

ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ СТАЦІОНАРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ, ЩО СПОСТЕРІГАЮТЬСЯ З ШУМОМ

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК

РЕЗЮМЕ. Досліджується задача оцінювання функціонала $A\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi(k)$ від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(k)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ при $j = -1, -2, \dots$, де $\eta(j)$ — некорельована з $\xi(j)$ стаціонарна стохастична послідовність. Знайдені формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ за умови, що відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ послідовності $\xi(j)$ та послідовності $\eta(j)$. Встановлені найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$, $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_g$ та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ для конкретних класів спектральних щільностей $\mathcal{D}_f$ та $\mathcal{D}_g$.

1. Вступ

Традиційні методи розв'язування задач лінійної екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей базуються на припущенні, що спектральні щільності послідовностей відомі [1–3]. На практиці, однак, повна інформація про спектральні щільності у більшості випадків неможлива. Щоб подолати це ускладнення, знаходять параметричні чи непараметричні оцінки спектральних щільностей або підбирають щільності, виходячи з інших міркувань. Потім застосовують класичну теорію оцінювання, вважаючи, що вибрані тим чи іншим способом спектральні щільності є істинними. Такий підхід, як показали К. С. Вастола та Г. В. Пур [4] на конкретних прикладах, може призвести до значного росту величини похибки оцінки. Тому доцільно шукати оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такі оцінки називають мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення величини похибки. За останні роки значно зріс інтерес до задач мінімаксної інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей. Огляд результатів з мінімаксної обробки інформації зробили у свій час С. А. Кассам та Г. В. Пур [5]. Слід особливо відзначити статтю У. Гренандера [6], у якій вперше запропоновано мінімаксний підхід до задач екстраполяції стаціонарних процесів. У статтях Ю. Франка [7–10] проблема мінімаксної екстраполяції та фільтрації досліджена за допомогою методів субдиференціального числення. Такий підхід дає можливість знаходити рівняння, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності для різноманітних класів

1991 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 60G25, 62M20; Secondary 60G10, 60G35, 33E11.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU 051067.

щільностей. У статтях [11–15] вивчається мінімаксий підхід до задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації функціоналів від стаціонарних послідовностей та стаціонарних процесів.

У даній роботі досліджується задача екстраполяції функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей за даними спостережень на фоні шуму. Користуючись класичними методами екстраполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей, виведені формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок функціоналів. За допомогою методів субдиференціального числення знайдені формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксий (робастних) спектральних характеристик оптимальних оцінок для різних класів спектральних щільностей.

2. Класичний метод лінійної екстраполяції

Припустимо, що коефіцієнти a_k , які визначають функціонал $A\xi$, задовольняють умови

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty; \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |a_k|^2 < \infty. \quad (1)$$

За цих умов функціонал $A\xi$ має скінчений другий момент.

Нехай некорельовані між собою стаціонарні стохастичні послідовності $\xi(j)$, $\eta(j)$ мають спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, що задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} d\lambda < \infty. \quad (2)$$

Лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ при $j = -1, -2, \dots$ визначається спектральною характеристикою $h(e^{i\lambda})$. Функція $h(e^{i\lambda})$ належить підпростору $L_2^-(f+g)$ у просторі $L_2(f+g)$ породженому функціями $e^{ij\lambda}$ при $j = -1, -2, \dots$. Спектральна характеристика $h(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки $A\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\min_{h \in L_2^-(f+g)} \Delta(h, f, g) = \min_{\hat{A}\xi} M |A\xi - \hat{A}\xi|^2 = \Delta(h(f, g); f, g) = \Delta(f, g).$$

Величина $\Delta(f, g)$ визначається лише щільностями $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$. Якщо щільності відомі, то скориставшись класичним методом А. М. Колмогорова [1], одержимо

$$h(f, g) = \frac{A(e^{i\lambda}) f(\lambda) - C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)} = A(e^{i\lambda}) - \frac{A(e^{i\lambda}) g(\lambda) + C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta(f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda}) g(\lambda) + C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda}) f(\lambda) - C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda \\ &= \langle Bc, c \rangle + \langle Ra, a \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$c = B^{-1}Da, \quad C(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ij\lambda}, \quad A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\lambda},$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{c}_k$ — скалярний добуток у просторі l_2 , $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{R}$ — оператори у просторі l_2 , які визначаються матрицями, елементи яких є коефіцієнти Фур'є функцій $(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}$, $f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}$, $f(\lambda)g(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}$ відповідно:

$$B_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} (f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} d\lambda,$$

$$D_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} d\lambda,$$

$$R_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} f(\lambda)g(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} d\lambda, \quad k, j = 0, 1, \dots$$

Отже справедливе таке твердження.

