

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ ПРОЦЕСІВ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

УДК 519.21

А. В. СВІЩУК ТА О. Е. ЛУКІН

РЕЗЮМЕ. Виводяться рівняння оптимальної нелінійної інтерполяції та екстраполяції для двовимірного процесу (θ_t, ξ_t) випадкової еволюції $\{(\theta_t, \xi_t); x_t\}$, $0 \leq t \leq T$, де x_t — однорідний процес Маркова з інфінітезимальним оператором Q . Наведено застосування до стохастичних моделей (B, S) -неповного ринку цінних паперів.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, УМОВИ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

Двовимірний процес випадкової еволюції.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задані незалежні між собою вінерівські процеси $w_i = (w_i(t))$, $i = 1, 2$, $0 \leq t \leq T$, та випадковий вектор (θ_0, ξ_0) , що не залежить від w_1 та w_2 .

Нехай задано також вимірний фазовий простір $(X, \mathfrak{N})$ однорідного неперервного процесу Маркова x_t з інфінітезимальним оператором Q . Процес x_t не залежить ні від $w_i = (w_i(t))$, $i = 1, 2$, ні від (θ_0, ξ_0) .

Нехай

$$F_t := \sigma \{ \omega : \theta_0, \xi_0, w_1(s), w_2(s), x_s, s \leq t \}. \quad (1)$$

Двовимірним процесом (θ_t, ξ_t) марковської випадкової еволюції $\{(\theta_t, \xi_t); x_t\}$ називається розв'язок системи двох стохастичних диференціальних рівнянь з марковським збуренням:

$$\begin{cases} d\theta_t = a(t, \theta_t, \xi_t, x_t) dt + b_1(t, \theta_t, \xi_t, x_t) dw_1(t) + b_2(t, \theta_t, \xi_t, x_t) dw_2(t), \\ d\xi_t = A(t, \theta_t, \xi_t, x_t) dt + B(t, \xi_t, x_t) dw_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

де $P(|\theta_0| < +\infty) = P(|\xi_0| < +\infty) = 1$, $x_0 = x \in X$.

Постановка задачі та умови.

Нехай (θ, ξ) — двовимірний частково спостережуваний випадковий процес, де $\theta = (\theta_t, F_t)$, $0 \leq t \leq T$, — неспостережувана компонента, а $\xi = (\xi_t, F_t)$, $0 \leq t \leq T$, — спостережувана компонента, яка описується системою (2).

Задача оптимальної інтерполяції для частково спостережуваного процесу (θ, ξ) полягає в побудові оптимальної в середньоквадратичному сенсі оцінки деякої F_t -вимірної функції h_s , що залежить від (θ, ξ, x) , за результатами спостережень ξ_u , $u \leq t$, $t \geq s$. Якщо $E h^2 < +\infty$, то такою оцінкою є апостеріорне середнє:

$$\pi_{s,t}(h) := E \left[h_s / F_t^\xi \right]. \quad (3)$$

Для $\pi_{s,t}(h)$ можна отримати рівняння двох типів: прямі (по t при фіксованому s) та обернені (по s при фіксованому t).

В даній статті виведено пряме рівняння оптимальної нелінійної інтерполяції.

Задача оптимальної екстраполяції для частково спостережуваного процесу (θ, ξ) полягає в побудові оптимальної в середньоквадратичному сенсі оцінки деякої екстрапольованої " F_t -вимірної" функції h_s , залежної від (θ, ξ, x) , з результатами спостережень ξ_u , $u \leq s \leq t$. Якщо $E h^2 < +\infty$, то такою оцінкою є апостеріорне середнє:

$$\pi_{t,s}(h) := E [h_t / F_s^\xi]. \quad (4)$$

Для $\pi_{s,t}(h)$ буде отримане рівняння по $s \leq t$ при фіксованому t , що називається оберненим рівнянням оптимальної нелінійної екстраполяції (на відміну від прямого рівняння по $t \geq s$ при фіксованому s).

