

УМОВИ ТА ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ З K_σ -ПРОСТОРІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. II

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО

РЕЗЮМЕ. Досліджуються умови існування розв'язків параболічного та гіперболічного рівнянь в частинних похідних з випадковими початковими умовами з K_σ -просторів випадкових величин. Обґрунтовано застосування методу Фур'є до цих рівнянь та досліджені деякі властивості їх розв'язків.

Робота є продовженням роботи [1]. В ній зберігаються позначення та нумерація формул попередньої роботи. В цій частині досліджуються зображення Карунена–Лоева випадкових процесів та розв'язки параболічного та гіперболічного рівнянь в частинних похідних з випадковими початковими умовами.

6. ЗОБРАЖЕННЯ КАРУНЕНА–ЛОЕВА ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Нехай $x = \{x(t), t \in T\}$ — випадковий процес, такий, що

$$Ex(t) = 0, \quad Ex(t)x(s) = R(t, s).$$

Вважатимемо, що $R(t, s)$ неперервна при $0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq T$. Розглянемо інтегральне рівняння

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^T R(t, s) \varphi(s) ds \quad (6.1)$$

Оскільки $R(t, s)$ невід'ємно означена функція, то всі власні значення рівняння (6.1) є невід'ємні та число їх не більш ніж злічене.

Нехай $\varphi_k(t)$ — ортонормовані власні функції рівняння (6.1), а λ_k — відповідні їм власні значення. Вважатимемо, що λ_k занумеровані так, що $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$. Будемо також вважати, що $\lambda_k \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$. Зауважимо також, що $\varphi_k(t)$ — неперервні функції. Випадковий процес $x(t)$ можна зобразити у вигляді ряду, що збігається у середньому квадратичному

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \lambda_k^{-1/2} \varphi_k(t), \quad (6.2)$$

$$E \xi_k \xi_m = \delta_k^m, \quad \xi_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^T x(t) \varphi_k(t) dt \quad [2, \text{с. 500}].$$

1991 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 60G07; Secondary 60G10, 60G17.

Робота виконана при частковому фінансуванні Фонду фундаментальних досліджень Державного комітету з питань науки та технології України

Зображення (6.2) називається зображенням Карунена–Лоева. Позначимо

$$Z_m^n(t) = \sum_{r=m}^n \xi_r \lambda_r^{-1/2} \varphi_r(t), \quad Z_m^n(t, \psi) = \sum_{r=m}^n \xi_r \psi(r) \lambda_r^{-1/2} \varphi_r(t),$$

де $\psi(r) \geq 0$ — деяка послідовність,

$$\omega_R(\delta) = \sup_{|t-s|<\delta} \left(\int_0^T (R(t,u) - R(s,u))^2 du \right)^{1/2}.$$

Теорема 6.1. *Нехай в (6.2) випадкові величини ξ_k належать деякому K_σ -простору $K(\Omega)$. Нехай виконується умова: існує така монотонно неспадна послідовність $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $0 < \psi(k)$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої для будь-якого $k > 0$ збігається ряд*

$$\sum_{l=k}^{\infty} |||Z_k^l(t, \psi)|||_C \left(\frac{1}{\psi(l)} - \frac{1}{\psi(l+1)} \right) < \infty \quad (6.3)$$

та

$$|||Z_k^n(t, \psi)|||_C t_n \psi^{-1}(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.4)$$

де $t_l = (1-\theta)^{-1} \mu([T(2\omega_R^{(-1)}(\theta/(\lambda_n T^{1/2}))^{-1}] + 1)$, $0 < \theta < 1$, $\mu(n)$ — характеристика простору $K(\Omega)$. Тоді з ймовірністю одиниця $x(t) \in C([0, T])$

$$|||x(t) - Z_1^n(t)|||_C \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (6.5)$$

та мають місце нерівності: для будь-якого $k \geq 1$

$$|||x(t) - Z_1^{k-1}(t)|||_C \leq \sum_{l=k}^{\infty} t_l |||Z_k^l(t, \psi)|||_C \left(\frac{1}{\psi(l)} - \frac{1}{\psi(l+1)} \right) < \infty, \quad (6.6)$$

$$|||x(t)|||_C \leq \sum_{l=1}^{\infty} t_l |||Z_1^l(t, \psi)|||_C \left(\frac{1}{\psi(l)} - \frac{1}{\psi(l+1)} \right). \quad (6.7)$$

Твердження теореми випливає з теореми 4.1 та леми 3.5. $\square$

Наслідок 6.1. *Нехай в (6.2) випадковий процес є строго $K(\Omega)$ процес з визначальною константою C_x , тоді, якщо існує така монотонно неспадна послідовність $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $0 < \psi(k)$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої збігається ряд*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(t_l \left\| \sum_{r=0}^l \psi^2(r) \lambda_r^{-1} \varphi_r^2(t) \right\|_C \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\psi(l)} - \frac{1}{\psi(l+1)} \right) < \infty, \quad (6.8)$$

то має місце твердження теореми 6.1.

Твердження наслідку доводиться так само, як і теорема 5.1, якщо врахувати лему 2.4 та те, що має місце нерівність

$$|||Z_k^l(t, \psi)|||_C \leq C_x \left(\left\| \sum_{r=k}^l \psi^2(r) \lambda_r^{-1} \varphi_r^2(t) \right\| \right)^{1/2}. \quad \square \quad (6.9)$$

З теореми 6.1 легко отримати наслідки подібні тим, що ми отримали з теореми 5.1.

7. ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

Розглянемо в області $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$, крайову задачу для параболічного однорідного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{dU(x, t)}{dx} \right) - q(x)U(x, t) - \rho(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

з граничними умовами

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = 0 \quad (7.2)$$

та крайовими умовами

$$u(0, x) = \xi(x). \quad (7.3)$$

Вважатимемо, що $p(x)$ та $\rho(x)$ два рази неперервно диференційовані функції, а $q(x)$ один раз неперервно диференційована функція, крім того $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq \pi$. $\xi(x)$ — випадкова функція з $L_2(\Omega)$, така, що $E\xi(x) = 0$, $E\xi(x)\xi(y) = r(x, y)$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

Нехай $\{X_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ — ортонормовані власні функції, а λ_n — відповідні власні значення задачі Штурма-Ліувілля, що відповідає задачі (7.1)

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} X(x) \right] - q(x)X(x) + \lambda \rho(x)X(x) = 0, \quad (7.4)$$

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \quad (7.5)$$

Вважатимемо, що λ_n так перенумеровані, що $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ та $\lambda_n \rightarrow \infty$, коли $n \rightarrow \infty$. Оскільки може бути лише скінчене число від'ємних λ_n , то для простоти вважатимемо, що всі $\lambda_n > 0$. Властивості $X_n(x)$ та λ_n та умови, коли всі $\lambda_n > 0$, можна знайти, наприклад, у [3].

У випадку, коли $\xi(x)$ — гауссовий випадковий процес, така ж задача розглядалась в роботі [4].

Теорема 7.1. *Нехай випадковий процес $\xi(x)$ — вибірково неперервний з ймовірністю одиниця, $\xi_n = \int_0^\pi \xi(x)X_n(x)\rho(x)dx$. Нехай ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n \exp\{-\lambda_n t\} X_n(x) \quad (7.6)$$

збігається рівномірно за ймовірністю (тобто за ймовірністю в просторі неперервних функцій в області $D = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t < \infty\}$). Тоді з ймовірністю одиниця існує вибірково два рази неперервно диференційований по x та один раз неперервно диференційований по t розв'язок задачі (7.1)–(7.3) в області D , який може бути зображений у вигляді ряду, що рівномірно збігнеться за ймовірністю в цій же області

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x). \quad (7.7)$$

Доведення. Як і у випадку, коли $\xi(x)$ — детермінована функція [3] досить довести, що для деякої послідовності s_k при $k \rightarrow \infty$ рівномірно з ймовірністю одиниця в D

збігаються послідовності функцій

$$\sum_{n=1}^{s_k} \xi_n e^{-\lambda_n t} X'_n(x), \quad (7.8)$$

$$\sum_{n=1}^{s_k} \xi_n e^{-\lambda_n t} X''_n(x), \quad (7.9)$$

$$\sum_{n=1}^{s_k} \lambda_n \xi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x),$$

а для цього досить, щоб рівномірно за ймовірністю в D збігалися ряди (7.6) та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{-\lambda_n t} X'_n(x), \quad (7.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{-\lambda_n t} X''_n(x). \quad (7.11)$$

Оскільки [3, с. 439] $X_n(x)$ та λ_n є власні функції та власні значення інтегрального рівняння

$$X(x) = \lambda \int_0^{\pi} G(x, s) \rho(s) X(s) ds, \quad (7.12)$$

де $G(x, s)$ — функція впливу задачі (7.4), (7.5):

$$G(x, s) = \begin{cases} u(s)v(s)/\Delta, & s < x, \\ u(x)v(s)/\Delta, & s \geq x, \end{cases} \quad (7.13)$$

$u(x)$ та $v(x)$ два рази неперервно диференційовані лінійно незалежні розв'язки певної задачі Коші [3, с. 432], а $\Delta > 0$ — константа, $\Delta = p(x)(v(x)u'(x) - u(x)v'(x))$. З (7.12) випливає, що

$$X'_k(x) = \lambda_k \int_0^{\pi} G_1(x, s) \rho(s) X_k(s) ds, \quad (7.14)$$

де

$$G_1(x, s) = \begin{cases} v'(x)u(s)/\Delta, & s < x, \\ v(s)u'(x)/\Delta, & s \geq x, \end{cases} \quad (7.15)$$

$$X''_k(x) = \lambda_k \left(\int_0^{\pi} G_2(x, s) \rho(s) X_k(s) ds - X_k(x) \frac{\rho(x)}{p(x)} \right)$$

та

$$G_2(x, s) = \begin{cases} v''(x)u(s)/\Delta, & s < x, \\ v(s)u''(x)/\Delta, & s \geq x. \end{cases}$$

Отже

$$\begin{aligned} & \sup_{x,t \in D} \left| \sum_{n=m}^k \xi_n e^{-\lambda_n t} X'_n(x) \right| \\ &= \sup_{x,t \in D} \left| \int_0^\pi G_1(x,s) \rho(s) \left(\sum_{n=m}^k \xi_n \lambda_n e^{-\lambda_n t} X_n(s) \right) ds \right| \\ &\leq \sup_{x,t \in D} \left| \sum_{n=m}^k \xi_n \lambda_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right| \sup_{0 \leq x \leq \pi} \int_0^\pi |G_1(x,s)| \rho(s) ds; \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{x,t \in D} \left| \sum_{n=m}^k \xi_n e^{-\lambda_n t} X''_n(x) \right| \\ &= \sup_{x,t \in D} \left| \int_0^\pi G_2(x,s) \rho(s) \left(\sum_{n=m}^k \xi_n \lambda_n e^{-\lambda_n t} X_n(s) \right) ds \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{n=m}^k \xi_n \lambda_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right) (p(x))^{-1} \rho(x) \right| \\ &\leq \sup_{x,t \in D} \left| \sum_{n=m}^k \xi_n e^{-\lambda_n t} X''_n(x) \right| \sup_{0 \leq x \leq \pi} \left(\int_0^\pi |G_2(x,s)| \rho(s) ds + (p(x))^{-1} \rho(x) \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

