Теор: ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 1–9

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 1–9

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД ФУНКЦІОНАЛУ МЕТОДУ КРОС-ПЕРЕВІРКИ

УДК 519.21

Т. О. БАРДАДИМ ТА О. В. ІВАНОВ

РЕЗЮМЕ. Одержано асимптотичний розклад функціоналу методу крос-перевірки, що використовується для оцінювання дисперсії помилки спостережень у нелінійній регресійній моделі.

1. Вступ

Метод крос-перевірки належить до методів статистичного оцінювання, пов'язаних із переформуванням вибірки (resampling methods). Так само, як і в методі "складаного ножа", що належить до того ж типу, для одержання оцінки невідомого параметра використовується спеціальний спосіб обробки експериментальних даних, а саме: обчислюється певна функція (найчастіше — середнє арифметичне) від оцінок, одержаних за зменшеною вибіркою. В результаті ймовірнісні характеристики оцінки змінюються у порівнянні з стандартними, наприклад, змінюється величина зсуву.

У даній роботі метод крос-перевірки використовується для оцінки дисперсії помилки спостережень у нелінійній регресійній моделі: одержано асимптотичний розклад (а.р.) цієї оцінки дисперсії, знайдено початкові члени а.р. її зсуву та дисперсії. В роботі продовжуються дослідження, розпочаті в [1–2].

В роботі [3] для нелінійної регресійної моделі з гауссовими помилками спостережень знайдено перші три члени а.р. Розвинута в [4] теорія дозволяє обійтись без припущення про гауссовість помилок. Виявилося, що при обчисленні членів а.р. треба ретельніше враховувати різницю між поняттями ймовірнісної та алгебраїчної малості залишкових членів, ніж це зроблено в роботі [3].

2. Опис моделі та позначення

Нехай $\boldsymbol{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $\mathcal{B}^n$ — σ-алгебра його борельових підмножин. Нашу увагу буде зосереджено на статистичних експериментах $\{\boldsymbol{R}^n, \mathcal{B}^n, P_\theta^n, \theta \in \Theta\}$, породжених спостереженнями $X = (X_1, \ldots, X_n)$ вигляду

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

В запису (1) $g(j,\theta)$, $j = 1, \ldots, n$ — невипадкові функції, що визначені на Θ^c, Θ^c — замкнення в $\boldsymbol{R}^q$ відкритої опуклої множини $\Theta \in \boldsymbol{R}^q$, $\{\varepsilon_j\}$ — незалежні випадкові величини (в.в.) з однією й тією ж функцією розподілу $P(X)$, що не залежить від θ, та дисперсією σ^2.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 62J02. Secondary 62J99.

Означення. Оцінкою найменьших квадратів (о.н.к.) невідомого параметра $\theta \in \Theta^c$, одержаною за спостереженнями $X_1, \dots, X_n$ виду (1), називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) \in \Theta^c$, для якого

$$L_n(\hat{\theta}_n) = \inf_{\tau \in \Theta^c} L_n(\tau), \qquad L_n(\tau) = \sum_{j=1}^{n} [X_j - g(j, \tau)]^2.$$

Будемо вважати виконаними умови, що забезпечують існування о.н.к. Ці умови необтяжливі й наведені в роботі [5].

Якщо звичайно для оцінки дисперсії помилки спостережень використовують статистику [6]

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{\sigma}_n^2(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} [X_j - g(j, \hat{\theta}_n)]^2, \tag{2}$$

то в методі крос-перевірки її замінює статистика

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} [X_j - g(t, \hat{\theta}_{(-t)})]^2, \tag{3}$$

де $\hat{\theta}_{(-t)}$ — о.н.к. параметра θ, одержана за вибіркою, з якої вилучено t-й елемент. Будемо й надалі використовувати індекс $(-t)$ для величин, що відносяться до такої скороченої вибірки.

Припустимо, що у функцій $g(j, \theta)$ для кожного j існують та неперервні в Θ^c всі частинні похідні за змінними $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^q)$ до порядку $k \geq 6$ включно. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i$, $g^{(\alpha)}(\theta) = (\partial^{|\alpha|}/\partial^{\alpha_1}\theta_1 \dots \partial^{\alpha_q}\theta_q) g$. Будемо користуватися також іншим записом похідних: для $r = 1, \dots, q$ і $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, q\}$ нехай $g_{i_1 \dots i_r}(\theta) = (\partial^r / \partial\theta_{i_1} \dots \partial\theta_{i_r}) g$. Введемо позначення:

