Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 163–169

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 163–169

ОЦЕНКА НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ, ОБРАЗУЮЩЕГО МАРТИНГАЛ

УДК 519.21

Ш. ШАРАХМЕДОВ И И. Ж. ЮЛДАШЕВ

РЕЗЮМЕ. Получена скорость сходимости в законах больших чисел для мартингалов. Доказано существование некоторых моментов максимального эксцесса и момента последнего выхода за нелинейную границу для случайного блуждания, являющегося мартингалом.

Пусть $\{S_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин (с.в.) $X_n = S_n - S_{n-1}$, $S_0 = 0$, $n \geq 1$.

Рассмотрим следующие с.в.:

$$\varphi(p,\alpha,\varepsilon) = \sum_{n\geq 1} n^{p\alpha-2} I\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon n^\alpha\Big),$$

$$\psi(p,\alpha,\varepsilon) = \sum_{n\geq 1} n^{p\alpha-2} I\left(\sup_{k\geq n} \frac{|S_k|}{k^\alpha} \geq \varepsilon\right),$$

$$\chi(\alpha,\varepsilon) = \sup\{n \geq 1 \colon |S_n| \geq \varepsilon n^\alpha\} \qquad (\sup\{\varnothing\} = 0),$$

$$\eta(\alpha,\varepsilon) = \sup_{n\geq 1}\{|S_n| - \varepsilon n^\alpha\},$$

где $I(A)$ — индикатор события A.

Изучению различных свойств распределений этих с.в., в том случае когда $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых с.в. посвящено большое количество работ. Наиболее общие результаты в этом направлении изложены в [1]. Исследования по этой тематике для случайных полей содержатся в [2]. В работах [3–5] рассмотрены аналогичные вопросы для последовательности с.в. $\{X_n, n \geq 1\}$ удовлетворяющих определенным условиям перемешивания. Изучению случая, когда $\{S_n, n \geq 1\}$ является мартингалом, посвящена работа [6].

В [6], в частности доказано, что если $\{S_n, n \geq 1\}$ мартингал и $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $p > 1/\alpha$, то из условий

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k} n^{p\alpha-2} p(|x_k| > \varepsilon n^\alpha) < \infty, \qquad \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

$$\sup_{n\geq 1} \mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left(|x_k|^\gamma / \mathcal{F}_{k-1}\right)\right|^q < \infty, \tag{2}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F15.

для некоторых $\gamma \in (1/\alpha, 2]$, $q > (p\alpha - 1)/(\gamma\alpha - 1)$, следуют соотношения:

$$\mathsf{E}\,\varphi(p,\alpha,\varepsilon) < \infty, \qquad \forall\varepsilon > 0, \tag{3}$$

$$\mathsf{E}\,\psi(p,\alpha,\varepsilon) < \infty, \qquad \forall\varepsilon > 0, \tag{4}$$

$$\mathsf{E}\,\varphi\big(\eta^{+}(\alpha,\varepsilon)\big)^{p\alpha-1}\alpha < \infty, \qquad \forall\varepsilon > 0. \tag{5}$$

Здесь и далее $\mathcal{F}_k$ — σ-алгебра, порожденная с.в. $S_1, S_2, \ldots, S_k$, $k \geq 1$.

В этой работе также утверждается, что этот результат без условия (2) вообще говоря не верен даже для стационарной в узком смысле последовательности $\{X_n, n \geq 1\}$ образующей мартингал — разность. Однако пример, приведенный в пользу этого утверждения, относится к случаю $p > 2$.

В настоящей работе доказана теорема, из которой следует (см. следствие), что в случае, когда $p \in (1,2)$ и $\{X_n, n \geq 1\}$ — стационарная в узком смысле последовательность с.в. образующих мартингал — разность, для выполнения утверждений (3)–(5) условие (2) является излишним.