Лема 1. Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ — некорельовані стаціонарні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, що задовольняють умову (2) та виконується умова (1). Спектральну характеристику $h(f, g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f, g)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ при $j = -1, -2, \dots$ можна обчислити за формулами (3), (4).

Нехай $\xi(j)$ — стаціонарна послідовність, яка має спектральну щільність $f(\lambda)$ таку, що функція $f^{-1}(\lambda)$ інтегровна. Спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень $\xi(j)$ при $j = -1, -2, \dots$ можна обчислити за формулами

$$h(f) = A(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})f^{-1}(\lambda) = A(e^{i\lambda}) - r(e^{i\lambda})d^{-1}(e^{-i\lambda}), \quad (5)$$

$$\Delta(f) = \langle \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{Ad}\|^2, \quad (6)$$

де

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})_k e^{ik\lambda}, \quad r(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{Ad})_k e^{ik\lambda},$$

вектор $\mathbf{d} = \{d_0, d_1, \dots\}$ визначається коефіцієнтами канонічної факторизації $f(\lambda) = |d(e^{-i\lambda})|^2 = |\sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-ik\lambda}|^2$ щільності $f(\lambda)$; $\mathbf{A}$ — оператор у просторі l_2 , який визначається матрицею з елементи $A_{k,j} = a(k+j)$; $k, j = 0, 1, \dots$; $\mathbf{B}$ — оператор у просторі l_2 , який визначається матрицею, елементи якої є коефіцієнти Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$:

$$B_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} f^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad k, j = 0, 1, \dots$$

Для функціонала $A_N \xi = \sum_{k=0}^N a_k \xi(k)$ середньоквадратичну похибку та спектральну характеристику оптимальної оцінки можна визначити за формулами [12]

$$\Delta_N(h(f), f) = \|\mathbf{A}_N \mathbf{d}\|^2, \quad (7)$$

$$h(f) = A_N(e^{i\lambda}) - r_N(e^{i\lambda})d^{-1}(e^{-i\lambda}); \quad (8)$$

$$r_N(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^N (\mathbf{A}_N \mathbf{d})_k e^{ik\lambda}, \quad A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^N a_k e^{ik\lambda},$$

де $\mathbf{A}_N$ — оператор, який задається матрицею з елементами $A_{k,j} = a(k+j)$, коли $0 \leq k+j \leq N$, $A_{k,j} = 0$, коли $k+j > N$.

Наслідок 1. Нехай $\xi(j)$ — стаціонарна послідовність, яка має спектральну щільність $f(\lambda)$ таку, що функція $f^{-1}(\lambda)$ інтегровна. Спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень $\xi(j)$, $j = -1, -2, \dots$ можна обчислити за формулами (5), (6) (за формулами (7), (8) для функціонала $A_N \xi$).

3. МІНІМАКСНА (РОБАСТНА) ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ

Формулами (1)–(8) можна користуватись лише тоді, коли відомі спектральні щільності послідовностей. Якщо ж спектральні щільності невідома, проте визначена множина $\mathcal{D}$ можливих щільностей, то застосовують мінімаксий підхід до задач оцінювання функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей. Замість того, щоб шукати оцінку, яка була б оптимальною для деякої спектральної щільності, шукають оцінку, що мінімізує величину середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу.

Означення 1. Для заданої множини спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ щільності $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$, $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_g$ називаються найменш сприятливими для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо виконується співвідношення:

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f, g) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g} \Delta(h(f, g); f, g)$$

Означення 2. Для заданої множини спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{(f, g) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g} L_2^-(f + g),$$

$$\min_{h \in H_{\mathcal{D}}} \max_{(f, g) \in \mathcal{D}} \Delta(h; f, g) = \max_{(f, g) \in \mathcal{D}} \Delta(h^0; f, g).$$

Лема 2. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ найменш сприятливі в $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій $(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$ задають оператори B^0 , D^0 , R^0 , які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f, g) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g} \langle Da, B^{-1}Da \rangle + \langle Ra, a \rangle = \langle D^0a, (B^0)^{-1}D^0a \rangle + \langle R^0a, a \rangle. \quad (9)$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0 = h(f_0, g_0)$ можна обчислити за формулою (3) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_{\mathcal{D}}$.

