Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 54, 1996, стор. 47–57

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 54, 1996, pp. 47–57

ОБЧИСЛЕННЯ ТА ОЦІНКИ ПОКАЗНИКА ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ ЕРГОДИЧНОСТІ ЗАГАЛЬНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ І ЛАНЦЮГІВ ІЗ ЗВОРОТНИМИ ЯДРАМИ

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ

РЕЗЮМЕ. Розглядаються ланцюги Маркова і стрибкоподібні марковські процеси з вимірним простором станів та із зворотними за часом перехідними ядрами. Такі ядра породжують самоспряжені лінійні оператори в просторі інтегровних у квадраті функцій по відповідній ергодичній мірі. Знайдено явні вирази для показника експоненціальної ергодичності вказаних процесів у термінах розв'язків допоміжних екстремальних задач для квадратичних форм від перехідних ядер. Доведені також явні нерівності для даного показника.

В даній статті розглядаються перехідні ядра на вимірному просторі, для яких при деякому виборі початкового розподілу початкове та наступне значення відповідного ланцюга Маркова мають симетричний сумісний розподіл. Такі ядра породжують добре відомі зворотні за часом марковські процеси та ланцюги. Вперше критерій зворотності сформулював А. М. Колмогоров [1], узагальнення знайшов Ф. Келлі [2]. Близьке до запропонованого у даній статті поняття μ-зворотного процесу ввів П. Поллетт [3] для зліченного простору станів.

Важливою особливістю розглянутого класу процесів є симетрія зв'язаних з ними операторів, що суттєво спрощує їх спектральні і, як наслідок, ергодичні властивості. Вперше на вказану особливість звернули увагу С. Карлін, Дж. Мак-Грегор [4], Д. Кендал [5], пізніше її використали В. Макі [6], Е. ван Доорн [7], М. Креєр [8] та інші автори.

Зокрема, проста структура спектра перехідного ядра чи генератора зворотного процесу дозволяє просто обчислити (через розв'язок допоміжної екстремальної задачі) або явно оцінити (як деякий функціонал від оператора) показник експоненціальної ергодичності. Саме це є предметом розгляду даної статті. Раніше близькі результати формулювалися лише для процесів народження та загибелі з дискретним простором станів. В роботі [9] встановлено деякі оцінки вказаного показника для загальних стрибкоподібних процесів.

1. Зворотні ядра та їх оператори

Нехай $(E, \mathcal{E})$ — деякий вимірний простір. Перехідним ядром (або просто ядром) на $(E, \mathcal{E})$ називається функція $G(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$), $\mathcal{E}$-вимірна по x при $A \in \mathcal{E}$, яка є знакозмінною мірою по A при кожному $x \in E$, причому відповідні невід'ємні компоненти $G^{\pm}(x, A)$ у розкладі Гана також вимірні по x.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60K20.

З ядром G пов'яжемо лінійні відображення вимірних функцій f на E і скінченних мір μ на $\mathcal{E}$ та лінійну форму на парах μ, f:

$$Gf(x) = \int_E G(x, dy) f(y), \qquad \mu G(A) = \int_E \mu(dx) G(x, A), \qquad \mu f(x) = \int_E f(x) \mu(dx) \tag{1}$$

у випадку, коли вказані інтеграли визначені коректно.

Означення 1. Ядро G назвемо σ-скінченним, якщо функція повної варіації $g(x) = |G|(x, E)$ скінченна і існує всюди додатна вимірна функція $w(x)$ така, що дія варіації $|G|w(x) = \int_E w(y)|G|(x, dy)$ є обмеженою функцією x.

Зокрема, всі стохастичні ядра є σ-скінченними.

Позначимо через $\aleph(E)$ клас всіх σ-скінченних ядер. Нехай $\aleph_+(E)$ і $\aleph_1(E)$ — відповідні підкласи невід'ємних та стохастичних ядер, а $\aleph_0(E)$ містить ядра — генератори стрибкоподібних марковських процесів, тобто таких σ-скінченних ядер G, що $G(x, E) = 0$ і $0 \le G(x, A \setminus \{x\}) < \infty$ при $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$. Надалі для коректності тверджень про клас $\aleph_0(E)$ припускатимемо, що $\{x\} \in \mathcal{E}$ при $x \in E$, і цей клас містить лише ядра G з вимірною по x функцією $G^+(x, A) = G(x, A \setminus \{x\})$. Зауважимо, що вказане відображення встановлює однозначну відповідність між класами $\aleph_+(E)$ і $\aleph_0(E)$, оскільки $G(x, A) = -G^+(x, E)\mathbb{1}_{\{x \in A\}} + G^+(x, A)$.

Позначимо через I_B ядро вигляду $I_B(x, A) = \mathbb{1}_{\{x \in A \cap E\}}$, а $I = I_E$.

Нехай $G \in \aleph(E)$, а π — деяка міра на $\mathcal{E}$. Визначимо прямий добуток π на G як міру $\pi \cdot G$ на прямому добутку $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, породжену значеннями на прямокутниках $A \times B$ вигляду

$$\pi \cdot G(A \times B) = \int_A \pi(dx) G(x, B). \tag{2}$$

Лема 1. *Для будь-яких ядра $G \in \aleph(E)$ і міри π на $\mathcal{E}$ міра $\pi \cdot G$ σ-скінченна відносно системи множин $E \times E_n$, де*

$$E_n = \{x : g(x) \le n\} \cap \{x : w(x) \ge 1/n\}, \tag{3}$$

а функції g і w входять у означення 1 класу $\aleph(E)$.

Доведення. Нехай $g(x) = |G|(x, E)$ і $|G|w(x) \le 1$ для деякої додатної функції $w(x)$, згідно з означенням класу $\aleph(E)$. Оскільки $g < \infty$ і $w > 0$, то $E_n \uparrow E$ при $n \to \infty$.