Теорема. *Пусть $\{S_n, n \geq 1\}$ — мартингал, $p \in [1,2)$, $\alpha p > 1$. Если выполнены условия:*

$$E_1 = \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k} n^{\alpha(p-1)-2}\,\mathsf{E}\,|x_k| I(|x_k| > n^{\alpha}) < \infty, \tag{6}$$

$$E_2 = \sum_{n\geq 1} n^{\alpha(p-1)-1}\,\mathsf{E}\,x_n^2 I(|x_n| \leq n^{\alpha}) < \infty, \tag{7}$$

то имеют место утверждения (3)–(5) *и*

$$\mathsf{E}\big(\chi(\alpha,\varepsilon)\big)^{p\alpha-1} < \infty, \qquad \forall\varepsilon > 0. \tag{8}$$

Следствие. *Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность одинаково распределенных с.в., образующих мартингал — разность. Если выполнено одно из следующих условий*

$$\mathsf{E}\,|X_1|\ln^{+}|X_1| < \infty, \qquad \alpha > 1, \qquad p = 1;$$

$$\mathsf{E}\,|X_1|^{p} < \infty, \qquad p \in (1,2), \qquad p\alpha > 1,$$

то справедливо утверждение теоремы.

Отметим, что условия (6) и (7), в отличие от (2), не налагают никаких ограничений на характер зависимости с.в. $\{X_n, n \geq 1\}$ и касаются лишь их распределения. С другой стороны, проверка этих условий, на наш взгляд, сравнительно проще, чем проверка условия (2). Следующий пример показывает, что имеется определенный класс последовательностей независимых с.в. удовлетворяющих условиям (6) и (7), но не удовлетворяющих условию (2).

В дальнейшем через C, C_i, $i \geq 1$, будем обозначать положительные постоянные, не всегда одни и те же.

Пример 1. Пусть $p \in [1,2)$, $\alpha p > 1$, $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых с.в. с

$$\mathsf{P}(|x_n| \leq Cn^{s}) = 1, \qquad s < \frac{\alpha(2-p)}{2},$$

$$\mathsf{E}\,|x_n|^{\gamma} \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \forall\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 2\right].$$

Нетрудно проверить, что для такой последовательности с.в. условия (6) и (7) выполняются, а (2) не имеет места.

Следующие примеры показывают, что условия (6) и (7) близки к оптимальным в том смысле, что если не выполнено хотя бы одно из них, то утверждение теоремы, вообще говоря, не имеет места.

Пример 2. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых с.в. с $\mathsf{P}(X_n = \pm n^{\alpha-0.5}) = 0.5$ где $\alpha > 1/p$, $p \in [1,2)$. Нетрудно проверить, что (6) выполняется, а условие (7) не выполняется. А так как

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, x_k^2 = Cn^{2\alpha}\big(1 + o(1)\big), \qquad n \to \infty,$$

то для любого $\tau > 0$, получаем

$$L(\tau) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, x_k^2 I(k^{\alpha-0.5} \geq \tau B_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Условие Линдеберга выполнено. В силу центральной предельной теоремы для достаточно больших n

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon n^{\alpha}\Big) \geq \mathsf{P}(|S_n| \geq CB_n) \geq \delta_1 > 0,$$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{k\geq n} \frac{|S_k|}{K^{\alpha}} > \varepsilon\right) \geq \mathsf{P}(|S_n| \geq CB_n) \geq \delta_2 > 0.$$

Следовательно, утверждения (3) и (4) не имеют места. Далее, в силу соотношения

$$\mathsf{E}\big(\chi(\alpha,\varepsilon)\big)^{p\alpha-1} = \sum_{n\geq 1} n^{p\alpha-1}\mathsf{P}\big(\chi(\alpha,\varepsilon) = n\big)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \big[n^{p\alpha-1} - (n-1)^{p\alpha-1}\big]\mathsf{P}\big(\chi(\alpha,\varepsilon) = n\big) \sum_{n\geq 1} \theta(n) n^{p\alpha-2}\mathsf{P}\left(\sup_{k\geq n} \frac{|S_k|}{k^{\alpha}} > \varepsilon\right),$$

где $C_1 \leq \theta(n) \leq C_2$, $n \geq 1$ следует, что утверждение (8) не имеет места.