Наслідок 2. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$ така, що $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегрована, є найменш сприятливою в $\mathcal{D}_f$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ при $j = -1, -2, \dots$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $f_0^{-1}(\lambda)$ задають оператор B^0 , який визначає розв'язок задачі

$$\max_{f \in \mathcal{D}_f} \langle B^{-1}a, a \rangle = \langle (B^0)^{-1}a, a \rangle. \quad (10)$$

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (5) за умови, що $h(f_0) \in H_{\mathcal{D}_f}$.

Наслідок 3. Спектральна щільність $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$ найменш сприятлива в класі $\mathcal{D}_f$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ при $j = -1, -2, \dots$, якщо вона допускає канонічну факторизацію: $f_0(\lambda) = |\sum_{k=0}^{\infty} d^0(k)e^{-ik\lambda}|^2$, де $d^0 = \{d^0(k): k = 0, 1, \dots\}$ — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\|Ad\|^2 \rightarrow \max, \quad f(\lambda) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} d(k)e^{-ik\lambda} \right|^2 \in \mathcal{D}_f. \quad (11)$$

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (5) за умови, що $h(f_0) \in H_{\mathcal{D}_f}$.

Найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0; f, g) \leq \Delta(h^0; f_0, g_0) \leq \Delta(h; f_0, g_0)$$

$$\forall h \in H_{\mathcal{D}} \quad \forall f \in \mathcal{D}_f \quad \forall g \in \mathcal{D}_g$$

виконуються, коли $h^0 = h(f_0, g_0)$, $h(f_0, g_0) \in H_{\mathcal{D}}$ і (f_0, g_0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f, g) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Задача на умовний екстремум (12) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [16]

$$\Delta_{\mathcal{D}}(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g) \rightarrow \inf, \quad (13)$$

де $\delta((f, g) | \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g)$ — індикаторна функція множини $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$. Розв'язок задачі (9) визначається умовою [16] $0 \in \partial \Delta_{\mathcal{D}}(f_0, g_0)$, де $\partial \Delta_{\mathcal{D}}(f_0, g_0)$ — субдиференціал опуклого функціонала $\partial \Delta_{\mathcal{D}}(f, g)$ в точці (f_0, g_0) .

Лема 3. Нехай (f_0, g_0) — розв'язок екстремальної задачі (13). Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання $A\xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_{\mathcal{D}}$.

4. НАЙМЕНШ СПРИЯТЛИВІ ЩІЛЬНОСТІ В КЛАСІ $\mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_0$

Розглянемо множину спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_0$, де

$$\mathcal{D}_M = \left\{ f(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \cos(m\lambda) d\lambda = \rho_m, \quad m = 0, 1, \dots, M \right\},$$

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ g(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right\},$$

Нехай $\rho_0 = P_1$, ρ_m , $m = 0, 1, \dots, M$ — строго позитивна послідовність. Проблема моментів в такому разі розв'язується неоднозначно і множина $\mathcal{D}_M$ містить нескінченно багато щільностей [17]. Нехай щільності $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_M$, $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_0$ і функції

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|}{f_0(\lambda) + g_0(\lambda)}, \quad (14)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|}{f_0(\lambda) + g_0(\lambda)}, \quad (15)$$

обмежені. За цих умов $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Тому [16]

$$\partial \Delta_{\mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0}(f_0, g_0) = -\partial \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) + \partial \delta((f_0, g_0) | \mathcal{D}_f^0 \times \mathcal{D}_g^0).$$

За умови $0 \in \partial \Delta_{\mathcal{D}}(f_0, g_0)$ при $\mathcal{D} = \mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_0$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0 \in \mathcal{D}_M$, $g_0 \in \mathcal{D}_0$ задовольняють рівняння

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = \left(\sum_{m=0}^M \psi_m \cos(m\lambda) \right) (f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (16)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = \alpha(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)). \quad (17)$$

де константи $\psi_0 \geq 0$, $\alpha \geq 0$.

Теорема 1. Нехай виконується умова (1), щільності $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_M$, $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_0$ задовольняють умову (2) і функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, які обчислені за формулами (14), (15), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ найменш сприятливі в класі $\mathcal{D}_M \times \mathcal{D}_0$, якщо $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ є розв'язком систем рівнянь (16), (17) і визначають розв'язок екстремальної задачі (9). Функція $h(f_0, g_0)$, що обчислена за формулою (3), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 4. Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ відома, спектральна щільність $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_0$, функція $(f(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$ інтегровна і функція $h_g(f_0, g_0)$, що обчислена за формулою (15), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $\mathcal{D}_M$ при оптимальній екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \{0, \alpha_2^{-1} |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda)\}$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (9). Функція $h(f, g_0)$, що обчислена за формулою (3), буде мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 5. Спектральна щільність

$$f_0(\lambda) = \frac{\left| \sum_{k=0}^N (A_N \mathbf{d})_k e^{ik\lambda} \right|^2}{\left| \sum_{m=1}^M c_m e^{-im\lambda} \right|^2}$$