З нерівностей (7.16) та (7.17) випливає, що ряди (7.10) та (7.11) збігаються рівномірно за ймовірністю, коли так само збігається ряд (7.6). $\square$

Лема 7.1. Нехай $K(\Omega) \in K_\sigma$ -простір випадкових величин, $\mu(n)$ — характеристика цього простору. $\{X_k(x), k = 1, \dots\}$ — послідовність ортонормованих власних функцій задачі (7.4)–(7.5), а $\lambda_k > 0$ — відповідні власні значення. Послідовність $\{X_k(x), k = 1, \dots\}$ належить класу $K(c, sn)$, де $c(x) \equiv 1$,

$$s_n = b_n = \frac{1}{1-\theta} \mu \left(\left\lceil \frac{\lambda_n \pi c_0}{\theta} \right\rceil + 1 \right), \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \rho(s) ds \right)^{1/2} c_1, \\ c_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\Delta} \left(\max_{0 \leq x \leq \pi} |v'(x)|^2 \int_0^\pi u^2(s) \rho(s) ds + \max_{0 \leq x \leq \pi} |u'(x)|^2 \int_0^\pi v^2(s) \rho(s) ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Доведення. Лема 7.1 є наслідком леми 3.5. Дійсно, послідовність $\{X_k(x), k = 1, \dots, \infty\}$ — ортонормовані власні функції інтегрального рівняння (7.12), $X = [0, \pi]$, $v(x) = \int_0^\pi \rho(s) ds$. Залишилось показати, що $\omega_R(\delta) = \omega_G(\delta) \leq c_1 \delta$. Дійсно,

$$\omega_G(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} \left[\int_0^\pi (G(x,s) - G(y,s))^2 \rho(s) ds \right]^{1/2}.$$

Нехай тепер, для визначеності, $0 \leq x \leq y \leq \pi$, $y - x \leq \delta$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi (G(x, s) - G(y, s))^2 \rho(s) ds \\ &= \Delta^{-2} \left[(v(x) - v(y))^2 \int_0^x u^2(s) \rho(s) ds \right. \\ & \quad \left. + (u(x) - u(y))^2 \int_y^\pi v^2(s) \rho(s) ds + \int_x^y (v(s)u(x) - u(s)v(y))^2 \rho(s) ds \right] \\ &\leq \Delta^{-2} |x - y|^2 \left[\max_{0 \leq x \leq \pi} |v'(x)|^2 \int_0^x u^2(s) \rho(s) ds \right. \\ & \quad \left. + \max_{0 \leq x \leq \pi} |u'(x)|^2 \int_x^\pi v^2(s) \rho(s) ds \right. \\ & \quad \left. + 2 \max_{0 \leq x \leq \pi} |v'(x)|^2 \int_x^y u^2(s) \rho(s) ds \right. \\ & \quad \left. + 2 \max_{0 \leq x \leq \pi} |u'(x)|^2 \int_y^\pi v^2(s) \rho(s) ds \right] \\ &\leq c_1^2 |x - y|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Наступна теорема дає умови та швидкість рівномірної збіжності деяких випадкових рядів з K_σ -просторів. Ця теорема буде застосовуватись до дослідження розв'язків задачі (7.1)–(7.3).

Розглянемо випадковий ряд

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n X_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad (7.19)$$

де $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t < \infty$, $X_n(x)$ — ортонормовані власні функції задачі Штурма-Ліувілля (7.4)–(7.5), а $\lambda_n > 0$ — відповідні їм власні значення. Вважатимемо, що $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ та $\lambda_n \rightarrow \infty$, коли $n \rightarrow \infty$; η_n — послідовність випадкових величин з K_σ -простору $K(\Omega)$ з характеристикою $\mu(n)$. Позначимо для деякої послідовності $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$

$$\begin{aligned} S_m^n(x, t) &= \sum_{k=m}^n \eta_k X_k(x) e^{-\lambda_k t}, \\ S_m^n(x, \psi) &= \sum_{k=m}^n \eta_k \psi(k) X_k(x). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Теорема 7.2. *Нехай виконується умова: існує така монотонно неспадна послідовність $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\psi(k) > 0$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, що для будь-якого $m > 0$*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\sup_{0 \leq x \leq \pi} \|S_m^k(x, \psi)\| \right) b_k a(\psi(k)) < \infty, \quad (7.21)$$

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} \|S_m^n(x, \psi)\| b_n \psi^{-1}(n) \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (7.22)$$

де b_k задано в (7.18),

$$a(\psi(k)) = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1} \psi(k)} \exp \left\{ \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \ln \left(\frac{\lambda_k \psi(k+1)}{\psi(k) \lambda_{k+1}} \right) \right\}. \quad (7.23)$$

Тоді ряд (7.19) збігається рівномірно в нормі простору $K(\Omega)$:

$$\left\| \sup_{0 \leq x \leq \pi, t \geq 0} |S(x, t) - S_1^n(x, t)| \right\| \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (7.24)$$