Далее, имеем

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\eta(\alpha,\varepsilon)\right)^{\frac{p\alpha-1}{\alpha}} \geq \int_0^{\infty} \mathsf{P}\left(\max_{1\leq k\leq x^{\frac{1}{p\alpha-1}}} (|S_k| - \varepsilon k^{\alpha}) \geq \varepsilon x^{\frac{\alpha}{p\alpha-1}}\right) dx$$

$$\geq \int_0^{\infty} \mathsf{P}\left(\max_{1\leq k\leq x^{\frac{1}{p\alpha-1}}} |S_k| \geq 2\varepsilon x^{\frac{\alpha}{p\alpha-1}}\right) dx$$

$$= C\int_0^{\infty} z^{p\alpha-2}\mathsf{P}\left(\max_{1\leq k\leq z} |S_k| \geq 2\varepsilon z^{\alpha}\right) dz \geq C\,\mathsf{E}\,\varphi(p,\alpha,\varepsilon).$$

Отсюда следует, что утверждение (5) не выполняется.

Пример 3. Пусть $p \in [1,2)$, $p\alpha > 1$, $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых с.в. с $\mathsf{P}(X_n = \pm n^{\alpha+1}) = 0.5$. Легко проверить, что условие (6) не выполнено, а условие (7) имеет место.

Проверим условие Линдеберга. Так как

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, x_k^2 = Cn^{2\alpha+3}\big(1 + o(1)\big), \qquad n \to \infty,$$

то $\forall\tau > 0$, имеем

$$L(\tau) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, x_k^2 I(|x_k| > \tau B_n) \le C n^{-(2\alpha+3)} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

В силу центральной предельной теоремы получаем, что для всех достаточно больших n и $\forall\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\le k\le n} |S_k| > \varepsilon n^\alpha\Big) \ge \mathsf{P}(|S_n| > CB_n) \ge C > 0.$$

Следовательно, утверждение (3) не верно. Как и в предыдущем примере, легко показать, что не выполняются и утверждения (4), (5) и (8).

Отметим, что идея доказательства в нашей работе существенно отличается от метода, примененного в [6].

Доказательство теоремы. Пусть

$$x_{nk} = x_k I(|x_k| \le n^\alpha), \qquad \overline{x}_{nk} - x_{nk} - \mathsf{E}(x_{nk}/\mathcal{F}_{k-1}), \qquad k = 1, \dots, n.$$

Легко понять, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,\varphi(p,\alpha,\varepsilon)\\
&\le \sum_{n\ge1} n^{p\alpha-2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(|x_k| > n^\alpha) + \sum_{n\ge1} n^{p\alpha-2}\bigg[\mathsf{P}\bigg(\max_{1\le i\le n}\bigg|\sum_{k=1}^{i}\overline{x}_{nk}\bigg| > \frac{\varepsilon}{2}n^\alpha\bigg)\\
&\quad + \mathsf{P}\bigg(\max_{1\le i\le n}\bigg|\sum_{k=1}^{i}\mathsf{E}(x_{nk}/\mathcal{F}_{k-1})\bigg| > \frac{\varepsilon}{2}n^\alpha\bigg)\bigg]\\
&\le \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-1)-2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(|x_k|)I(|x_k| > n^\alpha) + C\sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-2)-2}\,\mathsf{E}\bigg(\max_{1\le i\le n}\bigg|\sum_{k=1}^{i}\overline{x}_{nk}\bigg|\bigg)^2\\
&\quad + C\sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-1)-2}\,\mathsf{E}\bigg(\max_{1\le i\le n}\bigg|\sum_{k=1}^{i}\mathsf{E}(x_{nk}/\mathcal{F}_{k-1})\bigg|\bigg)\\
&= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.
\end{aligned}$$

В силу условия (6) получаем, что $\Sigma_1 < \infty$.