Зауважимо, що $|G|(x, E) \le n$ при $x \in E_n$ і $|G|(x, E_n) \le n$ для всіх $x \in E$, оскільки, згідно з (3),

$$1 \ge \int_E |G|(x, dy) w(y) \ge \int_{E_n} |G|(x, dy) w(y) \ge \frac{1}{n} |G|(x, E_n).$$

Звідси

$$|\pi \cdot G|(E \times E_n) \le \int_E \pi(dx) |G|(x, E_n) \le n\pi(E),$$

що і доводить твердження леми. $\square$

Означення 2. Нехай $G \in \aleph(E)$, а π — міра на $\mathcal{E}$. Назвемо ядро G π-зворотним, якщо міра $\pi \cdot G$ є симетричною, тобто для довільних A, $B \in \mathcal{E}$

/A). (4)

Позначимо через $\mathfrak{I}(\pi)$ клас усіх π-зворотних ядер, $\mathfrak{I}_+(\pi) = \mathfrak{I}(\pi) \cap \aleph_+(E)$, $\mathfrak{I}_0(\pi) = \mathfrak{I}(\pi) \cap \aleph_0(E)$, $\mathfrak{I}_1(\pi) = \mathfrak{I}(\pi) \cap \aleph_1(E)$.

Лема 2. *Справедливі наступні твердження:*

a) *якщо* $G \in \mathfrak{I}_1(\pi)$, *то міра* π *інваріантна для* $G{:}\pi = \pi G$;
b) *якщо* $G \in \mathfrak{I}_0(\pi)$, *то міра* π *анулює* $G{:}\pi G = 0$;
c) *для включення* $G \in \mathfrak{I}_0(\pi)$ *необхідно і досить, щоб* $G^+ \in \mathfrak{I}_+(\pi)$;
d) *клас* $\mathfrak{I}(\pi)$ *є лінійним;*
e) *клас* $\mathfrak{I}(\pi)$ *замкнений відносно операції звуження: з* $G \in \mathfrak{I}(\pi)$ *випливає, що* $G_H = I_H G I_H \in \mathfrak{I}(\pi I_H) \subset \mathfrak{I}(\pi)$.

Доведення. Твердження *a*), *b*) безпосередньо випливають з тотожності $\pi \cdot G(E \times A) = \pi \cdot G(A \times E)$, оскільки $G(x, E) = 1$ або 0 відповідно за умов a), b).

Для доведення твердження c) обчислимо

$$\pi \cdot G(A \times B) = \int_A \pi(dx) G(x, B) = \int_A \pi(dx) \big[-G^+(x, E) \mathbf{1}_{\{x \in B\}} + G^+(x, B) \big]$$
$$= -\pi \cdot G^+(x, A \cap B) + \pi \cdot G^+(A \times B).$$

З цієї рівності випливає еквівалентність включень $G \in \mathfrak{I}_0(\pi)$ та $G^+ \in \mathfrak{I}_+(\pi)$.

Твердження d) очевидне. Доведення твердження e) грунтується на рівностях

$$\pi I_H \cdot G_H(A \times B) = \pi \cdot G_H(A \times B) = \pi \cdot G\big((A \cap \mathbf{H}) \times (B \cap \mathbf{H})\big)$$
$$= \pi \cdot G\big((B \times \mathbf{H}) \times (A \cap \mathbf{H})\big) = \pi \cdot G_H(B \times A) = \pi I_H \cdot G_H(B \times A).$$

Лема доведена. □

Позначимо через $L_2(\pi)$ гільбертів простір вимірних інтегровних у квадраті функцій на E, з скалярним добутком та нормою

$$(f, h) = \int_E f(x) \overline{h(x)} \pi(dx), \qquad ||f||^2 = \int_E |f(x)|^2 \pi(dx). \tag{5}$$

Нехай $L_2(\pi, B) = L_2(\pi I_B)$ містить функції, інтегровні з квадратом на множині $B \in \mathcal{E}$.

Зв'яжемо з кожним ядром $G \in \aleph(E)$ лінійний оператор G на $L_2(\pi)$ з дією (1). Нехай $\mathbf{D}(G) \subset L_2(\pi)$ — його область визначення, а $\boldsymbol{R}(G)$ — область значень. Якщо G — обмежений оператор, то його норма

$$||G|| = \sup \big(||Gf||, ||f|| = 1 \big). \tag{6}$$

Лема 3. *Справедливі наступні твердження:*

a) *якщо* $G^\pm \in \mathfrak{I}(\pi)$, *то лінійний оператор* G *в* (1) *є щільно визначеним самоспряженим оператором в* $L_2(\pi)$, *а з обмеженості функції* $g(x) = |G|(x, E)$ *випливає обмеженість оператора* G;
b) *ядро* $G \in \mathfrak{I}_0(\pi)$ *відповідає щільному замкненому самоспряженому недодатно визначеному оператору в* $L_2(\pi)$, *а* $G \in \mathfrak{I}_1(\pi)$ — *обмеженому самоспряженому оператору на* $L_2(\pi)$ *з невід'ємно визначеним оператором* $I - G$.

Доведення. Зауважимо, що ядра $G = G^+ - G^-$ та $|G| = G^+ + G^-$ належать класу $\mathfrak{I}(\pi)$ за лемою 2.

Нехай множини E_n визначаються по ядру G згідно з (3). Позначимо

$$L_2^n(\pi) = L_2(\pi, E_n) \cap \{f{:}\, f(x) = 0, x \notin E_n\},$$
$$L_2^0(\pi) = \bigcup_{n \geq 1} L_2^n(\pi), \qquad L_2^\infty(\pi) = \bigcap_{n \geq 1} L_2(\pi, E_n). \tag{7}$$

Зауважимо, що простір $L_2^0(\pi) \subset L_2(\pi)$ вкладений щільно, оскільки $E_n \uparrow E$.