$$\Im_n(\theta) = \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g^i(j, \theta) g^l(j, \theta) \right)_{i,l=1}^{q},$$

$$\Lambda_n(\theta) = \left(\Lambda_n^{il}(\theta) \right)_{i,l=1}^{q} = \Im_n^{-1}(\theta),$$

$$\varphi_n(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=1}^{n} [g(j, \theta_1) - g(j, \theta_2)]^2, \qquad u_n = n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta),$$

$$d(\alpha; \theta) = \left(\sum_{j=1}^{n} (g^{(\alpha)}(j, \theta_2))^2 \right)^{1/2}, \qquad \mu_r = \mathsf{E}\,|\varepsilon_j|^r,$$

$${}_l b_{i_1 \dots i_r}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^l g_{i_1 \dots i_r}(\theta), \qquad l = 1, 2, \dots,$$

$${}_l b^{(\alpha)}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^l g^{(\alpha)}(\theta), \qquad l = 1, 2, \dots,$$

$$\Phi_{\alpha n}(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^{n} \left[g^{(\alpha)}(j, \theta + u_1) - g^{(\alpha)}(j, \theta + u_2) \right]^2,$$

$$s(R) = \{ u \in \mathbf{R}^q : |u| < R \}, \qquad U(\theta) = \Theta - \theta,$$

$T \subset \Theta$ — деякий компакт, $\lambda_{\min}(A)$ — найменше власне число симетричної додатно визначеної матриці A,

$$\Pi_{(i_1)(i_2 i_3)}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_{i_1}(j,\theta) g_{i_2 i_3}(j,\theta),$$

$$\Pi_{(i_1)(i_2 i_3 i_4)}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_{i_1}(j,\theta) g_{i_2 i_3 i_4}(j,\theta), \quad \text{і т.д.}$$

Приймемо тензорну угоду: якщо в добутку двох або більшого числа співмножників який-небудь індекс зустрічається двічі, то це означає підсумування за всіма значеннями цього індексу від 1 до q. Наприклад,

$$\Lambda_n^{i i_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} b_{i_1 i_2} b_{i_3} = \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^{q} \Lambda_n^{i i_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} b_{i_1 i_2} b_{i_3}.$$

3. Умови регулярності

Для доведення теореми про а.р. функціоналу Q_n нам будуть потрібні умови, за яких одержано а.р. функціоналу методу "складаного ножа" (див. [1]).

I(l). Для довільного $R > 0$ існують такі константи $c_i = c_i(\alpha, R) < \infty$, $i = 1, 2$, що

1) $\sup_{\theta \in T} \sup_{u \in s^c(R) \cap U^c(\theta)} n^{-1} d^2(\alpha; \theta + u) \le c_1$, $|\alpha| = 1, \dots, l$;
2) $\sup_{\theta \in T} \sup_{u_1, u_2 \in s^c(R) \cap U^c(\theta)} n^{-1} \Phi_{\alpha n}(u_1, u_2) |u_1 - u_2|^{-2} \le c_2$, $|\alpha| = l$.

II(l). 1) $\underline{\lim}_{n \to \infty} \inf_{\theta \in T} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{r=1}^{l+1} g^{(\alpha_r)}(j,\theta) \right)^2 > 0$ для всіх $|\alpha_r| = 1, \dots, l$, для яких $g^{(\alpha_r)}(j,\theta) \not\equiv 0$.

2) $\underline{\lim}_{n \to \infty} \inf_{\theta \in T} \min_{1 \le t \le n} (n-1)^{-1} d^2_{(-t)}(\alpha, \theta) > 0$

для всіх $|\alpha| = 1, \dots, l+2$, для яких $g^{(\alpha)}(j,\theta) \not\equiv 0$.

III(l,m). $\overline{\lim}_{n \to \infty} \sup_{\theta \in T} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |g^{(\alpha)}(j,\theta)|^{lm} < \infty$, $|\alpha| = 1, \dots, l$.

IV. $\underline{\lim}_{n \to \infty} \inf_{\theta \in T} \min_{1 \le t \le n} \lambda_{\min} \left((n-1)^{-1} (n \Im_n(\theta) - \Im(i,\theta)) \right) \ge \lambda_0 > 0$, де

$$\Im(j,\theta) = \left(g^i(j,\theta) g^r(j,\theta) \right)_{i,r=1}^{q}.$$

V(l.m). $\mu_{lm+\delta} < \infty$ для деякого $\delta > 0$.

VI(m). $\sup_{\theta \in T} P_\theta^n \{ |\hat\theta - \theta| \le r \} = o(n^{-(m-2)/2})$ при $n \to \infty$ для $\hat\theta = \hat\theta_n$, $\hat\theta_{(-t)}$, $1 \le t \le n$ і довільного $r > 0$.