Так как $\{X_n, n \ge 1\}$ — мартингал-разность, то

$$\mathsf{E}(x_{nk}/\mathcal{F}_{k-1}) = -\,\mathsf{E}\big(x_k I(|x_k| > n^\alpha)/\mathcal{F}_{k-1}\big).$$

Учитывая это соотношение, имеем

$$\Sigma_3 \le \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-1)-2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,|x_k| I(|x_k| > n^\alpha) = E_1 < \infty.$$

Для оценки Σ_2 используем теорему 2.1.1 из [7] (с. 23) при $p = 2$. Тогда

$$\Sigma_2 \le C\sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-2)-2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,\overline{x}_{nk}^2.$$

В силу неравенства Иенсена, имеем

$$\mathsf{E}\,\overline{x}_{nk}^2 \le 2\big(\mathsf{E}\,x_{nk}^2 + \mathsf{E}\,|\,\mathsf{E}(x_{nk}/\mathcal{F}_{k-1})|^2\big) \le 4\,\mathsf{E}\,x_{nk}^2.$$

Подставляя это в предыдущее неравенство, получаем

$$\Sigma_2 \le C \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-2)-2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, x_{nk}^2 = C \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-2)-2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{(m-1)^\alpha}^{m^\alpha} t\mathsf{P}(|x_k| > t)\, dt$$

$$\le C + C \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-2)-2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m^{2\alpha-1} \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha).$$

Для оценки последнего выражения используем формулу

$$\sum_{n\ge1} \sum_{m=1}^{n} a_{nm} = \sum_{m\ge1} \sum_{n\ge m} a_{nm}, \qquad a_{nm} \ge 0, \tag{10}$$

в силу которой имеем

$$\Sigma_2 \le C + C \sum_{m\ge1} m^{2\alpha-1} \sum_{n\ge m} n^{\alpha(p-2)-2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha)$$

$$= C + C\Bigg[\sum_{m\ge1} m^{2\alpha-1} \sum_{n\ge m} n^{\alpha(p-2)-2} \sum_{k=1}^{m} \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha)$$

$$+ \sum_{m\ge1} m^{2\alpha-1} \sum_{n\ge m} n^{\alpha(p-2)-2} \sum_{k=m}^{n} \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha)\Bigg]$$

$$= C + C[\Sigma_{21} + \Sigma_{22}].$$

Очевидно, что

$$\Sigma_{21} = C \sum_{m\ge1} m^{2\alpha-1} \sum_{k=1}^{m} \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha) \le CE_1 < \infty.$$

Использовав формулу

$$\sum_{n\ge m} a_n \sum_{k=m}^{n} P_{km} = \sum_{k\ge m} P_{km} \sum_{n\ge k} a_n, \qquad a_n \ge 0,\ P_{km} \ge 0,$$

получаем

$$\Sigma_{22} \le C \sum_{m\ge1} m^{2\alpha-1} \sum_{k\ge m} \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha) \sum_{n\ge k} n^{\alpha(p-2)-2}$$

$$\le C \sum_{m\ge1} m^{2\alpha-1} \sum_{k\ge m} \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha) k^{\alpha(p-2)-1}.$$

Отсюда, в силу (10), имеем

$$\Sigma_{22} \le C \sum_{k\ge1} k^{\alpha(p-2)-1} \sum_{m=1}^{k} m^\alpha \mathsf{P}(|x_k| > m^\alpha) \int_{(m-1)^\alpha}^{m^\alpha} dx \le C + CE_2 < \infty.$$

Утверждение (3) доказано.

Так же, как и при доказательстве теоремы 1.1 в [1] (см. с. 10) получаем, что

$$\mathsf{E}\,\psi(p,\alpha,\varepsilon) \le C\,\mathsf{E}\,\varphi(p,\alpha,\varepsilon).$$

Отсюда следует утверждение (4).

