

УЗАГАЛЬНЕННЯ СИЛЬНОГО ПРИНЦИПУ ІНВАНІАНТНОСТІ ДЛЯ КРАТНИХ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ОБЛАСТІ ПРИТЯГАННЯ СТІЙКОГО ЗАКОУ

УДК 519.21

Н. М. ЗІНЧЕНКО

РЕЗЮМЕ. Досліджені достатні умови, що забезпечують можливість побудови на одному ймовірнісному просторі двох послідовностей незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\xi(\nu), \nu \in \mathbb{Z}_+^q\}$ та $\{w(\nu), \nu \in \mathbb{Z}_+^q\}$ з області притягання одного і того ж стійкого закону G_α так, щоб м.н.

$$\left| \sum_{\nu \leq n} \xi(\nu) - \sum_{\nu \leq n} w(\nu) \right| = o((n_1 \dots n_q)^{1/\alpha})$$

при $n = (n_1, \dots, n_q) \rightarrow \infty$.

ВСТУП

Відомо, що функція розподілу (ф.р.) $F(x)$ належить області нормального притягання стійкого закону ($F(x) \in DNG_{\alpha,\beta}$) тоді і тільки тоді, коли при $x > x_0 > 0$

$$1 - F(x) = c_1 x^{-\alpha} + d_1(x) x^{-\alpha}, F(-x) = c_2 x^{-\alpha} + d_2(x) x^{-\alpha}, \quad (1)$$

де $c_1, c_2 > 0$, $d_1(x) \rightarrow 0$ і $d_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Умова (1) є необхідною і достатньою для збіжності за розподілом до $G_{\alpha,\beta}$ лінійно нормованих сум незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.), при цьому нормуючи коефіцієнти дорівнюють $n^{-1/\alpha}$ [1]. В даній роботі розглянуто інший тип граничних теорем, так званий “сильний принцип інваріантності”, що пов’язує збіжність за розподілом та збіжність майже напевне (м.н.). Класичні роботи Б. В. Гнеденка і А. М. Колмогорова [1] та А. В. Скорохода [2] є ідейним підґрунтям цих досліджень, розпочатих автором у роботах [3, 4], використані також результати, отримані в [5–7].

1. Постановка задачі та основні позначення

Нехай $g_{\alpha,\beta}(u)$ — характеристична функція (х.ф.), а $G_{\alpha,\beta}(x)$ — відповідна ф.р. стійкого закону з параметрами $|\beta| \leq 1$, $\alpha \in (0, 2]$.

$$g_\alpha(u) = g_{\alpha,\beta}(u) = \exp\{-|u|^\alpha(1 - i\beta \operatorname{sign}(u)\omega(u, \alpha))\}, \quad (2)$$

де $\omega(\alpha, u) = \tan(\pi\alpha/2)$ для $\alpha \neq 1$ і $\omega(\alpha, u) = -(2/\pi) \ln |u|$ для $\alpha = 1$, якщо значення β несуттєве індекс β опускаємо. Вважаємо, що всі випадкові величини мають нульове

математичне сподівання, коли воно існує. Скрізь далі Z_+^q — множина всіх цілочислених додатних векторів в $\mathbf{R}^q$, операції $x \pm y$ та нерівності $x \leq y$ ($x < y$) в $\mathbf{R}^q$ розуміємо покоординатно, $x \rightarrow \infty$ означає, що всі $x_i \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, q$. Вживаємо також позначки $1 = (1, \dots, 1)$, $0 = (0, \dots, 0)$, $x \pm 1 = (x_1 \pm 1, \dots, x_q \pm 1)$, запис $f(x) \ll g(x)$ означає теж саме, що $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow \infty$; якщо не обумовлене протилежне, то $\|n\| = \prod_{i=1}^q n_i$ на відміну від евклідової норми $|n|$.

Для н.о.р.в.в. $\xi(\nu)$ з ф.р. $F(x)$, що залежать від мультиіндексів $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_q) \in Z_+^q$, позначимо

$$S(n) = S(n_1, \dots, n_q) = \sum_{\nu \leq n} \xi(\nu) = \sum_{\nu=1}^{n_1} \dots \sum_{\nu=q}^{n_q} \xi(\nu_1, \dots, \nu_q).$$

Нехай $B(n) = 0$ для $\alpha \neq 1$ і $B(n) = (2/\pi) \|n\| \ln \|n\|$ для $\alpha = 1$.