VII(m). $\sup_{\theta \in T} P_\theta^n \{ n^{1/2} |\hat\theta - \theta| > H \} \le c_3 H^{-m}$ для $\hat\theta = \hat\theta_n$, $\hat\theta_{(-t)}$, $1 \le t \le n$ з однією й тією ж константою $c_3 = c_3(m) < \infty$.

Умови, за яких забезпечується виконання VI(m) та VII(m) для $\hat\theta_n$, наведені в [4, 7, 8].

4. Основні результати

Теорема 1. *Якщо для моделі* (1) *виконуються наведені вище умови регулярності* I(k+4), II(k+2), III(k+4,m), IV, V(k+2,m), VI(k+2,m), *то для деякого цілого* $m \ge k+4$ *одержана за методом крос-перевірки оцінка дисперсії помилки спостережень* C_n *допускає а.р.*

$$\sup_{\theta \in T} P_\theta^n \left\{ \left| n^{1/2}(C_n - \sigma^2) - \sum_{\nu=0}^{k-2} n^{-\nu/2} G_{\nu n}^C(\theta) \right| > c_4 n^{-(k-1)/2} \log^{(k+1)/2} n \right\} \qquad (4)$$
$$= O(n^{-(m-2)/2} \log^{-m/2} n),$$

де

$$G_{0n}^{C} = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_j^2 - \sigma^2),$$

а $G_{\nu n}^{C}(\theta)$, $\nu = 1,\dots,k-2$ — *поліноми степеня* $\nu+1$ *відносно величин* ${}_l b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1,\dots,\nu$, $1 \le l \le \nu$ *з рівномірно обмеженими по* $\theta \in T$ *й* n *коефіцієнтами. Зокрема,*

$$G_{1n}^{C} = -\Lambda_n^{ij}{}_1b^i{}_1b^j + 2\sigma^2 q;$$

$$G_{2n}^{C} = \Lambda_n^{i_1j_1}\Lambda_n^{i_2j_2}\Lambda_n^{i_3j_3}\Pi_{(i_1i_2)(i_3)}{}_1b^{j_1}{}_1b^{j_2}{}_1b^{j_3} - \Lambda_n^{i_1j_1}\Lambda_n^{i_2j_2}{}_1b^{i_1i_2}{}_1b^{j_1}{}_1b^{j_2}$$
$$+ 2n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\Lambda_n^{i_1j_1}(\varepsilon_t^2-\sigma^2)g^{i_1}g^{j_1} + 2\sigma^2\left(-\Lambda_n^{i_1i_2}\Lambda_n^{i_3j_3}\Pi_{(i_1i_2)(i_3)}{}_1b^{j_3} + \Lambda_n^{i_1j_1}{}_1b^{i_1j_1}\right).$$

Коментар. Як і в одержаному в [1] а.р. функціоналу методу "складаного ножа", вираз для полінома G_{2n}^{C} відрізняється від знайденого в роботі [3]. Це можна пояснити тим, що залишкові члени розкладу у роботі [3] не були центровані.

Слід також зауважити, що на відміну від а.р. $\hat\sigma_n^2$, помилки $G_{\nu n}^{C}$ вже не будуть однорідними по величинах ${}_l b^{\alpha}(\theta)$. Це мало місце й для функціоналу методу "складаного ножа".

З технічної точки зору доцільно подати функціонал (3) у вигляді

$$C_n = nQ_n - \frac{n-1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat\sigma_{(-t)}^2(\hat\theta_{(-t)}), \tag{5}$$

де

$$Q_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - g(j,\hat\theta_{(-t)})\right)^2, \tag{6}$$

а $\hat\sigma_{(-t)}^2(\hat\theta_{(-t)}) = (n-1)^{-1}\sum_{j\neq t}[X_j - g(j,\hat\theta_{(-t)})]^2$ — аналогічна $\hat\sigma_n^2$ статистика для вибірки, з якої вилучено t-й елемент. Згадаємо, що функціонал методу "складаного ножа" має вигляд

$$J_n = n\hat\sigma_n^2 - \frac{n-1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat\sigma_{(-t)}^2(\hat\theta_{(-t)}), \tag{7}$$

тобто статистика (6) для C_n відіграє таку ж роль, як статистика (2) для J_n, що дає підстави для використання її при оцінюванні дисперсії помилки спостережень. Дійсно, має місце

