

ТЕОРЕМА ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ПО ЗАГАЛЬНИХ ВИПАДКОВИХ МІРАХ

УДК 519.21

В. М. РАДЧЕНКО

РЕЗЮМЕ. Розглядаються інтеграли від дійсних функцій f за загальною випадковою мірою μ . Доведено, що множина $\{f_\alpha\}$ рівномірно інтегрована за μ тоді і лише тоді, коли існує функція $G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $|G(t)/t| \rightarrow +\infty$ при $|t| \rightarrow +\infty$ така, що набір випадкових величин $\int_A G(f_\alpha(x)) d\mu$ за всіма A , α обмежений за ймовірністю.

Нехай X — деяка множина, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра підмножин X , а $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — ймовірносний простір. Будемо називати випадковою мірою μ набір випадкових величин $\{\mu(A), A \in \mathcal{B}\}$ такий, що $\mu(A_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ для $A_n \downarrow \emptyset$, та для $A \cap B = \emptyset$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ м.н.

Для випадкових величин ξ будемо використовувати квазінорму

$$\|\xi\| = \sup\{\delta: \mathbf{P}\{|\xi| > \delta\} > \delta\}.$$

Очевидно, що $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$ та $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \Leftrightarrow \|\xi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Множина $\{\xi_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ буде обмежена за ймовірністю тоді і лише тоді, коли $\lim_{t \rightarrow 0} \sup_\gamma \|t\xi_\gamma\| = 0$.

З теореми 1 [1] випливає, що для нашої випадкової міри може бути застосована теорія інтеграла від дійсних вимірних функцій на X за векторною мірою, побудована в [2] (в [1] вважається, що X — компакт, а $\mathcal{B}$ — борелівська, але в доведенні теореми 1 це не використовується).

Будемо говорити, що множина μ -інтегрованих функцій $f_\alpha: X \rightarrow \mathbf{R}, \alpha \in \mathcal{A}$, рівномірно інтегрована по μ якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{\alpha, A} \mathbf{P}\left\{\left|\int_{A \cap \{|f_\alpha| > c\}} f_\alpha d\mu\right| > \varepsilon\right\} = 0. \quad (1)$$

В [3] доведено (а в [4] дещо узагальнене) твердження, що для послідовності $f_n, n \geq 1$, (1) є необхідною і достатньою умовою для можливості граничного переходу під знаком нашого інтеграла. В даній роботі буде отриманий критерій для виконання рівності (1), аналогічний теоремі Валле–Пуссена для інтегралів по дійсних мірах (див., наприклад, [5]). Має місце наступний факт.

Теорема 1. Для того, щоб множина функцій $f_\alpha: X \rightarrow \mathbf{R}, \alpha \in \mathcal{A}$, інтегрованих за випадковою мірою μ , була рівномірно інтегрована за μ , необхідно і достатньо,

щоб існувала вимірна функція $G(t): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ така, що $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |G(t)/t| = \infty$, та набір випадкових величин $\{\int_A G(f_\alpha(x)) d\mu, A \in \mathcal{B}, \alpha \in A\}$ обмежений за ймовірністю.

Доведення. Спочатку припустимо, що вказана G існує, і доведемо виконання (1).

Зафіксуємо $\delta > 0$. Візьмемо $c \in \mathbf{R}$ таке, що $|t/G(t)| < \delta$ для $|t| > c$. Розглянемо

$$\sup_{\alpha, A} \left\| \int_{A \cap \{|f_\alpha| > c\}} f_\alpha d\mu \right\| = \sup_{\alpha, A} \left\| \int_{A \cap \{|f_\alpha| > c\}} G(f_\alpha(x)) (f_\alpha(x)/G(f_\alpha(x))) d\mu \right\|.$$

В інтегралі $|f_\alpha(x)| > c$, тому

$$|f_\alpha(x)/G(f_\alpha(x))| I_{A \cap \{|f_\alpha| > c\}} < \delta,$$

і розглядуваний вираз не перевищує

$$\sup_{\alpha, h: |h(x)| \leq \delta} \left\| \int_X G(f_\alpha(x)) h(x) d\mu \right\| \leq 16 \sup_{\alpha, A} \left\| \delta \int_A G(f_\alpha(x)) d\mu \right\|.$$

Тут в останній нерівності використана лема 4 [4]. Використовуючи обмеженість $\int_A G(f_\alpha(x)) d\mu$ за ймовірністю, вибором δ (а, значить, і вибором c) можемо зробити останній вираз скіль завгодно малим. Тому (1) виконується.

Тепер припустимо, що (1) має місце, і побудуємо функцію G , що задовольняє вказаним вимогам.