Зауважимо, що умова (1) є необхідною і достатньою для збіжності за розподілом нормованих і центрованих сум

$$\|n\|^{-1/\alpha} (S(n) - B(n)) \Rightarrow G_{\alpha, \beta} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В цьому випадку також вживаємо запис $\{\xi(\nu)\} \in DNG_{\alpha, \beta}$ і говоримо про належність н.о.р.в.в. області нормального притягання $G_{\alpha, \beta}$. Нагадаємо, що для $\{\xi(\nu)\} \in DNG_{\alpha, \beta}$ існують всі моменти порядку $p < \alpha$ і, таким чином, згідно з [7] виконується варіант закону великих чисел Марцінкевича у формі

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \|n\|^{-(1/\alpha + \varepsilon)} \|S(n)\| = 0 \right\} = 1 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Розглянемо н.о.р.в.в. $\{\xi(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ та $\{w(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ з відповідними ф.р. $F(x)$ та $Q(x)$, що належать області притягання одного і того ж стійкого закону $G_{\alpha, \beta}$. Нехай

$$S(n) = \sum_{\nu \leq n} \xi(\nu), \quad S^*(n) = \|n\|^{-1/\alpha} (S(n) - B(n)),$$

$$T(n) = \sum_{\nu \leq n} w(\nu), \quad T^*(n) = \|n\|^{-1/\alpha} (T(n) - B(n)),$$

$$f_n(u) = E \exp(iu S^*(n)), \quad \varrho_n(u) = E \exp(iu T^*(n)).$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. Якщо для деяких $C_1, C_2, r, \delta > 0$, $r/\delta \leq 3$

$$|f_n(u) - \varrho_n(u)| \leq C_1 \|n\|^{-r} \quad \text{для } |u| < C_2 \|n\|^\delta, \quad (5)$$

то $\{\xi(\nu)\}$ і $\{w(\nu)\}$ можна перевизначити на одному ймовірнісному просторі так, щоб м.н. при $n \rightarrow \infty$

$$|S(n) - T(n)| = o(\|n\|^{1/\alpha}). \quad (6)$$

Доведення теореми 1 проведемо в декілька етапів. По-перше, доведемо, що оцінки типу (6) виконуються для спеціального сімейства номерів $N = N_m = (N_{m_1}, \dots, N_{m_q})$. Для цього нам знадобиться ряд допоміжних тверджень.

2. ДОПОМІЖНІ АПРОКСИМАЦІЙНІ ТЕОРЕМИ

Лема 1. Нехай н.о.р.в.в. $\{\xi(\nu)\} \in DNG_{\alpha, \beta}$, $\alpha \in (0, 2]$, тоді $\forall \alpha' \in (0, \alpha)$

$$\sup_n E |S^*(n)|^{\alpha'} = c_0 = c_0(\alpha, \alpha') < \infty, \quad (7)$$

$$\lim_{\|n\| \rightarrow \infty} E |S^*(n)|^{\alpha'} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha'} dG_{\alpha}(x). \quad (8)$$

Лема 1 є простим наслідком теореми 1.6 [8], де твердження (7), (8) доведені для баналізованих випадкових величин.

З леми 1 негайно випливає, що для н.о.р.в.в. $\xi(\nu)$ з області притягання стійкого закону з параметром $\alpha \in (0, 2]$

$$P\{|S^*(n)| \geq x\} \leq \text{const } |x|^{-\alpha'} \quad \forall \alpha' \in (0, \alpha). \quad (9)$$

Нехай $N_{m_i} = \sum_{j=1}^{m_i} j^A$, $m_i \geq 1$, $i = 1, \dots, q$, де конкретне значення сталої $A > 1$ буде визначено пізніше. Покладемо $h_1 = 1$, $h_{m_i} = N_{m_i-1} + 1$, $m_i \geq 2$, $i = 1, \dots, q$ та визначимо по кожній осі масиви цілих чисел

$$H_{k_i} = \{\nu_i \text{ ціле: } h_{k_i} \leq \nu_i \leq N_{k_i}\}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (10)$$

Таким чином, $\text{card } H_{k_i} = k_i^A$, $h_{k_i+1} - h_{k_i} = k_i^A$ та для будь-якого $n \in H_{k_i}$

$$k_i^{A+1} \ll \sum_{1 \leq j \leq k_i-1} j^A \leq h_{k_i} \leq n \leq N_{k_i} \ll k_i^{A+1}. \quad (11)$$

Покладемо

$$h_k = (h_{k_1}, \dots, h_{k_q}), \quad N_k = (N_{k_1}, \dots, N_{k_q}), \quad (12)$$

$$H_k = \prod_{i=1}^q H_{k_i}, \quad U_k = \prod_{i=1}^q [h_{k_i}, h_{k_i+1})$$

Очевидно, що $\text{card } H_k = \mu(U_k) = \|k\|^A$, де $\mu(\cdot)$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^q$.