Лема. *Якщо для моделі* (1) *виконуються наведені вище умови регулярності* I(k+2), II(k), III(k+2,m), IV, V(k,m), VI(m), *то для деякого цілого* $m \ge k+2$ *оцінка дисперсії помилки спостережень* Q_n *допускає а.р.*

$$\sup_{\theta\in T} P_\theta^n\left\{\left|n^{1/2}(Q_n-\sigma^2) - \sum_{\nu=0}^{k-2}n^{-\nu/2}G_{\nu n}^{Q}(\theta)\right| > c_5 n^{-(k-1)/2}\log^{(k+1)/2} n\right\}$$
$$= O(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n), \tag{8}$$

де

$$G_{0n}^{Q} = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_j^2 - \sigma^2),$$

а $G^Q_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 1,\ldots,k-2$ — *поліноми степеня* $\nu+1$ *відносно величин* ${}_l b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1,\ldots,\nu$, $1 \le l \le \nu$ *з рівномірно обмеженими по* $\theta \in T$ *й* n *коефіцієнтами. Зокрема,*

$$G^Q_{1n} = -\Lambda^{ij}_n {}_1b^i {}_1b^j;$$
$$G^Q_{2n} = \Lambda^{i_1j_1}_n \Lambda^{i_2j_2}_n \Lambda^{i_3j_3}_n \Pi_{(i_1i_2)(i_3)} {}_1b^{j_1} {}_1b^{j_2} {}_1b^{j_3} - \Lambda^{i_1j_1}_n \Lambda^{i_2j_2}_n {}_1b^{i_1i_2} {}_1b^{j_1} {}_1b^{j_2}.$$

Доведення леми. Доведення проводиться аналогічно [1]. Спочатку функціонал розкладається у ряд Тейлора й за допомогою умов регулярності розподілу 3 доводиться, що

$$\sup_{\theta\in T} P^n_\theta \left\{ \left| n^{1/2}(Q_n - \sigma^2) - \sum_{\nu=0}^{k-2} n^{-\nu/2} G^Q_{\nu n}(\theta) \right| > c_5 n \cdot n^{-(k-1)/2} \log^{k/2} n \right\} \\ = O(n^{-(m-2)/2} \log^{m/2} n), \tag{9}$$

де $G^Q_{\nu n}(\theta) = (n/(n-1))^{1/2} A^Q_{\nu n}(\theta) - 2B^Q_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 1,\ldots,k-2$, а

$$A^Q_{\nu n}(\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} 1/r!\, a_{i_1\ldots i_r}(\theta) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h^{i_1}_{\alpha_1(-t)}(\theta) \cdots h^{i_r}_{\alpha_r(-t)}(\theta),$$

$$B^Q_{\nu n}(\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} 1/r!\, b_{i_1\ldots i_r}(\theta) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h^{i_1}_{\alpha_1(-t)}(\theta) \cdots h^{i_r}_{\alpha_r(-t)}(\theta);$$

$h^i_{\alpha_1(-t)}$ — i-та компонента полінома а.р. оцінки найменших квадратів, одержаної за вибіркою, з якої вилучено t-й елемент. Далі використовується твердження про структуру поліномів а.р. о.н.к. [9]: при виконанні умов регулярності розділу 3 поліноми $h_{\nu(-t)}(\theta)$ а.р. о.н.к. має таку структуру:

$$h_{\nu(-t)}(\theta) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\{i,j\}} c(\nu,\mu) \prod_{r=1}^{\nu+\mu+1} \Lambda^{i_rj_r}_{(-t)} \prod_{r=1}^{\mu} \Pi^{(-t)}_{(m^1_r)(m^2_r)}(\theta) \prod_{r=1}^{\nu+1} b^{(\alpha_r)}_{(-t)}(\theta),$$

де $\sum_{\{i,j\}}$ означає підсумування за всіма можливими розбиттями множини

$$\{i_2,\ldots,i_{\nu+\mu+1}\} \cup \{j_1,\ldots,j_{\nu+\mu+1}\}$$

на $\mathbb{U}^{\mu}_{r=1}((m^1_r) \cup (m^2_r)) \cup \mathbb{U}^{\nu+1}_{\gamma=1}(\alpha_\gamma)$, $c(\nu,\mu)$ — невипадкові сталі коефіцієнти.