послідовності авторегресії — рухомого середнього порядку $(M; N)$:

$$\sum_{m=0}^M c_m \xi(n-m) = \sum_{k=0}^N (A_N \mathbf{d})_k \zeta(n-k),$$

де $\zeta(k)$ — послідовність некорельованих випадкових величин, найменш сприятлива в класі $\mathcal{D}_M$ при оптимальній екстраполяції функціонала $A_N \xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ при $j = -1, -2, \dots$. Невідомі коефіцієнти визначаються з екстремальної задачі (11) [11]. Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ оптимальної оцінки $A_N \xi$ обчислюється за формулою (8).

6. НАЙМЕНШ СПРИЯТЛИВІ ЩІЛЬНОСТІ В КЛАСІ $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u^v \times \mathcal{D}_\varepsilon$

Розглянемо задачу в класі спектральних щільностей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u^v \times \mathcal{D}_\varepsilon$, де

$$\mathcal{D}_u^v = \left\{ f(\lambda) \mid v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda = P_1 \right\},$$

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \mid g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda = P_2 \right\},$$

спектральні щільності $v(\lambda)$, $u(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані і, крім того, щільності $v(\lambda)$, $u(\lambda)$ обмежені. Клас $\mathcal{D}_\varepsilon$ описує модель “ε-забруднення” стохастичних послідовностей. Клас $\mathcal{D}_u^v$ описує “смугову” модель стохастичних послідовностей.

Нехай $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_u^v$, $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_\varepsilon$ такі спектральні щільності, що функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, які обчислені за формулами (14), (15), обмежені. З умови $0 \in \partial \Delta_{\mathcal{D}}(f_0, g_0)$ при $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u^v \times \mathcal{D}_\varepsilon$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \alpha_1^{-1}) \quad (18)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (19)$$

де $\gamma_1(\lambda) \leq 0$ і $\gamma_1(\lambda) = 0$ коли $f_0(\lambda) \geq v(\lambda)$; $\gamma_2(\lambda) \geq 0$ і $\gamma_2(\lambda) = 0$ коли $f_0(\lambda) \leq u(\lambda)$; $\varphi(\lambda) \leq 0$ і $\varphi(\lambda) = 0$ коли $g_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon)g_1(\lambda)$. Сформулюємо одержане твердження у вигляді теореми.

Теорема 2. Нехай $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_u^v$, $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_\varepsilon$, виконується умова (2) і функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, які обчислені за формулами (14), (15), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ найменш сприятливі в класі $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u^v \times \mathcal{D}_\varepsilon$ при оптимальній екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (18), (19), і визначають розв'язок екстремальної задачі (9). Функція $h(f_0, g_0)$, що обчислена за формулою (3), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки $A\xi$.

Наслідок 6. Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ зафіксована, щільність $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову (2) і функція $h_g(f, g_0)$, що обчислена за формулою (15), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $\mathcal{D}_\varepsilon$ при оптимальній екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \left\{ (1 - \varepsilon)g_1(\lambda), \alpha_2 |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda) \right\}$$

і пара $(f(\lambda), g_0(\lambda))$ визначає розв'язок екстремальної задачі (9). Функція $h(f, g_0)$, що обчислена за формулою (3), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 7. Спектральна щільність

$$f_0(\lambda) = \max \left\{ v(\lambda), \min \left\{ u(\lambda), \left| \sum_{k=0}^{\infty} (A\mathbf{d})_k e^{ik\lambda} \right|^2 \right\} \right\}.$$

найменш сприятлива в класі D_v^u при оптимальній екстраполяції функціонала $A\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ при $j = -1, -2, \dots$. Невідомі коефіцієнти $\{d(k): k = 0, 1, \dots\}$ визначаються з екстремальної задачі (11). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ оптимальної оцінки $A\xi$ обчислюється за формулою (8).