Теорема 2. За умови (5) н.о.р.в.в. $\{\xi(\nu)\}$ і $\{w(\nu)\}$ можна визначити на одному ймовірнісному просторі так, щоб м.н. при $m \rightarrow \infty$

$$|S(N_m) - T(N_m)| = o(\|n_m\|^{1/\alpha-\rho}) \quad \text{для деякого } \rho = \rho(\alpha, r) > 0. \quad (13)$$

Доведення. Покладемо в (10) $A = [20/r\alpha] + 1$ і розглянемо два сімейства незалежних випадкових величин $\{X(k), k \in Z_+^q\}$ та $\{Y(k), k \in Z_+^q\}$:

$$X_k = \|k\|^{-A/\alpha} \left(\sum_{\nu \in H_k} \xi(\nu) - B(k) \right), \quad Y_k = \|k\|^{-A/\alpha} \left(\sum_{\nu \in H_k} w(\nu) - B(k) \right). \quad (14)$$

Застосуємо до X_k та Y_k мультиіндексний аналог теореми 1 [6] (див. також [4]). Згідно з нею, за умов

$$|f_k(u) - \varrho_k(u)| \leq \lambda_k \quad \text{для } |u| < T_k, \quad T_k > 10^8, \quad (15)$$

$$P\{|Y_k| > T_k\} \leq \delta_k, \quad (16)$$

незалежні випадкові величини $\{X(k), k \in Z_+^q\}$ та $\{Y(k), k \in Z_+^q\}$ без зміни їх розподілів можна перевизначити на одному ймовірнісному просторі так, щоб

$$P\{|X_k - Y_k| > \gamma_k\} \leq \gamma_k, \quad (17)$$

де $\gamma_1 = 1$, $\gamma_k = 16T_k^{-1} \ln T_k + 4\lambda^{1/2}T_k + \delta_k$, $k \geq (2, \dots, 2)$. Покладемо

$$T_k = \text{const} \|k\|^{6/\alpha} \leq C_2 \|k\|^{A\delta}, \quad \lambda_k = C_1 \|k\|^{-Ar} \leq \text{const} \|k\|^{-20/\alpha}.$$

Легко бачити, що $T_k^{-1} \ln T_k \ll \|k\|^{-6/\alpha} \ln \|k\| \ll \|k\|^{-2}$, $\lambda_k^{1/2} T_k \ll \|k\|^{-10/\alpha} \|k\|^{6/\alpha} \ll \|k\|^{-2}$. Відповідну оцінку $\delta_k \ll T_k^{-\alpha/2} \ll \|k\|^{-3}$ дає лема 2 при $\alpha' = \alpha/2$. Таким чином, твердження (17), теорема Колмогорова і лема Бореля–Кантеллі дозволяють перевизначити $\{\sum_\nu \xi(\nu)\}$ та $\{\sum_\nu w(\nu)\}$ на одному ймовірнісному просторі так, щоб

$$|X_k - Y_k| \leq \gamma_k, \quad \text{де } \gamma_k \ll \|k\|^{-2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |S(N_m) - T(N_m)| &= \left| \sum_{k \leq m} \|k\|^{A/\alpha} (X_k - Y_k) \right| \ll \left| \sum_{k \leq m} \|k\|^{A/\alpha-2} \right| \ll \|m\|^{A/\alpha-1} \\ &\ll \|N_m\|^{(A\alpha-1)/(A+1)} \ll \|N_m\|^{1/\alpha-\tau}, \end{aligned}$$

де $\tau = (\alpha + 1)/\alpha(A + 1)$. Теорема доведена. $\square$

Оскільки для $n \in H_m$

$$|S(n) - T(n)| \leq |S(h_m) - T(h_m)| + \max_{n \in H_m} |S(n) - S(h_m)| + \max_{n \in H_m} |T(n) - T(h_m)|,$$

то наступним кроком у доведенні теореми 1 повинні стати оцінки зверху для флуктуацій сум $S(n)$ і $T(n)$.