Аналогічно роботі [1], звільнимося за допомогою наведених нижче підстановок від величин, що мають індекс $(-t)$:

$$\Pi^{(-t)}_{(m_1)(m_2)} = [n/(n-1)] \left[\Pi^{(n)}_{(m_1)(m_2)} - n^{-1} g^{(m_1)}(t,\theta) g^{(m_2)}(t,\theta) \right]; \tag{10}$$

$${}_l b^{(\alpha)}_{(-t)}(\theta) = [n/(n-1)]^{1/2} \left[{}_l b^{(\alpha)}_n - n^{-1/2} \varepsilon^l_t g^{(\alpha)}(t,\theta) \right]; \tag{11}$$

$$\Lambda^{i_1i_2}_{(-t)} = (n-1)/n[\Lambda^{i_1i_2}_n + n^{-1} \left(\Lambda^{i_1j_1}_n g^{j_1}(t,\theta) g^{j_2}(t,\theta) \Lambda^{j_2i_2}_n \right) \\ + n^{-2} \left(\Lambda^{i_1j_1}_n g^{j_1}(t,\theta) g^{j_2}(t,\theta) \right) \Lambda^{j_2i_2}_n + \cdots]. \tag{12}$$

В результаті одержуємо ряд за степенями $n^{-1/2}$. В загальному члені n стоїть у степені $-\rho = -(\rho_\Pi + \frac{1}{2}\rho_\Lambda \rho_B + \frac{1}{2})$, якщо $\rho_B \ne 0$, де ρ_Π — степень, одержаний з добутку $\prod_{r=1}^{\nu+\mu} \Lambda^{i_rj_r}_n$, ρ_Λ — з добутку $\prod_{r=1}^{\mu} \Pi^{(n)}_{(m^1_r)(m^2_r)}(\theta)$, ρ_B — з добутку $\prod_{r=1}^{\nu+1} b^{(\alpha_r)}_{(n)}(\theta)$, і в степені $-\rho = -(\rho_\Pi + \rho_\Lambda)$, якщо $\rho_B = 0$. Зберемо у $G_{\nu n}(\theta)$ всі члени із степенем $n^{-\nu/2}$ й проведемо центрування, як у [1]:

$$
\begin{aligned}
G_{\nu n}(\theta) = P_{\nu n}(\theta) &+ \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2}+\rho_\Pi+\rho_\Lambda=\frac{\nu}{2}+1} c(r,\rho_\Pi,\rho_\Lambda,\mu)(-1)^{\rho_\Pi} \prod_{\gamma=1}^{\mu+r+\rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \\
&\quad \times \prod_{\gamma=1}^{\mu-\rho_\Lambda} \Pi^{(n)}_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)} \Pi^{(n)}_{(m_1)\dots(m_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)})} \prod_{\gamma=1}^{r+1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)} \\
&+ \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2}+\rho_\Pi+\rho_\Lambda+\frac{\rho_B}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\nu}{2}} c(r,\rho_\Pi,\rho_\Lambda,\rho_B,\mu)(-1)^{\rho_\Pi+\rho_B} \prod_{\gamma=1}^{\mu+r+\rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \\
&\quad \times \prod_{\gamma=1}^{\mu-\rho_\Lambda} \Pi^{(n)}_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)} \prod_{\gamma=1}^{r-\rho_B+1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)} \cdot {}_{\rho_B}\mathcal{B}_n^{(\alpha_1)\dots(\alpha_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)+\rho_B})} \\
&+ \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2}+\rho_\Pi+\rho_\Lambda+\frac{\rho_B}{2}=\frac{\nu}{2}+1} c(r,\rho_\Pi,\rho_\Lambda,\rho_B,\mu)(-1)^{\rho_\Pi+\rho_B} m_{\rho_B} \prod_{\gamma=1}^{\mu+r+\rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \\
&\quad \times \prod_{\gamma=1}^{\mu-\rho_\Lambda} \Pi^{(n)}_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)} \Pi^{(n)}_{(m_1)\dots(m_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)+\rho_B})} \prod_{\gamma=1}^{r-\rho_B+1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

де

$$
{}_{\rho_B}\mathcal{B}_n^{(\alpha_1)\dots(\alpha_\gamma)} = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} (\varepsilon_j^{\rho_B} - m_{\rho_B}) g^{(\alpha_1)}(t,\theta) \cdots g^{(\alpha_\gamma)}(t,\theta).
$$

Структура поліномів а.р. Q_n збігається з структурою поліномів а.р. функціоналу методу "складаного ножа", так що поліноми $G^q_{\nu n}(\theta)$ вже не будуть однорідними по величинах $g^{(\alpha)}(\theta)$, як це мало місце для поліномів а.р. $\hat{\sigma}_n^2$.