тобто й за ймовірністю. При цьому має місце нерівність

$$\| \|S(x, t) - S_1^{m-1}(x, t)\|_C \| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left(\sup_{0 \leq x \leq \pi} \|S_m^k(x, \psi)\| \right) b_k a(\psi(k)). \quad (7.25)$$

Доведення. Застосувавши перетворення Абеля, при $l \geq m$ отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} S_l^n(x, t) &= \sum_{k=l}^m S_m^k(x, \psi) \left(\frac{e^{-\lambda_k t}}{\psi(k)} - \frac{e^{-\lambda_{k+1} t}}{\psi(k+1)} \right) \\ &\quad + S_m^{l-1}(x, \psi) \frac{e^{-\lambda_l t}}{\psi(l)} + S_m^n(x, \psi) \frac{e^{-\lambda_{n+1} t}}{\psi(n+1)}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

З цього співвідношення отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq \pi, t \geq 0} |S_l^n(x, t)| &= \|S_l^n(x, t)\|_C \\ &\leq \sum_{k=l}^n \sup_{0 \leq x \leq \pi} |S_m^k(x, \psi)| \sup_{0 \leq t \leq \infty} \left(\frac{e^{-\lambda_k t}}{\psi(k)} - \frac{e^{-\lambda_{k+1} t}}{\psi(k+1)} \right) \\ &\quad + \sup_{0 \leq x \leq \pi} |S_m^{l-1}(x, \psi)| \frac{1}{\psi(l)} + \sup_{0 \leq x \leq \pi} |S_m^n(x, \psi)| \frac{1}{\psi(n+1)}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Легко підрахувати, що

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \left(\frac{e^{-\lambda_k t}}{\psi(k)} - \frac{e^{-\lambda_{k+1} t}}{\psi(k+1)} \right) = a(\psi(k)).$$

Отже з (7.26) випливає нерівність

$$\begin{aligned} \| \|S_l^n(x, t)\|_C \| \leq \sum_{k=l}^n \| \|S_m^k(x, \psi)\|_C \| a(\psi(k)) \\ + \| \|S_m^{l-1}(x, \psi)\|_C \| \frac{1}{\psi(l)} + \| \|S_m^n(x, \psi)\|_C \| \frac{1}{\psi(n+1)}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

З леми 7.1 випливає, що при будь-яких $m \leq k$ мають місце нерівності

$$\| \|S_m^k(x, \psi)\|_C \| \leq b_k \| \|S_m^k(x, \psi)\| \|_C.$$

З цих нерівностей та нерівності (7.27) випливає нерівність

$$\begin{aligned} \| \|S_l^n(x, t)\|_C \| \leq \sum_{k=l}^n \| \|S_m^k(x, \psi)\| \|_C a(\psi(k)) b_k \\ + \| \|S_m^{l-1}(x, \psi)\| \|_C \frac{b_l}{\psi(l)} + \| \|S_m^n(x, \psi)\| \|_C \frac{b_n}{\psi(n+1)}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Якщо в (7.28) спрямувати l та n до нескінченності, то отримаємо (7.24), якщо спрямувати $l = m$ ($S_m^{m-1}(x, \psi) = 0$) та спрямувати n до нескінченності, то отримаємо (7.25). $\square$

Теорема 7.3. Нехай випадковий процес $\xi(x)$ з (7.3) вибірково неперервний з ймовірністю одиниця та такий, що $\xi(x) \in K(\Omega)$ при кожному x , де $K(\Omega) \in K_\sigma$ -простір з характеристикою $\mu(n)$. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував вибірково два рази неперервно диференційований по x та один раз неперервно диференційований по t розв'язок задачі (7.1)–(7.3) в області $D = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t < \infty\}$, який може бути зображений у вигляді ряду (7.7), що рівномірно збігається за ймовірністю в цій же області, достатньо, щоб випадкові величини ξ_n належали простору $K(\Omega)$, існувала така монотонно неспадна послідовність $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\psi(k) > 0$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої виконується умова: для будь-якого $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} \|T_m^k(x, \psi)\| a(\psi(k)) b_k < \infty, \quad (7.29)$$

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} |T_m^n(x, \psi)| \frac{b_n}{\psi(n)} \rightarrow 0 \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (7.30)$$

де $T_m^k(x, \psi) = \sum_{l=m}^k \lambda_l \xi_l \psi(l) X_l(x)$, b_k задано в (7.18), а $a(\psi(k))$ — в (7.23).

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми 7.1 та теореми 7.2, де треба покласти $\eta_k = \lambda_k \xi_k$. $\square$

Теорема 7.4. Нехай виконуються умови теореми 7.3. Крім того, існує така монотонно неспадна послідовність $\{\delta(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\delta(k) > 0$, $\delta(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої для будь-якого $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\sup_{0 \leq x \leq \pi} \|U_m^k(x, \delta)\| \right) b_k a(\delta(k)) < \infty, \quad (7.31)$$

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} \|U_m^n(x, \delta)\| \frac{b_n}{\delta(n)} \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (7.32)$$

де $U_m^k(x, \delta) = \sum_{l=m}^k \xi_l \delta(l) X_l(x)$, b_k та $a(\delta(k))$ задані в (7.18) та (7.23) відповідно. Тоді для $m \geq 1$ має місце нерівність

$$\|U(x, t) - U_1^{m-1}(x, t)\|_C \leq \sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} \|U_m^k(x, \delta)\| b_k a(\delta(k)) = G_m(\delta). \quad (7.33)$$

$U(x, t)$ задано в (7.7), $U_1^{m-1}(x, t) = \sum_{n=1}^{m-1} \xi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x)$.