3. ФЛУКТУАЦІЇ СУМ Н.О.Р.В.В. З ОБЛАСТІ ПРИТЯГАННЯ СТІЙКОГО ЗАКОНУ

В цьому розділі плідно використовуються нерівності для сум н.о.р.в.в. з мультиіндексами, отримані Бікелом і Вічурою в роботі [13], як узагальнення відповідних тверджень Біллінгслі [10] для сум одноіндексних випадкових величин. Позначимо

$$S_x^{(r)} = S(l_1, \dots, l_{r-1}, x, l_{r+1}, \dots, l_q), \quad x = 1, \dots, N_r, \quad r = 1, \dots, q,$$

$$\|S_x^{(r)} - S_y^{(r)}\|_{\max} = \max_{\substack{1 \leq l_i \leq N_{l_i}, \\ i=1, \dots, q, i \neq r}} |S_x^{(r)} - S_y^{(r)}|,$$

$$m_r(L_r, N_r; x, y, u) = \min \left\{ \|S_x^{(r)} - S_y^{(r)}\|_{\max}, \|S_y^{(r)} - S_u^{(r)}\|_{\max} \right\},$$

$$M'_r(L_r, N_r) = \max_{L_r \leq x \leq y \leq u \leq N_r} (L_r, N_r; x, y, u), \quad M'_r = M'_r(1, N_r),$$

$$M''([L, N]) = \max_{1 \leq r \leq q} M'_r(L_r, N_r), \quad M'' = \max_{1 \leq r \leq q} M'_r. \quad (18)$$

Лема 2 [13]. Для будь-яких випадкових величин $\xi(\nu)$, $\nu \in Z_+^q$, $q \geq 1$

$$\max_{1 \leq k \leq N} |S(k)| \leq |S(n)| + \sum_{r=1}^q M'_r \leq |S(n)| + qM'', \quad (19)$$

$$\max_{k \in [L, N]} |S(k)| \leq \left| \sum_{1 \leq \nu \leq N} \xi(\nu) \right| + \sum_{r=1}^q M'_r(L_r, N_r) \leq \left| \sum_{1 \leq \nu \leq N} \xi(\nu) \right| + qM''([L, N]). \quad (20)$$

Оцінити M'_r та M'' дає змогу наступна лема.

Лема 3 [13]. Якщо існують такі додатні $\gamma_1, \gamma_2, b_1, b_2, b = b_1 + b_2 > 1$, що

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{i \leq \nu \leq j} \xi(\nu) \right|^{\gamma_1} \sum_{l \leq \nu \leq N} \xi(\nu) \right|^{\gamma_2} \leq \text{const } \mu^{b_1}([i, j]) \mu^{b_2}([l, k]) \right) \quad (21)$$

для будь-яких q -вимірних інтервалів $[i, j]$ та $[l, k] \subset [L, N]$, які можуть перетинатися лише по граням, то

$$\mathbb{P}\{M'_r(L_r, N_r) \geq x\} \leq K_q x^{-\gamma} \mu^{b^*}([L, N]), \quad (22)$$

$$\mathbb{P}\{M''([L, N]) \geq x\} \leq K_q^* x^{-\gamma} \mu^{b^*}([L, N]), \quad (23)$$

де $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\mu(\cdot)$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^q$, константи $K_q = K_q(\gamma, b^*)$, $K_q^* = K_q^*(\gamma, b^*)$ залежать лише від q, γ, b^* .

Лемою 3 зручно користуватися у випадку н.о.р.в.в. з області притягання стійкого закону.

Лема 4. Якщо $\alpha/2 < p < \alpha$, то для н.о.р.в.в. $\{\xi(\nu)\} \in DNG_{\alpha, \beta}$, $\alpha \in (0, 2]$,

$$\mathbb{P}\{M'_r(L_r, N_r) \geq x\} \leq K_q x^{-2p} \|N - L\|^{2b}, \quad (24)$$

$$\mathbb{P}\{M''([L, N]) \geq x\} \leq K_q^* x^{-2p} \|N - L\|^{2b}, \quad (25)$$

де $b = p/\alpha$ для $\alpha \neq 1$ і $b = p + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ для $\alpha = 1$.