Доведемо, що для будь-якої $f \in L_2(\pi)$ дія $Gf \in L_2^\infty(\pi)$. Дійсно, за нерівністю Коші з (3) та (4) отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{E_n} \pi(dx)|Gf(x)|^2 &\le \int_{E_n} \pi(dx)\Big(\int_E |G|(x,dy)|f(y)|\Big)^2 \\ &\le \int_{E_n} \pi(dx)|G|(x,E)\Big(\int_E |G|(x,dy)|f(y)|^2\Big) \\ &\le n\int_{E\times E} \pi\cdot|G|(dx,dy)|f(y)|^2 \mathbb{1}_{\{En\}}(x) \\ &= n\int_{E\times E} \pi\cdot|G|(dx,dy)|f(x)|^2 \mathbb{1}_{\{En\}}(y) \\ &= n\int_E \pi(dx)|f(x)|^2 G(x,E_n) \le n^2\|f\|^2,\end{aligned} \tag{8}$$

тобто $Gf \in L_2^n(\pi)$ при кожному n.

Нехай тепер $h \in L_2^0(\pi)$, тобто $h \in L_2^n(\pi)$ для деякого n і $h(x)=0$ при $x \notin E_n$. З урахуванням (3) і (4) справедлива оцінка

$$\begin{aligned}\|Gh\|^2 \le \||G|\cdot|h|\|^2 &= \int_E \pi(dx)\Big(\int_{En} |G|(x,dy)|h(y)|\Big)^2 \\ &\le \int_E \pi(dx)|G|(x,E_n)\Big(\int_{E_n} |G|(x,dy)|h(y)|^2\Big) \\ &\le n\int_{E\times E} \pi\cdot|G|(dx,dy)|h(y)|^2 = n\int_{E\times E} \pi\cdot|G|(dx,dy)|h(x)|^2 \\ &= n\int_E \pi(dx)g(x)|h(x)|^2 = n\int_{En} \pi(dx)g(x)|h(x)|^2 \le n^2\|h\|^2.\end{aligned} \tag{9}$$

З (8) і (9) випливає, зокрема, що для будь-яких $f \in L_2(\pi)$ і $h \in L_2^0(\pi)$ коректно визначений і збігається кратний інтеграл

$$\begin{aligned}&\int_{E\times E} \pi\cdot|G|(dx,dy)|f(x)h(y)| \\ &\qquad = \int_E \pi(dx)|f(x)|\cdot|G|\cdot|h|(x) \le \|f\|\cdot\||G|\,|h|\| < \infty.\end{aligned}$$

Тому за теоремою Фубіні при $f \in L_2(\pi)$ і $h \in L_2^0(\pi)$

$$\begin{aligned}(f,Gh) &= \int_E \pi(dx)f(x)\overline{Gh(x)} = \int_E \pi\cdot G(dx,dy)f(x)\overline{h(y)} \\ &= \int_{E\times E} \pi\cdot G(dx,dy)f(y)\overline{h(x)} = \int_E \pi(dx)\overline{h(x)}Gf(x) = (Gf,h),\end{aligned} \tag{10}$$

де використана також симетрія (4) міри $\pi\cdot G$.

Перейдемо тепер до доведення леми 3. З (9) випливає, що $L_2^0(\pi) \subset \mathbf{D}(G)$, тому оператор G щільно визначений, оскільки вище доведено щільність вкладення $L_2^0(\pi) \subset L_2(\pi)$. Припустимо, що $f_n \to f$ і $Gf_n \to H$ при $n\to\infty$ в $L_2(\pi)$. Тоді для довільної $h \in L_2^0(\pi)$, згідно з (10),

$$(H,h) = \lim(Gf_n,h) = \lim(f_n,Gh) = (f,Gh) = (Gf,h). \tag{11}$$

Як доведено в (8), $Gf \in L_2^\infty(\pi)$. За умовою $H \in L_2(\pi) \subset L_2^\infty(\pi)$. Оскільки замикання класу $L_2^0(\pi)$ містить індикатори всіх множин з $\mathcal{E}$, то цей клас є тотальним в $L_2^\infty(\pi)$.

Тому з (11) випливає рівність $H = Gf$ π-майже всюди. Отже, $Gf \in L_2(\pi)$ і $f \in \mathbf{D}(G)$, тобто оператор G є замкненим.

Як безпосередньо видно з (10), звуження G на підпростір $L_2^0(\pi)$ є щільно заданим симетричним оператором. Тому G на $\mathbf{D}(G)$, як замкнене розширення щільного симетричного оператора, є знову симетричним оператором (див. [10, с. 338], п. 5.3.3).

Для доведення самоспряженості симетричного замикання оператора G досить перевірити, що $\mathbf{D}(G) \subset \mathbf{D}(G^*)$ (див. [10], п. 5.3.3, рівняння (3.5), (3.6)). Припустимо, що $f \in \mathbf{D}(G^*)$. Тоді $|(Gh, f)| = |(h, G^* f)| \leq c\|h\|$ для будь-якої $h \in \mathbf{D}(G)$ і деякої сталої c. Обравши $h \in L_2^0(\pi) \subset \mathbf{D}(G)$, з (10) отримуємо $|(Gh, f)| = |(h, Gf)| \leq c\|h\|$. Позначивши $H = Gf \in L_2^\infty(\pi)$, згідно з (8), і обравши $h(x) = H(x)\mathbf{1}_{\{|H(x)|\leq n\}}\mathbf{1}_{\{x\in En\}}$, де множини E_n визначені в (3), зауважимо, що $(h, h) = (h, H)$. Тому з останньої нерівності випливає $|(h, H)| = |(h, Gf)| \leq c\|h\| = c(h, H)^{1/2}$. Отже,

$$(h, H) = \int_{E_n} \pi(dx)|H(x)|^2 \mathbf{1}_{\{|H(x)|\leq n\}} \leq c^2$$

для будь-якого n. Звідси за теоремою про монотонну збіжність виводимо

$$\|H\|^2 = \int_E \pi(dx)|H(x)|^2 \leq c^2 < \infty$$

і $H \in L_2(\pi)$. Отже, $Gf \in L_2(\pi)$ і $f \in \mathbf{D}(G)$. Тому $\mathbf{D}(G) = \mathbf{D}(G^*)$ і оператор G — самоспряжений в $L_2(\pi)$.