Інформація про структуру поліномів а.р. Q_n нам потрібна, щоб звільнитися від додаткового степеня n у формулі (9) й привести її до вигляду (8). Дійсно, в [1] за допомогою одновимірного рівномірного по $\theta \in \Theta$ варіанту твердження 17.13 [10, с. 185–186] для поліномів, що мають структуру (19) при $\nu = k-1, k$ доведено

$$
\sup_{\theta\in\Theta} P_\theta^n \{ |G^Q_{\nu n}(\theta)| > c_6 \log^{k+1/2} n \} = O(n^{-(m-2)/2} \log^{-m/2} n).
$$

Це дозволяє винести $n^{-\nu/2} G^Q_{\nu n}$, $\nu = k-1, k$ у залишковий член і звести (9) до виду (8). □

Схема доведення теореми 1. На підставі (5)–(7) функціонал (3) зводиться до вигляду

$$
C_n = J_n + n(Q_n - \hat{\sigma}_n^2), \tag{14}
$$

причому розклади усіх елементів правої частини (14) вже одержані. Скориставшись цими розкладами, прирівняємо в (14) поліноми при однакових степенях $n^{-\nu/2}$ (верхній індекс позначає функціонал, до якого відноситься вираз):

$$
G^C_{\nu n} = G^J_{\nu n} + n(G^Q_{\nu+2,n} - G^\sigma_{\nu+2,n}); \tag{15}
$$

аналогічно для залишкових членів виконується

$$
|R^C_{k-1,n}| \le |R^J_{k-1,n}| + n\big(|R^Q_{k+1,n}| + |R^\sigma_{k+1,n}|\big),
$$

де, згідно з (8) і аналогічними виразами з [1], [4], [5]

$$R^Q_{k+1,n}(\theta) = n^{-(k-1)/2} n^{-1} \eta^Q_{k+1,n}(\theta),$$

$$\sup_{\theta\in T} P^n_\theta\{|\eta^Q_{k+1,n}(\theta)| > c_7 \log^{(k+3)/2} n\} = O\big(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n\big),$$

$$R^J_{k-1,n}(\theta) = n^{-(k-1)/2}\eta^J_{k-1,n}(\theta),$$

$$\sup_{\theta\in T} P^n_\theta\{|\eta^J_{k-1,n}(\theta)| > c_8 \log^{(k+1)/2} n\} = O\big(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n\big),$$

$$R^\sigma_{k+1,n}(\theta) = n^{-(k-1)/2} n^{-1} \eta^\sigma_{k+1,n}(\theta),$$

$$\sup_{\theta\in T} P^n_\theta\{|\eta^\sigma_{k+1,n}(\theta)| > c_9 \log^{(k+2)/2} n\} = O\big(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n\big).$$

В результаті

$$R^C_{k-1,n}(\theta) = n^{-(k-1)/2}\eta^C_{k-1,n}(\theta),$$

де $\eta^C_{k-1,n}(\theta) = \eta^J_{k-1,n}(\theta) + \eta^Q_{k+1,n}(\theta) + \eta^\sigma_{k+1,n}(\theta)$ й має місце

$$\sup_{\theta\in T} P^n_\theta\{|\eta^C_{k-1,n}(\theta)| > c_{10} \log^{(k+3)/2} n\} = O\big(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n\big).$$

Початкові члени а.р. (4) можна одержати, виконавши підстановки (10)–(12) безпосередньо у функціоналі (3). □

Зауваження. Виразом (15) і початковими членами розкладів C_n, J_n можна скористатися для доведення того факту, що різниця між а.р. функціоналів Q_n та $\hat\sigma^2_n$ проявляється, починаючи з третього члена:

$$G^Q_{3,n} = G^\sigma_{3,n} + \sigma^2 q n^{-1}.$$

За допомогою одержаних а.р. (4) й (8) за схемою [2, 4, 6] доводиться теорема про а.р. зсуву та дисперсії запропонованих оцінок. Для скорочення запису будемо позначати $S(C_n) = \mathsf{E}^n_\theta\big(n^{1/2}(C_n - \sigma^2)\big)^2$, $D(C_n) = \mathbf{D}^n_\theta\big(n^{1/2}(C_n-\sigma^2)\big)$ і так само для всіх інших функціоналів.