Доведення. В силу незалежності і однакового розподілу доданків при перевірці умови (21) з $\gamma_1 = \gamma_2 = p$, $b_1 = b_2 = p$ при $\alpha \neq 1$ досить оцінити зверху

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i \leq \nu \leq j} \xi(\nu) \right|^p \right) &= \mathbb{E} |S(j - i)|^p = \|j - i\|^{p/\alpha} \mathbb{E} (\|j - i\|^{-1/\alpha} |S(j - i)|)^p \\ &\leq c_0 \|j - i\|^{p/\alpha}, \end{aligned} \quad (26)$$

де остання нерівність в (26) випливає з леми 1, $c_0 = \sup_n \mathbb{E} S^*(n)^p < \infty$. Єдина відмінність випадку $\alpha = 1$ полягає в тому, що для $p \in (\frac{1}{2}, 2)$ і $\varepsilon_1 > 0$, як завгодно близького до 0, $\forall n \in \mathbb{Z}_+^q$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |S(n)|^p &= \mathbb{E} \left| \frac{S(n) - (2/\pi) \|n\| \ln \|n\|}{\|n\|} + \frac{2}{\pi} \beta \ln \|n\| \right|^p \|n\|^p \\ &\ll \|n\|^p \mathbb{E} |S^*(n)|^p + \|n\|^p \ln^p \|n\| \ll \|n\|^{p+\varepsilon_1}. \quad \square \end{aligned}$$

Лема 5. Для $\{\xi(\nu)\} \in DNG_{\alpha, \beta}$, $\alpha \in (0, 2]$, з ймовірністю 1 при $t \rightarrow \infty$

$$M''(H_m) = o \left(\|h_m\|^{1/\alpha - \rho_1} \right) \quad \text{для деякого } \rho_1 > 0. \quad (27)$$

Доведення. За допомогою леми 4 та співвідношення (11) оцінимо зверху ймовірність

$$P_m = \mathbb{P} \left\{ M''(H_m) > c \|h_m\|^{1/\alpha - \rho_1} \right\}$$

Оскільки $\|h_{m-1} - h_m\| = \|m\|^A$, то при $\alpha \neq 1$ одержимо, що

$$\begin{aligned} P_m &\ll \|h_m\|^{(1/\alpha - \rho)2p} \|h_{m-1} - h_m\|^{2p/\alpha} \ll \|m\|^{-2p(A+1)(1/\alpha - \rho)} \|m\|^{2pA/\alpha} \\ &\ll \|m\|^{-(2p/\alpha - 2p(A+1) - \rho_1)} \end{aligned}$$

для будь-якого $c > 0$. За рахунок вибору p близьким до α , а ρ_1 досить малим, наприклад, $p = \frac{3}{4}\alpha$, $\rho_1 = \frac{1}{4}\alpha(A+1)$ можна досягти того, щоб $(2p/\alpha - 2p(A+1) - \rho_1) > 1 + \eta$

для деякого $\eta > 0$. Тоді $\sum_m P_m < \infty$, і за левою Бореля–Кантеллі отримаємо шукане співвідношення (27). В свою чергу при $\alpha = 1$ для будь-яких $p \in (1, 2)$ та $\varepsilon_1 > 0$, $c > 0$

$$P_m \ll \|m\|^{-(2p-2p(A+1)\rho_1-2pA\varepsilon_1)}.$$

Тоді за рахунок вибору p , ρ_1 та $\varepsilon_1 > 0$, також можна досягти збіжності $\sum_m P_m < \infty$, що і дає (27). $\square$

Лема 6. Якщо н.о.р.в.в. $\{\xi(\nu)\} \in DNG_{\alpha,\beta}$, то для деякого $\rho^* \in (0, 1/\alpha(A+1))$

$$\Theta_m = \max_{n \in H_m} \left| \sum_{h_m \leq \nu \leq n} \xi(\nu) \right| = o\left(\|h_m\|^{(1/\alpha-\rho^*)}\right) \quad \text{м.н.} \quad (28)$$

Доведення. Згідно з нерівністю (20)

$$\Theta_m \leq \left| \sum_{h_m \leq \nu \leq h_{m+1}} \xi(\nu) \right| + qM''(H_m), \quad (29)$$

де $M''(H_m) = o(\|h_m\|^{(1/\alpha-\rho_1^*)})$, за левою 5. Що стосується першої суми в правій частині (28), то, як і в (4), маємо

$$\left| \sum_{h_m \leq \nu \leq h_{m+1}} \xi(\nu) \right| \|h_{m+1} - h_m\|^{-1/\alpha+\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } m \rightarrow \infty \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (30)$$

Оскільки ε може приймати довільні додатні значення, а $\|m\| \ll \|h_m\|^{1/(A+1)}$, то для $\rho_2 \in (0, 1/\alpha(A+1))$ маємо $\|h_{m+1} - h_m\|^{1/\alpha+\varepsilon} \ll \|h_m\|^{A(1/\alpha+\varepsilon)/(A+1)} \ll \|h_m\|^{A(1/\alpha-\rho_2)}$, як тільки $0 < \varepsilon < 1/\alpha A - \rho_2(A+1)/A$.

