \dots, S_k\}$. Нетрудно убедиться, что

$$\mathsf{E}(\xi_{k+1}/\mathcal{F}_k) = 0,$$
$$\mathsf{E}(\xi_{k+1}^2/\mathcal{F}_k) = \frac{4}{d}X_k = \tilde\sigma^2(X_k),$$

кроме того, $g_0(x) \equiv 1$, $\sigma_0(x) = \sqrt{4x/d}$. В рассматриваемом случае условие D теоремы 1 выполнено и уравнение (2) принимает вид

$$d\eta(t) = dt + \sqrt{\frac{4}{d}\eta(t)}\,dW(t), \qquad \eta(0) = 0.$$

Как известно, решение этого уравнения можно представить в виде

$$\eta(t) = d^{-1}\sum_{i=1}^{d} B_i^2(t),$$

где $B_i(t)$ — I-я компонента d-мерного винеровского процесса. Значит, величина $\eta(1)$ имеет Г-распределение с параметрами $(d/2, d/2)$, что согласуется с результатом [2].

2. Управляемый ветвящийся процесс. Пусть $\{\eta_{nk}(x), x \in N\}$, $n \geq 0$, $k \geq 1$, — независимые семейства неотрицательных целочисленных случайных величин, распределения которых не зависят от n и k. Положим $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \eta_{nk}(X_n)$, $X_0 = 1$. Обычно в теории ветвящихся процессов X_n интерпретируется как количество индивидуумов в случайной популяции в n-м поколении, причем число непосредственных потомков индивидуума зависит от объема популяции. Обозначим

$$\mathcal{F}_k = \sigma\{X_0, \dots, X_k\}, \qquad a(x) = \mathsf{E}\,\eta_{nk}(x), \qquad l^2(x) = \mathbf{D}\,\eta_{nk}(x).$$

Имеем $X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_{n+1}$, где $g(x) = (a(x) - 1)x$, $\xi_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} (\eta_{nk}(X_n) - a(X_n))$.

Очевидно, что

$$\mathsf{E}(\xi_{n+1}/\mathcal{F}_n) = 0, \qquad \mathsf{E}(\xi_{n+1}^2/\mathcal{F}_n) = X_n l^2(X_n) = \tilde{\sigma}^2(X_n).$$

Рассмотрим случай, когда $a(x) = 1 + Ax^{-\alpha}$ ($\alpha \geq 1$, $A > 0$), $l(nx) \to l_0 < \infty$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$d\eta(t) = A\,dt + l_0\sqrt{\eta(t)}\,dW(t).$$

При $\alpha > 1$ уравнение (2) таково:

$$d\eta(t) = l_0\sqrt{\eta(t)}\,dW(t).$$

Пусть

$$g(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \ (x \geq 1), \qquad \tilde{\sigma}^2(x) = \frac{\beta X^{1+\alpha}}{1-\alpha}, \quad \beta > 0.$$

В этом случае $G(x) = (X^{1-\alpha} - 1)/(1-\alpha)$. Нетрудно видеть, что

$$\psi_n(x) \to \frac{\alpha}{(1-\alpha)x}, \qquad \varphi_n(x) \to \beta x,$$

и уравнение (6) имеет вид

$$d\eta(t) = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{2(1-\alpha)}\right)dt + \sqrt{\beta\eta(t)}\,dW(t).$$

Література

1. В. В. Анисимов, Е. А. Лебедев, *Стохастические сети обслуживания. Марковские модели*, "Либідь", Киев, 1992.
2. G. Kersting, *Asymptotic Γ-distribution for stochastic difference equations*, Stochastic Processes and their Applications 40 (1992), 15–28.
3. М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский, *Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание*, "Наука", Москва, 1973.
4. H. I. Kushner and D. S. Clark, *Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems*, App. Math. Scienes (1990), № 26, Springer, New York–Heidelberg–Berlin.
5. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 3, "Наука", Москва, 1975.
6. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*, "Наука", Москва, 1986.
7. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, 2-е изд., "Наука", Москва, 1989.
8. В. В. Анисимов, *Случайные процессы с дискретной компонентой. Предельные теоремы*, "Вища школа", Киев, 1988.
9. А. А. Боровков, *Асимптотические методы в теории массового обслуживания*, "Наука", Москва, 1980.

700042, УЗБЕКИСТАН, ТАШКЕНТ, УЛ. ХУШРУЙ, 36

700197, УЗБЕКИСТАН, ТАШКЕНТ, УЛ. ИНТИЗОР, 36, КВ. 15

Надійшла 12.06.94