Теорема випливає з теореми 7.2, коли там покласти $\eta_k = \xi_k$. $\square$

Зауваження 7.1. В більшості задач умови (7.31), (7.32) виконуються, коли виконуються умови (7.29)–(7.30).

Зауваження 7.2. Умови неперервності випадкових процесів з K_σ -просторів можна знайти в роботі [5], а з просторів Орлича — в [6]. Крім того, оскільки процес $\xi(x)$ належить простору $L_2(\Omega)$, то в більшості випадків досить перевірити, що для процесу $\xi(x)$ виконуються умови Колмогорова, або ж інші умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця, які можна знайти в книзі [7].

Зауваження 7.3. Вимога, що випадкові величини $\xi_n = \int_0^\pi \xi(x) X_n(x) dx$ належать простору $K(\Omega)$ виконується не завжди та потребує додаткової перевірки. В наступному твердженні розглянуто випадок, коли ця вимога виконується.

Теорема 7.5. Нехай в задачі (7.1)–(7.3) випадковий процес $\xi(x)$ вибірково неперервний з ймовірністю одиниця та строго $K(\Omega)$ процес з визначальними константами B_ξ та C_ξ , де $K(\Omega)$ є K_σ -простір з характеристикою $\mu(n)$. Тоді, для того, щоб виконувалось твердження теореми 7.3, досить існування монотонно неспадної послідовності $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\psi(k) > 0$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої виконується умова: для будь-якого $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(T_m^k(x, \psi))^2)^{1/2} b_k a(\psi(k)) < \infty, \quad (7.34)$$

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(T_m^n(x, \psi))^2)^{1/2} b_n \psi^{-1}(n) \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty. \quad (7.35)$$

Крім того, коли існує така монотонно неспадна послідовність $\{\delta(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\delta(k) > 0$, $\delta(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої для будь-якого $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(U_m^k(x, \delta))^2)^{1/2} b_k a(\delta(k)) < \infty, \quad (7.36)$$

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(U_m^n(x, \delta))^2)^{1/2} b_n \delta^{-1}(n) \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty. \quad (7.37)$$

то має місце нерівність

$$\|U(x, t) - U_1^{m-1}(x, t)\|_C \leq C_\xi \sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(U_m^k(x, \delta))^2)^{1/2} b_k a(\delta(k)) = A_m(\delta) \quad (7.38)$$

Доведення. З леми 2.4 випливає, що випадкові величини $\{\xi_n, n = 1, \dots, \infty\}$ утворюють строго $K(\Omega)$ сім'ю з визначальними константами B_ξ та C_ξ . Тому з (2.2) випливає, що

$$\|T_m^k(x, \psi)\| \leq C_\xi (E(T_m^k(x, \xi))^2)^{1/2}$$

$$\|U_m^k(x, \psi)\| \leq C_\xi (E(U_m^k(x, \xi))^2)^{1/2}.$$

Тому твердження теореми 7.5 випливає з теорем 7.3 та 7.4. $\square$

Наслідок 7.1. Нехай в умовах теорем 7.2–7.5 простір $K(\Omega)$ є простір Орлича, що породжується S -функцією $U(x)$. Тоді для будь-якого $x_0 > 0$

$$b_n \leq \frac{1}{1-\theta} S_{x_0} \left(\frac{\lambda_n \pi c_0}{\theta} + 1 \right) (1 + U(x_0)),$$

де $S_{x_0}(n)$ задано в лемі 2.1, та мають місце нерівності: для будь-якого $m \geq 1$ та $\varepsilon > 0$

$$P \{ \|U(x, t) - U_1^{m-1}(x, t)\|_C > \varepsilon \} \leq \frac{1}{U(\varepsilon/G_m(\delta))}, \quad (7.39)$$

де $G_m(\delta)$ задано в (7.33), та у випадку, коли $\xi(x)$ строго $K(\Omega)$

$$P \{ \|U(x, t) - U_1^{m-1}(x, t)\|_C > \varepsilon \} \leq \frac{1}{U(\varepsilon/A_m(\delta))}, \quad (7.40)$$

де $A_m(\delta)$ задано в (7.38).

Твердження наслідку відносно нерівності для b_n випливає з леми 2.1 (див. також твердження 2.1). Нерівності (7.39) та (7.40) випливають з нерівності Чебишева для

просторів Орліча випадкових величин:

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{U(\varepsilon/||\xi||)}.$$

(див., наприклад [6]). $\square$

Наслідок 7.2. Умови (7.31) та (7.32) теореми 7.3 виконуються, коли для будь-якої монотонно неспадної послідовності $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\psi(k) > 0$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, що $\sum_{k=1}^{\infty} b_k a(\psi(k)) < \infty$ та $b_n/\psi(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, виконується умова: для будь-якого $m > 1$

$$\sup_{k \geq m} \sup_{0 \leq x \leq \pi} \|T_m^k(x, \psi)\| < \infty. \quad (7.41)$$

Зауваження 7.4. Аналогічні наслідки мають місце до теорем 7.4 та 7.5.

8. СПЕЦІАЛЬНИЙ ВИПАДОК ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо частинний випадок задачі (7.1)–(7.3), поклавши $p(x) = \rho(x) = 1$, тобто задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) - q(x)U(x, t) - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (8.1)$$

з граничними умовами

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, \pi) = 0 \quad (8.2)$$

та крайовими умовами

$$U(0, x) = \xi(x). \quad (8.3)$$

Як і раніш вважатимемо, що $q(x) > 0$ — неперервно диференційована функція.