Далі, якщо функція $g(x) = |G|(x, E)$ обмежена, то замість функції w в означенні класу $\aleph(E)$ можна взяти постійну функцію $w(x) = 1/\sup g$, оскільки $|G|w(x) \leq |G|(x, E)/\sup g \leq 1$. Тому з означення (6) безпосередньо виводимо, що $E_n = E$ для деякого n. Отже, $L_2^n(\pi) = L_2(\pi)$ і $L_2^0(\pi) = L_2^*(\pi) = L_2(\pi)$. Оскільки нерівність (9) виконується для довільної $h \in L_2^\infty(\pi)$, то оператор G — обмежений. Перша частина леми доведена.

Очевидно, що для ядра $G \in \mathfrak{I}_1(\pi)$ функція $g(x) = 1$ обмежена. Отже, за доведеним вище G — обмежений оператор.

Залишилось довести недодатну визначеність оператора $G \in \mathfrak{I}_0(\pi)$. Для цього оберемо $h \in L_2^0(\pi)$ і обчислимо

$$\begin{aligned}\int_E \pi(dx)g(x)|h(x)|^2 &= \int_E \pi(dx)G^+(x, E)|h(x)|^2 = \int_{E\times E} \pi \cdot G^+(dx, dy)|h(x)|^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{E\times E} \pi \cdot G^+(dx, dy)\big(|h(x)|^2 + |h(y)|^2\big),\end{aligned}$$

де ядро $G^+ \in \mathfrak{I}_+(\pi)$ за лемою 1 і використана симетрія (4). Звідси, згідно з означенням класу $\aleph_0(E)$,

$$\begin{aligned}(Gh, h) &= \int_E \pi(dx)\left[-g(x)|h(x)|^2 + \int_E G^+(x, dy)h(y)Arh(x)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int_{E\times E} \pi \cdot G^+(dx, dy)\left[|h(x)|^2 + |h(y)|^2 - 2h(y)Arh(x)\right] \qquad (12) \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_{E\times E} \pi \cdot G^+(dx, dy)\left[|h(x)| - |h(y)|\right]^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Обидва кратні інтеграли в лівій частині (12) збігаються абсолютно за вибором функції $h \in L_2^0(\pi)$. З (12) та щільності $L_2^0(\pi) \subset \mathbf{D}(G)$ випливає недодатна визначеність оператора G.

Аналогічно до (12) доводиться невід'ємна визначеність оператора $I - P$ при $P \in J_1(\pi)$. Лема доведена. □

2. Показник ергодичності

Припустимо, що стохастичне ядро P має єдину інваріантну міру π. Тоді можна сподіватись, що за деяких умов ергодичності степені P^n збігатимуться як лінійні оператори в $L_2(\pi)$ до проектора $\Pi(x, A) = \pi(A)$. Нехай

$$\rho(P) = \sup_{n \ge 1} \left(\|P^n - \Pi\|\right)^{1/n} \tag{13}$$

— відповідний показник експоненціальної збіжності, де норма обчислюється як операторна норма (6) в $L_2(\pi)$.

Аналогічно для генератора півгрупи G за умови єдиності анулюючої міри π визначимо експоненту збіжності

$$\alpha(G) = \sup_{t \ge 1} \frac{1}{t} \ln \|\exp(Gt) - \Pi\|. \tag{14}$$

Зауважимо, що показники (13) і (14) мають більш універсальний зміст, оскільки для дискретного простору E (див. [9])

$$\sup_{n \ge 1, i \in E} \left(|p_{ii}^{(n)} - \pi_i|\right)^{1/n} \le \rho(P), \tag{15}$$

$$\sup_{t \ge 0, i \in E} \frac{1}{t} \ln |p_{ii}(t) - \pi_i| \le \alpha(G),$$

де $\pi_i = \pi(\{i\})$, а $p_{ii}^{(n)}$ і $p_{ii}(t) = \exp(Gt)_{ii}$ — перехідні ймовірності за n кроків та за час t.

Нехай P — стохастичне перехідне ядро з єдиною інваріантною ймовірністю π, інваріантною функцією $1 \in L_2(\pi)$ та проектором Π. Нагадаємо (див. [9, 11]), що узагальненим потенціалом R для P на $L_2(\pi)$ називається лінійний оператор на просторі $\mathbf{D}(R) = \boldsymbol{R}(I - P + \Pi)$, який є оберненим до $I - P$ і анулює Π. Точніше, за означенням рівність $f = Rh$ виконується тоді і тільки тоді, коли $(I - P)f = (I - \Pi)h$ і $\Pi f = 0$, де $f, h \in L_2(\pi)$. Можна довести (див. [9, 11]), що потенціал R визначений коректно та є замкненим оператором.

Оскільки з $f_i = Rh_i$, $h_i \in \mathbf{D}(R)$, $f_i \in L_2(\pi)$, $i = 1, 2$ випливає

$$(Rh_1, h_2) = (f_1, (I - P) f_2) = (f_1, f_2) - (f_1, P f_2) = ((I - P) f_1, f_2) = (h_1, Rh_2),$$

то оператор R також є симетричним. Крім того, з наведених рівностей та леми 3 випливає невід'ємна визначеність оператора R.

Аналогічно визначається потенціал для генератора $G \in J_0(\pi)$ з єдиною анулюючими ймовірністю π та функцією $\mathbf{1} \in L_2(\pi)$. За означенням, $\mathbf{D}(R) = \boldsymbol{R}(G + \Pi)$ і рівність $f = Rh$ еквівалентна $Gf = -(I - \Pi)h$ та $\Pi f = 0$. Як і вище, у цьому випадку, звуження $R|_M$ на підпростір $M = \{f: \Pi f = 0\}$ є лінійним ізоморфізмом простору $M \cap \boldsymbol{R}(G)$ [illegible], оберненим до $-G$ на M. Як і вище, R невід'ємно визначений.