Нехай $h(t, \theta_t, \xi_t, x_t)$ — вимірна функція, така, що $E |h(t, \theta_t, \xi_t, x_t)| < +\infty$. Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

- 1) для деякої $K(x)$ обмеженої вимірної функції по $x \in X$

$$|g(t, \theta', \xi', x) - g(t, \theta'', \xi'', x)|^2 \leq K(x) (|\theta' - \theta''|^2 + |\xi' - \xi''|^2),$$

$$g^2(t, \theta, \xi, x) \leq K(x)(1 + \theta^2 + \xi^2), \quad (5)$$

де $g(t, \theta, \xi, x)$ позначає будь-яку з функцій a, A, b_1, b_2, B в (2);

- 2) $E(\theta_0^2 + \xi_0^2) < +\infty$;

- 3) процес x_t є ергодичним із стаціонарною мірою $\rho(A)$, $A \in \mathbb{N}$;

- 4) для деякої константи $C > 0$

$$\int_X \rho(dx) B^2(t, \xi, x) \geq C;$$

- 5) функція h неперервна разом зі своїми похідними $h'_t, h'_\theta, h'_\xi, h''_{\theta\theta}, h''_{\xi\xi}, h''_{\theta\xi}$ та

$$\sup_{t \leq T} E h^2(t, \theta_t, \xi_t, x_t) < +\infty, \quad h \in \text{Dom}(Q);$$

- 6) нехай

$$Lh = h'_t + h'_\theta \cdot a + h'_\xi \cdot A + \frac{1}{2} h''_{\theta\theta} [b_1^2 + b_2^2] + \frac{1}{2} h''_{\xi\xi} \cdot B^2 + h''_{\theta\xi} \cdot b_2 \cdot B.$$

Тоді

$$\int_0^T E [(L + Q)h(t, \theta_t, \xi_t, x_t)]^2 dt < +\infty; \quad (7)$$

- 7) похідні h'_θ та h'_ξ інтегровні в середньому квадратичному з вагами $b_1^2 + b_2^2$ та B^2 відповідно:

$$\int_0^T E \{ [h'_\theta]^2 \cdot [b_1^2 + b_2^2] \} dt < +\infty, \quad \int_0^T E [h'_\xi]^2 \cdot B^2 dt < +\infty; \quad (8)$$

- 8) $(L + Q)g(s, \theta, \xi, x) = 0$, де

$$g(s, \theta, \xi, x) = E [h(t, \theta_t, \xi_t, x_t)] / \theta_s = \theta, \xi_s = \xi, x_s = x],$$

t — фіксоване, $s \leq t$.

З умов 1)–3) випливає, що система рівнянь (2) має єдиний сильний розв'язок, що є процесом Маркова [2].

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1 (рівняння оптимальної нелінійної інтерполяції). Якщо виконуються умови 1)–7), то Р-майже скрізь

$$\pi_{s,t}(h) = \pi_s(h) + \int_s^t \frac{E \{ h(s, \theta_s, \xi_s, x_s) [A(u, \theta_u, \xi_u, x_u) - \pi_u(A)] / F_u^\xi \}}{B(u, \xi_u, x_u)} d\bar{w}_u, \quad (9)$$

де $\pi_s(h) := \pi_{ss}(h)$, $\pi_{s,t}(h)$ визначена в (3), $s \leq t$,

$$\bar{w}_t := \int_t^T \frac{d\xi_s - \pi_s(A)ds}{B(s, \xi_s, x_s)}, \quad (10)$$

$w(t)$ є вінерівським процесом відносно F_t^ξ , $0 \leq t \leq T$.

Теорема 2 (рівняння оптимальної нелінійної екстраполяції). Якщо виконуються умови 1)–8), то Р-майже скрізь

$$\pi_{t,s}(h) = \pi_{t,0}(h) + \int_0^t \left[\pi_u(Ng) + \frac{\pi_u(gA) - \pi_u(g)\pi_u(A)}{B(s, \xi_u, x_u)} \right] d\bar{w}_u, \quad (11)$$

де $\pi_s(h) := \pi_{ss}(h)$, $\pi_{s,t}(h)$ визначена в (3), $s \leq t$, $\bar{w}_t$ визначений в (10), g визначений в (8).

2. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

1. Для доведення теореми 1 зазначимо, що формулу (9) можна записати у вигляді

$$\pi_{s,t}(h) = \pi_s(h) + \int_s^t \frac{E [h_s A_u / F_u^\xi] - \pi_{s,u}(h) \cdot \pi_u(A)}{B(u, \xi_u, x_u)} d\bar{w}_u$$

або

$$d_t \pi_{s,t}(h) = \frac{E [h_s A_t / F_t^\xi] - \pi_{s,t}(h) \cdot \pi_t(A)}{B(t, \xi_t, x_t)} d\bar{w}_t,$$

де $t \geq s$ та $\pi_s(h) := \pi_{ss}(h)$.

Розглянемо квадратично інтегрований мартингал $Y = (y_t, F_t^\xi)$, в якому

$$y_t := E [h_s / F_t^\xi], \quad t \geq s.$$

За теоремою Іто–Кларка [3] y_t при $t \geq s$ допускає зображення

$$y_t = \pi_s(h) + \int_s^t g_{s,u}(\xi) d\bar{w}_u$$

з вінерівським процесом $\bar{w} = (\bar{w}_t, F_t^\xi)$,

$$\bar{w}_t := \int_0^t \frac{d\xi_u - \pi_u(A)du}{B(u, \xi_u, x_u)} = \int_0^t \left[\frac{A - \pi_u(A)}{B} \right] ds + w_2(t), \quad (12)$$

та процесом $(g_{s,u}(\xi), F_u^\xi)$, $u \geq s$, для якого $E \int_s^t g_{s,u}^2(\xi) du < +\infty$. Введемо квадратично інтегрований мартингал $z = (z_t, F_t^\xi)$:

$$z_t = \int_s^t \lambda_{s,u}(\xi) d\bar{w}_u,$$

де $|\lambda_{s,u}(\xi)| \leq c < +\infty$. Очевидно, що

$$E y_t \cdot z_t = E \int_s^t \lambda_{s,u}(\xi) g_{s,u}(\xi) du. \quad (13)$$

З іншого боку, враховуючи (12), знаходимо

$$E y_t \cdot z_t = E E \left(h_s / F_t^\xi \right) z_t = E h_s z_t = E \int_s^t \lambda_{s,u}(\xi) \frac{E \left(h_s A_u / F_t^\xi \right) - E \left(h_s / F_t^\xi \right) \pi_u(A)}{B(u, \xi_u, x_u)} du. \quad (14)$$

Порівнявши праві частини (13) та (14), маємо для всіх $u \geq s$

$$g_{s,u}(\xi) = \frac{E \left(h_s A_u / F_u^\xi \right) - E \left(h_s / F_u^\xi \right) \pi_u(A)}{B(u, \xi_u, x_u)},$$

що й доводить теорему 1.

2. Для доведення теореми 2 використаємо формулу Іто для процесів випадкової еволюції [2] для функції $g(s, \theta_s, \xi_s, x_s)$, $s \leq t$:

$$g(s, \theta_s, \xi_s, x_s) = g(s, \theta_0, \xi_0, x) + \int_0^s [L + Q] g(s, \theta_u, \xi_u, x_u) du + y_s + m_s, \quad (15)$$

де оператор L визначений в (8), процес m_t має вигляд

$$m_t = f(x_t) - f(x) - \int_0^t Q f(x_s) ds, \quad f(x) \in \text{Dom}(Q),$$

і є F_t^x -мартингалом,

$$y_t := \sum_{i=1}^2 \int_0^t g'_\theta b_i dw_i + \int_0^t g'_\xi B dw_2.$$

З умови 8) та (8) випливає, що процес $Y = (y_s, F_s)$, $s \leq t$, з $y_s := g(s, \theta_s, \xi_s, x_s)$ є квадратично інтегрованим мартингалом і

$$\langle y, w_2 \rangle_s = \int_0^s [g'_\theta b_2 + g'_\xi B] du.$$

Зауважимо, що $\langle y, m \rangle_t = 0$. На підставі

$$E(h(s, \theta_t, \xi_t, x_t) / F_s) = E(h(s, \theta_t, \xi_t, x_t) / \theta_s, \xi_s, x_s) = g(s, \theta_s, \xi_s, x_s)$$