7. НАЙМЕНШ СПРИЯТЛИВІ ЩІЛЬНОСТІ В КЛАСІ $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ для множини щільностей $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$, що описують моделі “ ε -околу” стохастичних послідовностей у просторі $L_2 \times L_1$. Нехай

$$D_{2\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \varepsilon_1 \right\}$$

це “ ε -оکیل” у просторі L_2 заданої обмеженої спектральної щільності $f_1(\lambda)$,

$$D_{1\varepsilon_2} = \left\{ g(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \varepsilon_2 \right\}$$

це “ ε -оکیل” у просторі L_1 заданої обмеженої спектральної щільності $g_1(\lambda)$. Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda) \in D_{1\varepsilon_2}$ такі, що функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, які визначені за формулами (14), (15), обмежені. З умови $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$ при $D = D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ знаходимо рівняння

$$|A(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1, \quad (20)$$

$$|A(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))\Psi(\lambda)\alpha_2, \quad (21)$$

де $|\Psi(\lambda)| \leq 1$ та $\Psi(\lambda) = \text{sign}(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))$, коли $g_0(\lambda) \neq g_1(\lambda)$, α_1, α_2 — сталі величини. Рівняння (18), (19) разом з екстремальною умовою (6) визначають найменш сприятливі щільності в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$.

Теорема 3. Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda) \in D_{1\varepsilon_2}$, виконується умова (2) і функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, які обчислені за формулами (14), (15), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ найменш сприятливі в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ при оптимальній екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (20)–(23), і визначають розв’язок екстремальної задачі (9). Функція $h(f_0, g_0)$, що обчислена за формулою (3), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 8. Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ зафіксована, щільність $g_0(\lambda) \in D_{1\varepsilon_2}$, щільність $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову (2) і функція $h_g(f, g_0)$, що обчислена за формулою (15), обмежена. Щільність $g_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $D_{1\varepsilon_2}$ при оптимальній екстраполяції функціонала $A\xi$, якщо

$$g_0(\lambda) = \max \left\{ g_1(\lambda), \alpha_2 |A(e^{i\lambda})f(\lambda) - C^0(e^{i\lambda})| - f(\lambda) \right\},$$

і щільності $f(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ визначають розв’язок екстремальної задачі (9). Функція $h(f, g_0)$, що обчислена за формулою (3), буде мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Наслідок 9. Щільність $f_0(\lambda)$ найменш сприятлива в класі $D_{2\varepsilon_1}$ при оптимальній екстраполяції функціонала $A\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ при $j = -1, -2, \dots$, якщо виконується співвідношення

$$f^0((\lambda)) = \frac{f_1((\lambda))}{2} + \left(\frac{f_1((\lambda))^2}{4} + \left| \sum_{k=0}^{\infty} (A d)_k e^{ik\lambda} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Невідомі коефіцієнти $\{d(k): k = 0, 1, \dots\}$ визначаються з екстремальної задачі (11). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ оптимальної оцінки $A\xi$ обчислюється за формулою (8).

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Сборник статей, "Наука", Москва, 1986.
2. T. Kailath, *A view of three decades of linear filtering theory*, IEEE Trans. on Inform. Theory **20** (1974), № 2, 146–181.
3. Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, "Наука", Москва, 1990.
4. K. S. Vastola and H. V. Poor, *An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering*, Automatica **28** (1983), 289–293.
5. S. A. Kassam and V. H. Poor, *Robust techniques for signal processing: A survey*, Proc. IEEE. **73** (1985), № 3, 433–481.
6. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
7. J. Franke, *On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise*, J. Time Series Analysis **5** (1984), № 4, 227–244.
8. ———, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahr. Verw. Geb. **68** (1985), 337–364.
9. J. Franke and H. V. Poor, *Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors*, Robust and Nonlinear Time Series Analysis, Lecture Notes in Statistics, т. 26, 1984, стор. 87–126.
10. J. Franke, *A general version of Breiman's minimax filter*, Note di Matematica **10** (1985), 157–175.
11. М. П. Моклячук, *Минимаксная экстраполяция и процессы авторегрессии-скользящего среднего*, Теор. вероятност. и матем. статист. **41** (1989), 66–74.
12. ———, *Минимаксная экстраполяция случайных процессов для моделей ε -загрязнения*, Теор. вероятност. и матем. статист. **42** (1990), 95–103.
13. ———, *Минимаксная фильтрация линейных преобразований стационарных последовательностей*, Украин. матем. жур. **43** (1991), № 1, 92–99.
14. ———, *Стохастичні послідовності авторегресії та мінімаксна інтерполяція*, Теор. ймовір. та матем. статист. **48** (1993), 135–146.
15. M. P. Moklyachuk, *Minimax-robust interpolation of discrete time series*, Evolutionary stochastic systems in physics and biology (V. S. Korolyuk et al, ред.), TVP/VSP, Moscow/Utrecht, 1993, стор. 336–347.
16. Б. Н. Пшеничный, *Необходимые условия экстремума*, "Наука", Москва, 1982.
17. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, "Наука", Москва, 1973.

252022 КИЇВ, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ТЕОРІЙ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Надійшла 12.06.96