В подальшому позначатимемо

$$S_2(\pi) = \{f \in L_2(\pi) : \|f\| = 1\}, \quad S_2^0(\pi) = \{f \in S_2(\pi) : \pi f = 0\}. \tag{16}$$

Символом G_M^* позначатимемо нульове розширення на $L_2(\pi)$ від звуження оператора G на інваріантний простір M.

Важливою для подальшого викладу є наступна лема.

Лема 1. *Нехай для послідовності функцій $a_k(t, x)$ виконується умова* в) *рівномірно щодо k і при $k \to +\infty$ та всіх $0 \le s < t \le T$, $x \in R^m$*

$$\int_s^t d\tau \int_{R^m} |a_k(\tau, y) - a(\tau, y)|^{2+\delta} (\tau - s)^{-m/2} \exp\left\{-\mu \frac{|y - x|^2}{\tau - s}\right\} dy \to 0.$$

Тоді $\lim_{k \to +\infty} T_{st}^k \varphi(x) = T_{st} \varphi(x)$ для всіх $x \in R^m$, $0 \le s \le t \le T$ (тут T_{st}^k і T_{st} оператори, побудовані за функціями a_k і a відповідно).

Доведення. Виберемо $e_k(s, x)$ і $e(s, x)$ такими, щоб $e_k(s, x) \to e(s, x)$, $k \to +\infty$ за мірою Лебега щодо s і x. Розглянемо розв'язки рівнянь (3) $V^k(s, x, t, \varphi)$ і $V(s, x, t, \varphi)$ з функціями a_k і a відповідно. Легко бачити, що функція $W^k(s, x, t, \varphi) = V^k(s, x, t, \varphi) - V(s, x, t, \varphi)$ є розв'язком рівняння

$$W^k(s, x, t, \varphi) = \Gamma_k(s, x, t, \varphi) + \int_s^t d\tau \int_{R^m} W^k(\tau, y, t, \varphi) |\alpha(\tau, y)| (\nabla_x g(s, x, \tau, y), e(s, x))\, dy$$

і $\Gamma_k(s, x, t, \varphi) \to 0$, $k \to +\infty$ за мірою Лебега щодо s і x на множині $[0, t] \times R^m$ для всіх $t \le T$. Оскільки $W^k(s, x, t, \varphi)$ і $\Gamma_k(s, x, t, \varphi)$ задовольняють (4) рівномірно щодо k і виконується (2), то $W^k(s, x, t, \varphi) \to 0$, $k \to +\infty$ за мірою Лебега щодо s і x на множині $[0, t] \times R^m$ для всіх $t \le T$.

Таким чином, оскільки для $x \in R^m$, $0 \le s \le t \le T$

$$|T_{st}^k \varphi(x) - T_{st} \varphi(x)| \le \int_s^t d\tau \int_{R^m} |V^k(\tau, y, t, \varphi)|\, |a_k(\tau, y) - a(\tau, y)|\, g(s, x, \tau, y)\, dy + \int_s^t d\tau \int_{R^m} |W^k(\tau, y, t, \varphi)|\, |a(\tau, y)|\, g(s, x, \tau, y)\, dy,$$

то за теоремою Лебега отримаємо твердження леми. □

Лема 2. *Нехай T_{st}^k, $0 \le s \le t \le T$, $k \ge 1$* [illegible] *за функцією $a(t, x)$,* [illegible] $\sup_x |\varphi_k(x)|$ [illegible] $k \to +\infty$ *для $x \in R^m$.* [illegible]

Доведення. За умови леми, скориставшись методом послідовних наближень, можна одержати, що $V(s, x, t, \varphi_k) \to V(s, x, t, \varphi)$, $k \to +\infty$ при всіх $0 \le s \le t \le T$, $x \in R^m$, бо ряд, що визначає $V(s, x, t, \varphi_k)$, збігається рівномірно щодо k. А оскільки для $V(s, x, t, \varphi_k)$ рівномірно щодо k виконується нерівність (4), то з теореми Лебега випливає твердження леми. □

Леми 1 і 2 дають змогу стверджувати, що для довільної вимірної обмеженої невід'ємної функції $\varphi(x)$ [illegible], оскільки це виконується для всіх [illegible] неперервно диференційованих обмежених разом зі своїми похідними функцій $\varphi(x)$ оператора T_{st}, побудованого за обмеженою неперервною гельдеровою щодо x рівномірно відносно x функцією $a(t, x)$.

Звідси одержуємо, що сім'я операторів T_{st}, визначає марковський процес в R^m з перехідною ймовірністю $P(s, x, t, \Gamma)$, $0 \le s < t \le T$, $x \in R^m$, $\Gamma \in \mathcal{B}(R^m)$ ($\mathcal{B}(R^m)$ — борелева σ-алгебра в R^m), причому

$$T_{st} \varphi(x) = \int_{R^m} \varphi(y) P(s, x, t, dy). \tag{6}$$

Лема 4. *Нехай $G^{\pm} \in \mathfrak{I}(\pi)$, дійсна функція ϕ неперервна на спектрі $\sigma(G)$ оператора G на $L_2(\pi)$, а замкнений підпростір $M \subset L_2(\pi)$ інваріантний для G. Тоді виконуються рівності*

$$\sup\{\|\phi(G)f\|, f \in M \cap \mathbf{D}(G) \cap S_2(\pi)\} = \sup\{|\phi(\lambda)|, \lambda \in \sigma(G|_M)\}, \tag{17}$$
$$\sup\{(\phi(G)f, f), f \in M \cap \mathbf{D}(G) \cap S_2(\pi)\} = \sup\{\phi(\lambda), \lambda \in \sigma(G|_M)\}. \tag{18}$$

В цих рівностях можна одночасно замінити верхню межу на нижню.