Нехай $\xi(x)$ строго $K(\Omega)$ випадковий процес з визначальними константами B_ξ та C_ξ ,

$$E\xi(x) = 0, \quad E\xi(x)\xi(y) = r(x, y), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

$K(\Omega)$ є K_σ -простір з характеристикою $\mu(n)$. Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані власні функції, а λ_n — відповідні власні значення задачі Штурма-Ліувілля, що відповідає задачі (8.1)–(8.3), а саме

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \quad (8.4)$$

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \quad (8.5)$$

Для простоти вважатимемо, що всі λ_n додатні та $\lambda_n \rightarrow \infty$, коли $n \rightarrow \infty$. Крім того $\lambda_n < \lambda_{n+1}$.

Теорема 8.1. Нехай в задачі (8.1)–(8.3) випадковий процес $\xi(x)$ вибірково неперервний з ймовірністю одиниця. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував вибірково два рази неперервно диференційований по x та один раз неперервно диференційований по t розв'язок задачі (8.1)–(8.3) в області $\{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t < \infty\}$, який може бути зображений у вигляді ряду (7.7), що рівномірно збігається за ймовірністю в цій же області, достатньо, щоб існувала монотонно неспадна послідовність $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\psi(k) > 0$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої виконуються умови: для будь-якого $\sigma > 1$ та $m > 1$ збігається ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(T_m^k(x, \psi))^2)^{1/2} d_k(\sigma) r_k(\sigma) < \infty \quad (8.6)$$

та

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(T_m^n(x, \psi))^2)^{1/2} d_n(\sigma) \psi^{-1}(n) \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (8.7)$$

де $T_m^k(x, \psi)$ задано в (7.29), $d_n(\sigma) = (1 - \theta)^{-1} \mu([n^2 a / \theta] + 1)$, $a = \pi c_0 \sigma$, c_0 визначено в (7.18), $r_k(\sigma) = (2 + \sigma)(\psi(k + 1)/\psi(k))^{k\sigma/2}/k\psi(k)$. Крім того, коли існує така монотонно неспадна послідовність $\{\delta(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\delta(k) > 0$, $\delta(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, для якої для будь-якого $m > 0$ та $\sigma > 1$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(U_m^k(x, \delta))^2)^{1/2} d_k(\sigma) r_k(\sigma) < \infty, \quad (8.8)$$

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(U_m^n(x, \delta))^2)^{1/2} d_n(\sigma) \delta^{-1}(n) \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (8.9)$$

де $U_m^k(x, \delta)$ задано в (7.31), то при $m > 1$ має місце нерівність

$$\|U(x, t) - U_1^{m-1}(x, t)\|_C \leq C_\xi \sum_{k=m}^{\infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} (E(U_m^k(x, \delta))^2)^{1/2} d_k(\sigma) r_k(\sigma) = Q_m, \quad (8.10)$$

де $\sigma_k > 1$, $\sigma_k \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$.

Доведення. У випадку задачі (8.1)–(8.3) має місце формула [8]

$$\lambda_n^{1/2} = n + \frac{g}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (8.11)$$

де $g = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx$. Тепер теорема випливає з теореми 7.5. Дійсно, тоді $\lambda_n \leq \alpha_n n^2$, $\alpha_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, $b_n \leq d_n$ для досить великого n . Далі, легко перевірити, що в цьому випадку

$$\frac{k \lambda_{k+1} - \lambda_k}{2 \lambda_{k+1}} \rightarrow 1 \quad \text{та} \quad \frac{2 \lambda_k}{k \lambda_{k+1} - \lambda_k} \rightarrow 1$$

при $k \rightarrow \infty$. Отже, має місце нерівність

$$a(\psi(k)) \leq c_k \frac{1}{k\psi(k)} \left(\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \right)^{kd_k/2},$$

де $c_k \rightarrow 2$, а $d_k \rightarrow 1$, коли $k \rightarrow \infty$. Тому з умов (8.6) та (8.7) випливають умови (7.34) та (7.35) теореми 7.5. Аналогічно доводимо друге твердження теореми. Зауважимо, що константи σ_k можна легко оцінити з (8.11) та [8, с. 19]. $\square$

Наслідок 8.1. Умови теореми (8.6)–(8.7) виконуються, коли для будь-якої монотонно неспадної послідовності $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\psi(k) > 0$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, такої, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(\sigma) r_k(\sigma) < \infty, \quad (8.12)$$

виконується умова:

$$\sup_{m < k} \sup_{0 \leq x \leq \pi} E(T_m^k(x, \psi))^2 < \infty. \quad (8.13)$$

Аналогічні умови забезпечують виконання другого твердження теореми.

Наслідок 8.2. Умова (8.13) виконується, коли для послідовності $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, для якої виконується умова (8.12), збігається ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (ls)^2 |E \xi_l \xi_s| \psi(l) \psi(s) < \infty. \quad (8.14)$$

Твердження наслідку мають місце, оскільки, згідно з [3], виконується нерівність $|X_l(x)| < c$, де c — деяка константа, та

$$E(T_m^k(x, \psi))^2 \leq \sum_{l=m}^k \sum_{s=m}^k \lambda_l \lambda_s |E \xi_l \xi_s| |X_s(x)| |X_l(x)| |\psi(l) \psi(s)|,$$

а для λ_s виконується (8.11).