з теореми 8.5 [3, стор. 358] одержуємо формулу (11). Отже теорему 2 доведено.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО МОДЕЛІ (B, S) -НЕПОВНОГО РИНКУ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Прикладом еволюції, описаної системою (2), є (B, S) -ринку цінних паперів з неповною інформацією, де B_t описує динаміку вартості облігації (банківського рахунку) з процентною ставкою α , що задається деяким процесом α_t , а S_t описує динаміку вартості акції з коефіцієнтом росту μ та мінливості σ , що залежать від B_t та x_t : $\mu = \mu(B_t, x_t)$, $\sigma = \sigma(B_t, x_t)$. Процес α_t визначається рівнянням

$$d\alpha_t = r(S_t, x_t) dt + \beta(x_t) dw_2(t). \quad (16)$$

Отже, (B, S) -ринку цінних паперів з неповною інформацією (завдяки наявності додаткового джерела випадковості x_t), що задається двовимірним процесом (B_t, S_t) :

$$\begin{cases} dB_t = B_t \cdot [r(S_t, x_t) dt + \beta(x_t) dw_2(t)], & B_0 > 0, \\ dS_t = S_t \cdot [\mu(B_t, x_t) dt + \sigma(B_t, x_t) dw_1(t)], & S_0 > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Зауважимо, що у відомій моделі Блека-Шоулса [1] (B, S) -ринку цінних паперів

$$r(S, x) = r > 0, \quad \beta(x) \equiv 0, \quad \mu(x) \equiv \mu \in \mathbf{R}, \quad \sigma(B, x) \equiv \sigma$$

для всіх $x \in X$.

Очевидно, що система (17) є лінійним аналогом системи (2).

Розглянемо модель (B, S) -неповного ринку цінних паперів, що задається двовимірним процесом (B_t, S_t) в (17). В даному випадку коефіцієнти рівнянь (17) та (2) пов'язані таким чином:

$$\begin{aligned} \xi_t &\equiv B_t, & A &\equiv B \cdot r, & B &\equiv B \cdot \beta, & \theta_t &\equiv S_t, \\ a &\equiv S_t \cdot \mu, & b_1 &\equiv S \cdot \sigma, & b_2 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Застосовуючи теореми 1 та 2 до моделі (17) та враховуючи (18), маємо

Наслідок 1 (оптимальна інтерполяція (B, S) -неповного ринку цінних паперів).

$$\pi_{s,t}(h) = \pi_s(h) + \int_s^t \mathbb{E} \left\{ h(s, S_s, B_s, x_s) \frac{r(S_u, x_u) - \pi_u(r)}{\beta} / F_u^\xi \right\} d\bar{w}_u, \quad (19)$$

де

$$\bar{w}_u := \int_0^u \left[\frac{r(S_v, x_v) - \pi_v(r)}{\beta} \right] dv + w_2(t).$$

Наслідок 2 (оптимальна екстраполяція (B, S) -неповного ринку цінних паперів).

$$\pi_{t,s}(h) = \pi_{t,0}(h) + \int_0^t \mathbb{E} \left[\pi_u(h'_\beta B\beta) + \frac{\pi_u(gr) - \pi_u(g) \cdot \pi_u(r)}{\beta} \right] d\bar{w}_u, \quad (19)$$

де $d\bar{w}_u$ визначено в (19), а функція g — в 8).

Зауваження. Фільтрація компонент процесів випадкової еволюції із застосуванням до моделей (B, S) -неповного ринку цінних паперів досліджується в роботі [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. F. Black, M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Polit. Economy **81** (1973), 637–657.
2. А. В. Свіщук, А. Г. Бурдейний, *Стійкість еволюційних стохастичних систем та її застосування у фінансовій математиці*, Укр. мат. журн. **48** (1996), № 10, 1574–1591.
3. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*, “Наука”, Москва, 1974.
4. А. В. Свіщук, О. Е. Лукін, *Фільтрація компонент процесів випадкової еволюції*, Укр. мат. журн. **80** (1998) (подано до друку).

МІЖНАРОДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЦЕНТР, ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ, ВУЛ. ТЕРЕЩЕНКІВСЬКА, 3, ГСП, КИЇВ-4, 252601, УКРАЇНА

МІЖНАРОДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЦЕНТР, ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ, ВУЛ. ТЕРЕЩЕНКІВСЬКА, 3, ГСП, КИЇВ-4, 252601, УКРАЇНА

Надійшла 10.06.1997