Доведення. Нехай $\{E(B),\ B \in B(R)\}$ — розклад одиниці для самоспряженого за лемою 3 оператора G на $L_2(\pi)$, який існує за теоремою 13.33 [12], а комплексна міра $E_{f,h}(B) = (E(B)f, h)$. Тоді, згідно з вказаною теоремою, для довільних $f \in \mathbf{D}(G)$, $h \in L_2(\pi)$ вірне зображення

$$(Gf, h) = \int_{\sigma(G)} t\, dE_{f,h}(t).$$

Позначимо через Π_M ортогональний самоспряжений проектор на замкнений підпростір $M \subset L_2(\pi)$. Оскільки оператор G самоспряжений, а підпростір M інваріантний для G, то ортогональне доповнення $M^{\perp}$ також інваріантне для G. Тому $G\Pi_M = \Pi_M G \Pi_M = \Pi_M G$, тобто G комутує з Π_M. За теоремою 13.33 [12] кожен з проекторів $\{E(B),\ B \in B(R)\}$ також комутує з Π_M.

Розглянемо замкнену множину

$$\sigma_M = \bigcap_{O \in \mathcal{O}(R)} \{s \colon s \in O \cap \sigma(G), E(O)\Pi_M \neq 0\},$$

де $\mathcal{O}(R)$ — підклас відкритих множин на дійсній прямій. Визначимо лінійний самоспряжений оператор G_M з дією

$$(G_M f, h) = \int_{\sigma_M} t\, dE_{f,h}(t).$$

З означення σ_M випливає, що для кожного $s \notin \sigma_M$ існує відкритий окіл O такий, що $E(O)\Pi_M = 0$, а при $s \in \sigma_M$ для довільного околу O вірне включення $E(O)\Pi_M = \Pi_M E(O) \subset M$. Тому $G_M f = f$ при $f \in M$ і $G_M h = 0$ при $h \perp M$, тобто $G = G_M$. Тоді з наведених зображень для G та G_M і теореми 13.24 [12] виводимо, що $\phi(G_M) = \phi(G)|_M$ для довільної вимірної функції ϕ.

Оскільки у твердженні леми $\phi(G)f = \phi(G_M)f$ для всіх $f \in M$, то в лівих частинах (17), (18) можна замінити G на G_M. За теоремою 13.24 [12] оператор $H = \phi(G_M)$ щільний самоспряжений в $L_2(\pi)$, а за теоремою 13.27 [12] його спектр збігається з множиною суттєвих значень ϕ на множині $\sigma(G_M)$: $\phi(H) \subset \phi_M = \phi(\sigma(G_M))$. З означення множини суттєвих значень (див. [12], п. 12.20) та замкненості спектра безпосередньо випливає, що $\sup \phi_M \in \sigma(H)$ і $\inf \phi_M \in \sigma(H)$ за умови скінченності цих границь.

Якщо оператор H необмежений, то як ліві частини (17), (18), так і праві, очевидно, дорівнюють нескінченності.

Якщо ж H обмежений, то вказані границі скінченні, а ліва частина (17) дорівнює $\|H\|$. Тому (17) безпосередньо випливає з оцінки (3) теореми 12.24 [12] та наступного за нею зауваження, а (18) — з теореми 12.32 [12] для невід'ємного самоспряженого оператора $\sup \phi_M \cdot I - H$.

Доведення тверджень леми для нижніх меж аналогічне.

Теорема 1. *Справедливі наступні твердження:*

a$_1$) *якщо ядро* $P \in \mathfrak{J}_1(\pi)$, *то показник ергодичності* (13) *дорівнює*

$$\rho(P) = \sup\left\{|(Pf,f)|, f \in S_2^0(\pi)\right\}; \tag{19}$$

a$_2$) *якщо ядро* $P \in \mathfrak{J}_1(\pi)$ *має єдині інваріантну ймовірність* π *та інваріантну функцію* 1, *то показник ергодичності* (13) *дорівнює*

$$\begin{aligned}\rho(P) = \max\big(1 - 1/\sup\{(h,Rh), h \in S_2^0(\pi) \cap \mathbf{D}(R)\},\\ 1/\inf\{(h,Rh), h \in S_2^0(\pi) \cap \mathbf{D}(R)\} - 1\big),\end{aligned} \tag{20}$$

де R — *узагальнений потенціал для* P;

b$_1$) *якщо ядро* $G \in \mathfrak{J}_0(\pi)$, *то експонента ергодичності* (14) *дорівнює*

$$\alpha(G) = \sup\left\{(Gf,f), f \in S_2^0(\pi) \cap \mathbf{D}(G)\right\}; \tag{21}$$

b$_2$) *якщо ядро* $G \in \mathfrak{J}_0(\pi)$ *має єдині анулюючі ймовірність* π *та функцію* 1, *а узагальнений потенціал* R *щільно визначений, то експонента* (14) *дорівнює*

$$\alpha(G) = -1/\sup\left\{(h,Rh), h \in S_2^0(\pi) \cap \mathbf{D}(R)\right\}. \tag{22}$$

Доведення. Позначимо $M = \{f \in L_2(\pi), \pi f = 0\}$. Цей простір замкнений і інваріантний для P і G.

Нехай виконується умова a$_1$). Оскільки $\Pi f = 0$ при $f \in M$, та $(I - \Pi)f \in M$ для усіх $f \in L_2(\pi)$, то

$$\|P^n|_M\| = \|(P^n - \Pi)|_M\| \le \|P^n - \Pi\| = \|P^n|_M(I-\Pi)\| \le \|P^n|_M\|\,\|I-\Pi\|.$$

З цієї двосторонньої оцінки отримуємо

$$\rho(P) = \lim_{n\to\infty}\left(\|P^n - \Pi\|\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\|P^n|_M\|\right)^{1/n}, \tag{23}$$

оскільки верхня границя в (13) фактично співпадає з границею [13], а

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|I-\Pi\|\right)^{1/n} = 1.$$

Для доведення (19) скористаємось лемою 4, де покладемо $G = P$, $\phi(P) = P^n$, $M \cap S_2(\pi) = S_2^0(\pi)$. За рівністю (17)

$$\|P^n|_M\| = \sup\left\{|\lambda|^n, \lambda \in \sigma(P|_M)\right\} = \left(\sup\left\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(P|_M)\right\}\right)^n.$$

Отже, згідно з (23), обчислюємо

$$\rho(P) = \sup\left\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(P|_M)\right\} = \sup\left\{|(Pf,f)|, f \in S_2^0(\pi)\right\},$$

де використана рівність (18). Таким чином, рівність (19) доведена.