Зауваження 8.1. Незавжди підібрати послідовність, для якої виконувалась би умова (8.12). Зокрема, для просторів Орліча з зауваження 2.1 $d_n(\sigma) \sim (\ln n)^{1/\alpha}$. Тому умова (8.12) виконується для будь-якої функції $\psi(k) = (\ln k)^\beta$, $\beta > 1 + 1/\alpha$.

Зауваження 8.2. Умова (8.14) виконується, коли кореляційна функція $r(x, y)$ випадкового процесу $\xi(x)$ задовольняє певним умовам, які легко отримати, як це було зроблено у роботах [4, 9].

9. ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

Розглянемо граничну задачу для однорідного гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) \right) - q(x) U(x, t) - \rho(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (9.1)$$

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9.2)$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(\pi, t) = 0, \quad (9.2)$$

$$U(x, 0) = \xi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, 0) = \eta(x), \quad (9.3)$$

де $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ неперервні на інтервалі $[0, \pi]$ функції, такі, що $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$. Випадкові процеси $\xi(x)$ та $\eta(x)$ такі, що $E \xi(x) = E \eta(x) = 0$, $E \xi(x) \eta(y) = 0$, $E \xi(x) \xi(y) = B(x, y)$, $E \eta(x) \eta(y) = R(x, y)$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$. Будемо вважати, що функції $B(x, y)$ та $R(x, y)$ неперервні. Нехай $\{X_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ — ортонормовані власні функції, а λ_n — відповідні їм власні значення задачі Штурма-Ліувілля (7.4)–(7.5), що відповідає задачі (9.1)–(9.3). Вважатимемо, що $\lambda_n > 0$ та перенумеровані так, що $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ та $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. У випадку, коли процеси $\xi(x)$ та $\eta(x)$ належать певним просторам випадкових величин, така задача розглядалась в різних роботах:

- 1) $\xi(x)$ та $\eta(x)$ є гауссовими процесами — в [9, 10];
- 2) $\xi(x)$ та $\eta(x)$ належать простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ — в [11];
- 3) $\xi(x)$ та $\eta(x)$ є строго Орлічевими випадковими процесами — в [12].

Теорема 9.1. Нехай випадковий процес $\xi(x)$ — вибірково неперервний з ймовірністю одиниця на $[0, \pi]$, а у $\eta(x)$ — з ймовірністю одиниця існує неперервна похідна $\eta'(x)$ на $[0, \pi]$. Нехай ряд

$$U(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k(x) \left(\xi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \eta_k (\lambda_k)^{-1/2} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right), \quad (9.4)$$

де $\xi_k = \int_0^\pi \xi(x) X_k(x) \rho(x) dx$, $\eta_k = \int_0^\pi \eta(x) X_k(x) \rho(x) dx$, збігається рівномірно за ймовірністю в області $D_1 = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T\}$. Тоді з ймовірністю одиниця існує два рази неперервно диференційований по t та по x

розв'язок задачі (9.1)–(9.3) в області D_1 , який можна зобразити у вигляді ряду

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left(\xi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \eta_k (\lambda_k)^{-1/2} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right), \quad (9.5)$$

який збігається рівномірно за ймовірністю в області D_1 .

Доведення теореми нічим не відрізняється від доведення теореми 7.1. Крім того, ця теорема була доведена в роботі [9]. $\square$

Теорема 9.2. Нехай випадковий процес $\xi(x)$ вибірково неперервний з ймовірністю одиниця, а $\eta(x)$ має вибірково неперервну з ймовірністю одиниця похідну $\eta'(x)$ на $[0, \pi]$, ξ_k та η_k , $k = 1, 2, \dots$, належать K_σ -простору $K(\Omega)$ з характеристикою $\psi(k)$. Якщо існує монотонно неспадна послідовність $\{\psi(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\psi(k) > 0$, $\psi(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, така, що виконуються умови

$$\sum_{l=k}^{\infty} a_l ||| Z_k^l(x, t, \psi) |||_C \left(\frac{1}{\psi(l)} - \frac{1}{\psi(l+1)} \right) < \infty, \quad (9.6)$$

$$||| Z_k^n(x, t, \psi) |||_C \frac{a_n}{\psi(n)} \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (9.7)$$

$$Z_k^l(x, t, \psi) = \sum_{r=m}^k \psi(r) \lambda_r X_r(x) \left(\xi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\eta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right),$$

$$a_l = (1 + \pi^2/6) \mu(([\pi a_l/2\theta] + 1)([a_l/\theta] + 1)) \frac{1}{1 - \theta}, \quad \alpha_l = c_0 \lambda_l + \lambda_l^{1/2} + \frac{2}{T},$$

$0 < \theta < 1$, c_0 задано в (7.18), $\|f(t, x)\|_C = \sup_{0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}_1} |f(x)|$. Тоді виконуються такі твердження:

- А) існує з ймовірністю одиниця два рази неперервно диференційований по t та по x в області D_1 розв'язок задачі (9.1)–(9.3), який можна зобразити у вигляді ряду (9.5), що збігається рівномірно за ймовірністю;
- В) якщо, крім того, існує така послідовність $\{\beta(k), k = 1, \dots, \infty\}$, $\beta(k) > 0$, $\beta(k) \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$, що виконуються умови

$$\sum_{l=k}^{\infty} a_l ||| U_k^l(x, t, \beta) |||_C \left(\frac{1}{\beta(l)} - \frac{1}{\beta(l+1)} \right) < \infty, \quad (9.8)$$

$$||| U_k^n(x, t, \beta) |||_C \frac{a_n}{\beta(n)} \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \quad (9.9)$$