Теорема 2. *Якщо для моделі* (1) *при* $k=4$ *та* $m\ge 6$ *виконуються наведені вище умови регулярності* I(k+4), II(k+4), III(k+4,m), IV, V(k+2,m), VI(m), *то для функціоналу* Q_n

$$\sup_{\theta\in T}\big|\mathsf{E}^n_\theta\, n^{1/2}(Q_n-\sigma^2) + q\sigma^2 n^{-1/2}\big| = \begin{cases} O(n^{-1/2}(\log n)^{-1}), & m=6,7;\\ O(n^{-1/2}(\log n)^{-3/2}), & m=8,9;\\ O(n^{-1/2}(\log n)^{-5/2}), & m\ge 10;\end{cases}$$

$$\sup_{\theta\in T}\big|S(Q_n) - \sigma^4\left[(\gamma_2+2) + n^{-1}(q^2-2q-2q\gamma_2+2\gamma_1\sigma Z(\theta))\right]\big| = o(n^{-1}), \qquad m\ge 12;$$

$$\sup_{\theta\in T}\big|D(Q_n) - \sigma^4\left[(\gamma_2+2) + n^{-1}(-2q(\gamma_2+1)+2\gamma_1\sigma Z(\theta))\right]\big| = o(n^{-1}), \qquad m\ge 12;$$

а для функціоналу методу крос-перевірки C_n —

$$\sup_{\theta\in T}\big|\mathsf{E}^n_\theta\, n^{1/2}(C_n-\sigma^2) + q\sigma^2 n^{-1/2}\big| = \begin{cases} o(n^{-1/2}), & m=10,11;\\ o(n^{-1}), & m\ge 12;\end{cases}$$

$$\sup_{\theta\in T}\big|S(C_n) - \sigma^4\left[(\gamma_2+2) + n^{-1}(q^2+2q-2q(\gamma_2+3)-2\gamma_1\sigma Z(\theta))\right]\big| = o(n^{-1}),$$

$$\sup_{\theta\in T}\big|D(C_n) - \sigma^4\left[(\gamma_2+2) + n^{-1}(2q(\gamma_2+3)+2\gamma_1\sigma Z(\theta))\right]\big| = o(n^{-1}),$$

$$m\ge 18;$$

де γ_1 *й* γ_2 *— коефіцієнти асиметрії та ексцесу в.в.* ε_j, *а*

$$Z(\theta) = \Lambda_n^{i_1 i_2} \left(\Lambda_n^{l_1 l_2} \Pi_{(i_1 i_2)(l_1)} \Pi_{(l_2)} - \Pi_{(i_1 i_2)} \right). \qquad (16)$$

5. Висновки

Порівняємо на основі знайдених у даній роботі та в роботах [1, 2, 4, 6] а.р. статистичні властивості всіх чотирьох оцінок дисперсії помилки спостережень: C_n, Q_n, $\hat{\sigma}_n^2$ та J_n. З точністю до членів степеня $n^{-3/2}$ функціонал Q_n збігається із стандартним функціоналом $\hat{\sigma}_n^2$, але потребує більше операцій при обчисленні. Тому можна відзначити лише його теоретичну цінність. Дійсно, він виявився дуже корисним при одержанні а.р. функціоналу методу крос-перевірки, де безпосереднє застосування методики [4, 6] потребувало складніших умов регулярності, ніж наведені у розділі 3. З точністю до $o(n^{-1})$ оцінка J_n має найменший зсув. Величини зсуву для C_n та Q_n, $\hat{\sigma}_n^2$ однакові за модулем й відрізняються за знаком.

Наведемо формули для а.р. середньоквадратичного відхилення та дисперсії $\hat{\sigma}_n^2$ й J_n, одержані в [2, 4, 6].

$$S(J_n) = \sigma^4(\gamma_2 + 2) + 2q\sigma^4 n^{-1} + o(n^{-1}).$$

Вираз для $D(J_n)$ збігається в виразом для $S(J_n)$.

$$S(\hat{\sigma}_n^2) = \sigma^4\left((\gamma_2 + 2) + n^{-1}[q^2 - 2q(\gamma_2 + 1) + 2\gamma_1 \sigma Z(\theta)]\right) + o(n^{-1}),$$
$$D(\hat{\sigma}_n^2) = \sigma^4\left((\gamma_2 + 2) + n^{-1}[-2q(\gamma_2 + 1) + 2\gamma_1 \sigma Z(\theta)]\right) + o(n^{-1}).$$

Ці оцінки рівномірні по $\theta \in T$ й n і виконуються для $m \geq 18$.