Тотожність (20) також випливає з леми 4 та рівностей

$$\begin{aligned}\sup\left\{(h,Rh), h \in \mathbf{D}(R) \cap S_2^0(\pi)\right\} &= \sup\left\{\|Rh\|, h \in \mathbf{D}(R) \cap S_2^0(\pi)\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|f\|}{\|h\|}, (I-P)f = h, h \in M \cap \mathbf{D}(R)\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|f\|}{\|(I-P)f\|}, f \in S_2^0(\pi)\right\} = 1/\inf\left\{\|(I-P)f\|, f \in S_2^0(\pi)\right\},\end{aligned} \tag{24}$$

де використано означення потенціалу R та його невід'ємність.

Далі, з леми 4 для оператора $P \in \mathfrak{I}_1(\pi)$ і функції $\phi(t) = (1-t)^2$, враховуючи самоспряженість оператора $I - P$, знаходимо

$$\begin{aligned}\left(\inf\left\{\|(I-P)f\|, f \in S_2^0(\pi)\right\}\right)^2 &= \inf\left\{\left((I-P)f,(I-P)f\right), f \in S_2^0(\pi)\right\}\\ &= \inf\left\{\left((I-P)^2 f, f\right), f \in S_2^0(\pi)\right\} \inf\left\{(1-\lambda)^2, \lambda \in \sigma(P|_M)\right\}\\ &= \left(1-\sup\left\{\lambda, \lambda \in \sigma(P|_M)\right\}\right)^2 = \left(1-\sup\left\{\left((Pf,f), f \in S_2^0(\pi)\right)\right\}^2.\end{aligned}$$

Підставивши цю рівність в (24), маємо

$$\sup\left\{(Pf,f), f \in S_2^0(\pi)\right\} = 1 - 1/\sup\left\{(h,Rh), h \in S_2^0(\pi) \cap \mathbf{D}(R)\right\}. \tag{25}$$

З урахуванням останнього твердження леми 4 аналогічно (24) і (25) отримуємо рівність для нижньої межі

$$\inf\left\{(Pf,f), f \in S_2^0(\pi)\right\} = 1 - 1/\inf\left\{(h,Rh), h \in S_2^0(\pi) \cap \mathbf{D}(R)\right\}.$$

Підставляючи останню рівність разом з (25) в (19), дістаємо (20).

Нехай тепер виконується умова b_1). Застосуємо лему 3 до оператора G на підпросторі $M = \{f \in \mathbf{D}(G), \pi f = 0\}$ з функцією $\phi(G) = \exp(Gt)$. Як і при доведенні (22), неважко переконатись, що

$$\alpha(G) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\|\exp(Gt) - \Pi\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\|\exp(Gt)|_M\|.$$

Звідси, використовуючи (17), отримуємо

$$\begin{aligned}\alpha(G) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\sup\left\{\exp(\lambda t), \lambda \in \sigma(G|_M)\right\}\\ &= \sup\left\{\lambda, \lambda \in \sigma(G|_M)\right\} = \sup\left\{(Gf,f), f \in S_2^0(\pi) \cap \mathbf{D}(G)\right\},\end{aligned}$$

що і доводить рівність (21). Доведення (22) аналогічне доведенню (24), (25), рівності (20), з урахуванням додатної визначеності оператора R.

Теорема доведена. □

3. Оцінки показника ергодичності

На практиці точне обчислення показників (19)–(22) може бути пов'язане з певними трудноцами. Тому розглянемо один наближений метод оцінки вказаних показників. Аналогічний метод було застосовано в роботі [9] при оцінці показника ергодичності для загальних марковських процесів.

Нехай V — скрізь додатна скінченна вимірна функція на E. Розглянемо банахів простір функцій на E з нормою

$$\|f\|_V = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} \frac{|f(x)|}{|V(x)|}, \tag{26}$$

де верхня межа обчислюється з точністю до значень на π-нульових множинах. Йому відповідає операторна норма ядер G вигляду

$$\|G\|_V = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} \frac{1}{|V(x)|} \int_E |G|(x,dy)V(y). \tag{27}$$

Лема 5. *Нехай $G \in \mathfrak{I}(\pi)$, підпростір $M \subset \mathbf{D}(G)$ інваріантний для G, причому звуження $G_M = G|_M$ породжується ядрами $G_M^2 \in \mathfrak{I}_+(\pi)$.*

Тоді для будь-яких f, $h \in M$ виконується нерівність

$$|(Gf, h)| \leq \|f\| \cdot \|h\| \cdot \|G_M\|_V \tag{28}$$

за умови скінченності операторної норми

$$\|G_M\|_V = \sup\left\{\|G_M f\|_V, \|f\|_V = 1\right\}, \tag{29}$$

яка може бути обчислена з (27).

Доведення. Нехай f, $h \in M \cap S_2(\pi)$. Тоді, використовуючи нерівність Коші та симетрію (4), отримуємо

$$\begin{aligned} |(Gf, h)| &= |(G_M f, h)| = \left|\int_E \pi(dx) G_M f(x)\bar{h}(x)\right| \\ &\leq \int_{E\times E} \pi \cdot |G_M|(dx, dy)|h(x)f(y)| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{E\times E} \pi \cdot |G_M|(dx, dy)\left[|h(x)|^2\frac{V(y)}{V(x)} + |f(y)|^2\frac{V(x)}{V(y)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_E \pi(dx)\left[|h(x)|^2 + |f(x)|^2\right]\frac{1}{V(x)}\int_E |G_M|(x, dy)V(y) \\ &\leq \frac{1}{2}\|G_M\|_V\left(\|h\|^2 + \|f\|^2\right) = \|G_M\|_V, \end{aligned} \tag{30}$$

що і доводить (28) для обраних f і h. Зауважимо, що скінченність кратних інтегралів в (30) випливає із скінченності правої частини (30).