де

$$U_k^l(x, t, \beta) = \sum_{r=m}^k \beta(r) X_r(x) \left(\xi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\eta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right),$$

a_l задано в (9.7), то при будь-якому $m \geq 1$ має місце нерівність

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}_1} |U(x, t) - U_m^\infty(x, t)| \right\| \\ & \leq \frac{1}{(\sin 1)^2} \sum_{l=k}^{\infty} a_l ||| U_k^l(x, t, \beta) |||_C \left(\frac{1}{\beta(l)} - \frac{1}{\beta(l+1)} \right), \end{aligned} \quad (9.10)$$

де

$$U_m^\infty(x, t) = \sum_{r=m}^{\infty} X_r(x) \left(\xi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\eta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right).$$

Доведення теореми. З доведення лема 7.1 випливає, що $\omega_R(\delta) = \omega_G(\delta) \leq C_1\delta$ для послідовності $X_k(x)$, де C_1 задано в (7.18). Тому з лема 3.7 випливає, що на множині $[0, \pi] \times \mathbf{R}_1$ послідовність функцій $X_k(x) \cos \sqrt{\lambda_k} t$, $X_k(x) \sin \sqrt{\lambda_k} t$, $k = 1, \dots, \infty$, належать класу $\mathbf{K}(c, a_n)$, де $c(x, t) = c(t) = (\sin(t/T)/(t/T))^2$, а a_k наведено в (9.7). Згідно з теоремою 4.1 ряд $c(x)U(x, t, \lambda)$, де $U(x, t, \lambda)$ наведено в (9.4), збігається за нормою рівномірно в області $[0, \pi] \times \mathbf{R}_1$. Оскільки $|c(t)| > \sin 1$ на $[0, \pi]$, то в області D_1 ряд (9.4) збігається рівномірно за нормою в $\mathbf{K}(\Omega)$, отже згідно з лемою 2.2 й за ймовірністю. Твердження А теореми доведено.

Нерівність (9.10) випливає з нерівності (4.4) теореми 4.1, якщо її застосувати до ряду $c(x)U(x, t, \lambda)$ в області $[0, \pi] \times \mathbf{R}_1$ та врахувати, що

$$\left\| \sup_{0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbf{R}_1} |U(x, t) - U_m^\infty(x, t)| \right\| \leq \frac{1}{(\sin 1)^2} \left\| \|c(t)\| U(x, t) - U_m^\infty(x, t) \|_C \right\|. \quad \square$$

Зауваження 9.1. Умови існування неперервної похідної у випадкової функції можна знайти у книзі [13] та в роботах [14, 15].

Зауваження 9.2. З теореми 8.2 можна легко отримати також наслідки такі ж, як і з теореми 7.2, як це зроблено в роботах [9, 10, 11, 12] в частинних випадках.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ю. В. Козаченко, *Умови та швидкість збіжності випадкових рядів з $\mathbf{K}_\sigma$ -просторів випадкових величин. I*, Теорія ймовірн. та матем. статистика **56** (1997), 112–125.
2. М. Лозєв, *Теория вероятностей*, ИЛ, Москва, 1962.
3. Г. Н. Положий, *Уравнения математической физики*, “Высшая школа”, Москва, 1964.
4. Е. Бейсенбаев, Ю. В. Козаченко, *Равномерная сходимость случайных рядов по вероятности и решение краевых задач со случайными начальными условиями*, Теория вероятност. и мат. статист. **21** (1979), 9–23.
5. Е. А. Абжанов, Ю. В. Козаченко, *Некоторые свойства случайных процессов в банаховых $\mathbf{K}_\sigma$ -пространствах*, Украинский матем. журнал **37** (1985), № 3, 275–280.
6. Ю. В. Козаченко, *Случайные процессы в пространствах Орлича*, Теория вероятност. и мат. статист. **30** (1984), 92–107 ; **31** (1984), 44–50.
7. М. Й. Ядренко, *Спектральная теория случайных полей*, “Вища школа”, Киев, 1980.
8. Б. И. Левитан, *Разложения по собственным функциям*, “Гостехиздат”, Москва, 1950.
9. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *К вопросу о применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями*, Случайные процессы в задачах математической физики, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1979, стор. 4–35.
10. Е. Бейсенбаев, *Условия существования решений гиперболического уравнения со случайными начальными условиями*, Извест. АН КазССР, сер. физ.-мат. (1979), № 5, 18–23.
11. Ю. В. Козаченко, М. В. Енджиргли, *Обгрунтування застосування методу Фур'є до крайових задач з випадковими початковими умовами*, Теорія ймовірн. та мат. статист. **51** (1994), 78–89 ; **53** (1995), 58–68.
12. E. Barrasa de la Krus, Yu. V. Kozachenko, *Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlich random initial conditions*, Random operators and Stochastic Equations **3** (1995), № 3, 201–220.
13. Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, “Мир”, Москва, 1969.
14. Ю. В. Козаченко, А. Ю. Сенченкова, *Достаточные условия выборочной дифференцируемости случайных процессов*, Теория вероятност. и мат. статистика **7** (1972), 75–80.
15. О. Н. Гладкая, *Достаточные условия выборочной дифференцируемости некоторых случайных процессов*, Исследования по теории случайных процессов, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1976, стор. 39–48.