Користуючись (1), візьмемо натуральні числа $s_n, n \geq 1$, такі, що $s_n \uparrow \infty$, і для всіх f_α, A

$$\left\| \int_{A \cap \{|f_\alpha| > s_n\}} f_\alpha d\mu \right\| \leq 2^{-n}. \quad (2)$$

Покладемо

$$r_n = \sum_{k=1}^n \max\{i: s_i \leq k\}, \quad G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n I_{\{n \leq |t| < n+1\}}(t).$$

Оскільки $\max\{i: s_i \leq k\} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, буде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n/n = +\infty \quad \text{та} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} |G(t)/t| = \infty.$$

Залишається перевірити, що інтеграли з умови теореми обмежені за ймовірністю. Маємо, що

$$\begin{aligned} G(f_\alpha(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \max\{i: s_i \leq k\} \right) I_{\{n \leq |f_\alpha| < n+1\}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \max\{i: s_i \leq k\} I_{\{|f_\alpha| \geq k\}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=s_k}^{\infty} I_{\{|f_\alpha| \geq j\}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k,\alpha}(x), \end{aligned}$$

де

$$g_{k,\alpha}(x) = \sum_{j=s_k}^{\infty} (j - s_k + 1) I_{\{j \leq |f_\alpha| < j+1\}}(x).$$

Очевидно, що $|g_{k,\alpha}(x)| \leq |f_\alpha(x)|$ та за теоремою 7.3.5 [2] всі функції $g_{k,\alpha} \in \mu$ -інтегровані. Відмітимо, що $g_{k,\alpha}(x) \neq 0$ лише тоді, коли $|f_\alpha(x)| \geq s_k$.

Використовуючи лему 4 [4] та (1), для будь-якого $t \leq 1$ для вимірної $h: X \rightarrow \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq 1$, (тоді $|g_{k,\alpha}h/f_\alpha| \leq 1$) ми маємо

$$\begin{aligned} \left\| t \int_A g_{k,\alpha} h d\mu \right\| &= \left\| \int_{A \cap \{|f_\alpha| \geq s_k\}} (tf_\alpha)(g_{k,\alpha}h/f_\alpha) d\mu \right\| \leq 16 \sup_{B \in \mathcal{B}} \left\| t \int_{B \cap \{|f_\alpha| \geq s_k\}} f_\alpha d\mu \right\| \\ &\leq 16 \cdot 2^{-k}. \end{aligned} \quad (3)$$

За лемою Бореля–Кантеллі, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_{k,\alpha} h d\mu$ збігається майже напевно. Тенер з теореми 7.3.8 [2] випливає, що $G(f_\alpha(x))$ інтегрована по μ та $\int_A G(f_\alpha(x)) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_{k,\alpha} d\mu$. Використовуючи (1) для $h(x) \equiv 1$, $t \leq 1$, ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} \left\| t \int_A G(f_\alpha(x)) d\mu \right\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| t \int_A g_{k,\alpha} d\mu \right\| = \sum_{k=1}^j \|\dots\| + \sum_{k=j+1}^{\infty} \|\dots\| \\ &\leq \sum_{k=1}^j 16 \sup_{B \in \mathcal{B}} \left\| t \int_B f_\alpha d\mu \right\| + \sum_{k=j+1}^{\infty} 16 \cdot 2^{-k} \\ &\leq 16j \sup_{B \in \mathcal{B}} \left\| t \int_B f_\alpha I_{\{|f_\alpha| \leq d\}} d\mu \right\| + 16j \sup_{B \in \mathcal{B}} \left\| t \int_B f_\alpha I_{\{|f_\alpha| > d\}} d\mu \right\| + 2^{4-j}. \end{aligned}$$

Вибором j ми можемо зробити останній доданок скіль завгодно малим. Потім для $t = 1$, використовуючи (1), вибором d можемо як завгодно зменшити другий доданок. Перший же доданок не перевищує $256j \sup_{Y \in \mathcal{B}} \|td\mu(Y)\|$ (за лемою 4 [4] з $f(x) \equiv td$, $h(x) = f_\alpha(x)I_{\{|f_\alpha| \leq d\}}(x)/d$, $|h(x)| \leq 1$). Цей вираз ми можемо зробити як завгодно малим вибором малого $t \leq 1$. Це випливає з теореми роботи [6], що дає нам обмеженість за ймовірністю значення нашої випадкової міри. При зменшенні t значення другого доданка не збільшиться.

Тому множина значень $\int_A G(f_\alpha(x)) d\mu$, $A \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, обмежена за ймовірністю. Теорема доведена. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. В. М. Радченко, *Про інтеграли по випадковим мірам, σ -адитивним з ймовірністю 1*, Вісник Київського університету. Математика і механіка **31** (1989), 111–114.
2. P. Turpin, *Convexites dans les espaces vectorielles topologiques generaux*, Dissertationes Mathematicae **131** (1976).
3. В. Н. Радченко, *Равномерная интегрируемость для интегралов по L_0 -значным мерам*, Український математичний журнал **43** (1991), № 9, 1264–1267.
4. ———, *Равномерная интегрируемость и теорема Лебега для сходимости по L_0 -значным мерам*, Український математичний журнал **48** (1996), № 6, 857–860.
5. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, “Наука”, Москва, 1980.
6. L. Drewnowski, *Boundness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurable functions*, Proceedings of the American Mathematical Society **91** (1984), № 4, 581–588.

252033, КИЇВ-33, НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА, КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

Надійшла 10.05.97