Утверждение (8) вытекает из соотношений (9) и (4). Неравенство

$$\mathsf{E}\big(\eta(\alpha,\varepsilon)\big)^{(p\alpha-1)/\alpha} \le C\,\mathsf{E}\,\varphi(p,\alpha,\varepsilon).$$

доказывается аналогично рассуждениям в [1] (с. 61). Отсюда и из (3) следует (5). Теорема доказана. □

Доказательство следствия. Для доказательства следствия проверим условия (6) и (7).

Пусть $F(x) = \mathsf{P}(|x_1| < x)$. Имеем

$$E_1 = \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-1)-1}\,\mathsf{E}\,|x_1| I(|x_1| > n^\alpha) = \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-1)-1} \sum_{k\ge n} \int_{k^\alpha}^{(k+1)^\alpha} x\,dF(x)$$
$$\le C\sum_{k\ge1} k^\alpha \int_{k^\alpha}^{(k+1)^\alpha} dF(x) \sum_{n=1}^{k} n^{\alpha(p-1)-1} \le C\sum_{k\ge1} k^\alpha \beta(k,p) \int_{k^\alpha}^{(k+1)^\alpha} dF(x),$$

где

$$\beta(k,p) = \begin{cases} \ln k, & \text{при } p = 1, \\ k^{\alpha(p-1)}, & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Следовательно

$$E_1 \le \begin{cases} C\,\mathsf{E}\,|x_1| \ln^+ |x_1|, & \text{если } p = 1, \\ C\,\mathsf{E}\,|x_1|^p, & \text{если } p > 1. \end{cases}$$

Таким образом условие (6) выполнено.

Далее, для $\forall p \in [1,2)$, имеем

$$E_2 \le \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-2)-1}\,\mathsf{E}\,|x_1|^2 I(|x_1| \le n^\alpha) = \sum_{n\ge1} n^{\alpha(p-2)-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)^\alpha}^{k^\alpha} x^2\,dF(x)$$
$$\le C\sum_{k\ge1} k^{2\alpha} \int_{(k-1)^\alpha}^{k^\alpha} dF(x) \sum_{n\ge k} n^{\alpha(p-2)-1} \le C + C\sum_{k\ge1} k^{\alpha p} \int_{k^\alpha}^{(k+1)^\alpha} dF(x)$$
$$\le C + C\,\mathsf{E}\,|x_1|^p < \infty.$$

Следствие доказано. □

Литература

1. С. Х. Сираждинов, М. У. Гафуров, *Метод рядов в граничных задачах для случайных блужданий*, "Фан", Ташкент, 1987.
2. О. И. Клесов, *Усиленный закон больших чисел для случайных полей*, Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук (1981), Киев.
3. Sh. Sharakhmetov, *Convergence rates in the strong law of large numbers for dependent random variables*, USSR–Japan symp. **2** (1982), 202–203.
4. M. Peligrad, *Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences*, Z. Wahr. Verw. Geb. **70** (1985), 307–314.
5. Ш. Шарахмедов, И. Ж. Юлдашев, *Скорость сходимости в законе больших чисел для зависимых банаховозначных случайных величин*, Известия АН УзССР **5** (1988), 9–11.
6. G. Alsmeyer, *Convergence rates in the law of large numbers for martingales*, Stoc. Proc. and Their App. **36** (1990), 181–194.
7. H. Hall, C. C. Heyde, *Martingale limit theory and its application*, N. Y. Academic Press (1980).

700063, ТАШКЕНТ, ПРОСПЕКТ УЗБЕКИСТАНСКИЙ, 49, ТАШКЕНТСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

700063, ТАШКЕНТ, ПРОСПЕКТ УЗБЕКИСТАНСКИЙ, 49, ТАШКЕНТСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Поступила 16.03.95