Загальний випадок виводиться з (30), оскільки оцінка (28) однорідна відносно f і h. □

Теорема 2. *Нехай V — вимірна додатна функція, яка породжує операторну норму ядер* (26), *а підпростір $M = \{f \in \mathbf{D}(G)\colon \pi f = 0\}$. Тоді:*

a$_1$) *якщо $P \in \mathfrak{I}_1(\pi)$, то*

$$\rho(P) \leq \|P_M\|_V; \tag{31}$$

b$_1$) *якщо $G \in \mathfrak{I}_0(\pi)$ і звуження $G_M = G|_M$ визначається ядрами $G_M^{\pm} \in \mathfrak{I}_+(\pi)$, то для будь-якого додатного a*

$$\alpha(G) \leq \|a + G_M\|_V - a; \tag{32}$$

b$_2$) *якщо $G \in \mathfrak{I}_0(\pi)$, потенціал R визначений коректно і звуження $R_M = R|_M$ задане ядрами $R_M^{\pm} \in \mathfrak{I}_+(\pi)$, то*

$$\alpha(P) \leq -1/\|R_M\|_V. \tag{33}$$

Доведення. В умовах a$_1$) з (28) при $f \in S_2(\pi)$ отримуємо $|(Pf, F)| \leq \|P_M\|_V\ \|f\|^2 = \|P_M\|_V$. Отже, нерівність (31) випливає з рівняння (19).

Оцінка (32) доводиться аналогічно (31), якщо (28) застосувати до оператора $aI + G_M \in \mathfrak{I}(\pi)$ і використати (21). Нарешті, (33) також випливає з (28) і (22), якщо зауважити, що $R_M \in \mathfrak{I}(\pi)$ за умови скінченності норми $\|R_M\|$. □

4. Критерії зворотності

Для застосування наведених результатів доцільно було б мати критерії належності ядра G до класу $\mathfrak{I}(\pi)$. Відповідні умови розроблені, починаючи з А. М. Колмогорова, багатьма авторами (див. [3]). Доведення цих критеріїв досить прості, тому обмежимось формулюванням результатів.

Теорема 3. *Справедливі наступні твердження:*

a) *нехай простір E — зліченний, а матриця $G = (g_{i,j}, i, j \in E) \in \aleph(E)$. Для того, щоб $G \in \mathfrak{I}(\pi)$ з деякою σ-скінченною мірою π, необхідно і досить, щоб для будь-яких $n \geq 2$ і для довільних наборів різних елементів $(i_0, i_1, \ldots, i_n) \subset E$ виконувались рівності*

$$\left[\prod_{s=0}^{n-1} g_{i_s,i_{s+1}}\right] g_{i_n,i_0} = g_{i_0,i_n}\left[\prod_{s=0}^{n-1} g_{i_{s+1},i_s}\right]; \tag{34}$$

b) *у загальному випадку, якщо ядро $G \in \aleph(E)$ абсолютно неперервне відносно деякої скінченної міри μ на $(E, \mathcal{E})$ з вимірною щільністю*

$$g_{x,y} = \frac{dG(x,\cdot)}{d\mu(\cdot)}(y),$$

яка задовольняє (34), *то $G \in \mathfrak{I}(\pi)$ для деякої σ-скінченної міри π.*

Відмітимо, що умову (34) задовольняє перехідна ймовірність будь-якого дискретного ланцюга народження та загибелі, як і генератор довільного дискретного процесу народження і загибелі з неперервним часом.

Література

1. A. Kolmogorov, *Zur Theorie der Markoffschen Ketten*, Math. Ann. **112** (1936), 155–160.
2. F. P. Kelly, *Invariant measures and q-matrix*, Probability, Statistics and Analysis, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **79** (1983), Cambridge Univ. Press, 143–160.
3. K. P. Pollett, *The generalized Kolmogorov criterion*, Stoch. Proc. Appl. **33** (1989), 29–44.
4. S. Karlin, and J. McGregor, *The differential equations of birth and death processes and the Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 489–546.
5. D. G. Kendall, *Uniary dilations of one-parameter semigroups of Markov transition operators, and corresponding integral representations for Markov processes with a countable infinity of states*, Proc. London Math. Soc. **9** (1959), № 3, 415–431.
6. D. Maki, *On birth-death processes with rational growth rates*, SIAM J. Math. Anal. **7** (1976), 29–36.
7. E. A. van Doorn, *Conditions for exponential ergodicity and bounds for the decay parameter of a birth-death processes*, Adv. Appl. Probab. **17** (1985), 514–530.
8. M. Kreer, *Analytic birth-death processes: A Hilbert-space approach*, Stoch. Proc. Appl. **49** (1994), 65–74.
9. М. В. Карташов, *Рівномірно ергодичні стрибкуваті марковські процеси з обмеженими інтенсивностями*, Теор. ймовірност. та матем. статист. **52** (1995), 86–98.
10. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, “Мир”, Москва, 1972.
11. Н. В. Карташов, *Критерии равномерной эргодичности и сильной устойчивости цепей Маркова с общим фазовым пространством*, Теор. вероятност. и матем. статист. **30** (1984), 65–81.
12. У. Рудин, *Функциональный анализ*, “Мир”, Москва, 1975.
13. В. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, “ИЛ”, Москва, 1962.

252127, КИЇВ-127, ВУЛ. АКАДЕМІКА ГЛУШКОВА, 6, НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Т. Г. ШЕВЧЕНКА, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Надійшла 16.11.95