Розглянемо різницю

$$S(\hat{\sigma}_n^2) - S(J_n) = \sigma^4\left(q^2 - 2q(\gamma_2 + 2) + 2\gamma_1 \sigma Z(\theta)\right) n^{-1} + o(n^{-1}). \qquad (17)$$

Знак різниці залежить від знаку виразу в правій частині (17). Відомо, що $\gamma_2 \geq -2$ причому випадок $\gamma_2 = -2$ відповідає виродженій ситуації, коли $\varepsilon_j = \text{const}$, і не буде розглядатися нижче. Нехай $\gamma_1 = 0$, тоді для $q > 2(2+\gamma_2)$ й великих n $S(\hat{\sigma}_n^2) > S(J_n)$. А, наприклад, для гауссової $(0, \sigma^2)$ в.в. ε_j $(\gamma_2 = 0)$ для вимірностей $q = 1, 2, 3$ при великих n $S(\hat{\sigma}_n^2) < S(J_n)$. Так само

$$S(C_n) - S(J_n) = \sigma^4\left(q^2 + 2q(\gamma_2 + 2) + 2\gamma_1 \sigma Z(\theta)\right) n^{-1} + o(n^{-1})$$

Оскільки $\gamma_2 > -2$, то при $\gamma_1 = 0$ й великих n $S(C_n) > S(J_n)$. Аналогічно

$$S(C_n) - S(\hat{\sigma}_n^2) = \sigma^4\left(4q(\gamma_2 + 2) - 4\gamma_1 \sigma Z(\theta)\right) n^{-1} + o(n^{-1}).$$

Оскільки $\gamma_2 > -2$, то при $\gamma_1 = 0$ й великих n $S(C_n) > S(\hat{\sigma}_n^2)$.

Таким чином, при $\gamma_1 = 0$ й великих n дисперсії та середньоквадратичні відхилення функціоналів Q_n та $\hat{\sigma}_n^2$ виявляються найменшими (за винятком випадку $q > 2(2+\gamma_2)$, коли $S(\hat{\sigma}_n^2) > S(J_n)$). На другому місті за цими показниками стоїть J_n, а функціонал C_n має найгірші характеристики. Якщо ж в.в. ε_j має ненульову асиметрію $(\gamma_1 \neq 0)$, то на співвідношення дисперсій та середньоквадратичних відхилень впливатимуть властивості функції регресії, що характеризуються членом $Z(\theta)$ (див. (16)). Зауважимо також, що на відміну від середньоквадратичних відхилень, співвідношення між $D(\hat{\sigma}_n^2)$ і $D(J_n)$ при $\gamma_1 = 0$ й великих n не залежіть від вимірності простору: $D(\hat{\sigma}_n^2) < D(J_n)$.

Література

1. Т. А. Бардадым, А. В. Иванов, *Асимптотические разложения, связанные с функционалом метода "складного ножа"* I, Український математичний журнал **47** (1995), № 4, 443–451.
2. ———, *Асимптотические разложения, связанные с функционалом метода "складного ножа"* II, Український матем. журнал **47** (1995), № 6, 731–736.
3. S. A. Zwanzig, *A third order asymptotic comparison of least squares, Jacknifing and cross-validation for error variance estimation in nonlinear regression*, Math. Operat. und Statist. **16** (1985), № 1, 47–54.
4. А. В. Иванов, *Теория оценивания параметров нелинейных моделей регрессии*, Дис. д-ра физ.-мат. наук. 01.01.05. Защищена 18.11.91; Утв. 06.03.92; 0357000782, Киев, 1991.
5. J. Pfanzagl, *On the measurability and consistency of minimum contrast Estimates*, Metrika **14** (1996), № 2–3, 249–272.
6. Т. А. Бардадым, А. В. Иванов, *Асимптотические разложения, связанные с оценкой дисперсии ошибки наблюдения для модели "сигнал плюс шум"*, Теор. вероятност. и матем. статист. **33** (1985), 11–20.
7. А. В. Иванов, *Асимптотические розложения для распределения оценки наименьших квадратов параметра нелинейной функции регрессии*, Теор. вероятност. и применен. **21** (1976), № 3, 571–583.
8. ———, *Две теоремы о состоятельности оценок наименьших квадратов*, Теор. вероятност. и матем. статист. **28** (1983), 25–34.
9. Т. А. Бардадым, *Про структуру асимптотичних розкладів оцінки найменших квадратів та оцінки дисперсії*, Теор. ймовірност. та матем. статист. **53** (1995), 1–5.
10. Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао, *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*, "Наука", Москва, 1982.

252650, ГСП КИЇВ, ПРОСПЕКТ АКАДЕМІКА ГЛУШКОВА, 40, ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМ. В. М. ГЛУШКОВА

252650, ГСП КИЇВ, ПРОСПЕКТ АКАДЕМІКА ГЛУШКОВА, 40, ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМ. В. М. ГЛУШКОВА

Надійшла 21.06.94