Отже, з ймовірністю 1 при $m \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{h_m \leq \nu \leq h_{m+1}} \xi(\nu) \right| = o\left(\|h_m\|^{(1/\alpha-\rho_2)}\right) \quad \forall \rho_2 \in (0, 1/\alpha(A+1))$$

звідки і випливає (29) з $\rho^* = \min(\rho_1, 1/\alpha(A+1))$. $\square$

Лема 7. Нехай $\{\xi(\nu_1), \xi(\nu_2)\}$ — н.о.р.в.в., що належать області нормального притягання стійкого закону $G_{\alpha,\beta}$. Тоді з ймовірністю 1 для будь-якого цілого $L > 0$ при $m_1 \rightarrow \infty$

$$\max_{n_1 \in H_{m_1}} \left| \sum_{\nu_1=h_{m_1}}^{n_1} L^{-1/\alpha} \left(\sum_{\nu_2=1}^L \xi(\nu_1, \nu_2) - b(L) \right) \right| = o\left(\|h_{m_1}\|^{1/\alpha}\right),$$

де $b(x) = 0$ для $\alpha \neq 1$ і $b(x) = (2/\pi)\beta x \ln|x|$ для $\alpha = 1$.

Доведення. Позначимо $\tau_{\nu_1} = \tau_{\nu_1}^{(L)} = L^{-1/\alpha}(\sum_{\nu_2=1}^L \xi(\nu_1, \nu_2) - b(L))$. Для довільного, але фіксованого $L > 1$, випадкові величини $\{\tau_{\nu_1}, \nu_1 \geq 1\}$ незалежні, однаково розподілені і їх нормовані суми $n^{-1/\alpha}(\sum_{1 \leq \nu_1 \leq n} \tau_{\nu_1} - b(n))$, також слабо збігаються до G_α . Зауважимо, що при $\alpha = 1$

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{1 \leq \nu_1 \leq n} \tau_{\nu_1} - b(n) \right) = \frac{1}{nL} \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^L \xi(\nu_1, \nu_2) - \frac{2}{\pi} \beta \ln nL.$$

Отже, до послідовності сум н.о.р.в.в. $\{\tau_{\nu_1}\}$ можна застосувати лему 6 з $q = 1$ і одержати шукане $\max_{n_1 \in H_{m_1}} \left| \sum_{\nu_1=h_{m_1}}^{n_1} \tau_{\nu_1} \right| = o(\|h_{m_1}\|^{1/\alpha})$ м.н. при $m_1 \rightarrow \infty$. $\square$

Лема 8. Нехай $B(h_m) = b(\|h_m\|)$, тоді для $\{\xi(\nu)\} \in DNG_\alpha$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|h_m\|^{-1/\alpha} \max_{n \in H_m} |S(n) - S(h_m) - B(h_m)| = 0 \quad \text{м.н.} \quad (31)$$

Доведення. Розглянемо спочатку $q = 2$. Позначимо

$$S^{(1)}(n_1) = \sum_{\nu_1=h_{m_1}}^{n_1} \sum_{\nu_2=1}^{h_{m_2}} \xi(\nu_1, \nu_2), \quad S^{(2)}(n_2) = \sum_{\nu_2=h_{m_2}}^{n_2} \sum_{\nu_1=1}^{h_{m_1}} \xi(\nu_1, \nu_2),$$

$$S^{(0)}(n) = \sum_{h_{m_1} \leq \nu_1 \leq n_1} \sum_{h_{m_2} \leq \nu_2 \leq n_2} \xi(\nu_1, \nu_2).$$

Звернемо, що для $\alpha \neq 1$

$$\max_{n \in H_m} |S(n) - S(h_m)| \leq \max_{n \in H_m} |S^{(0)}(n)| = \max_{n_1 \in H_{m_1}} |S^{(1)}(n_1)| + \max_{n_2 \in H_{m_2}} |S^{(2)}(n_2)|.$$

З лем 7 випливає, що для довільного $\delta > 0$ з ймовірністю 1 для $m' > m'_1$

$$\max_{n_1 \in H_{m_1}} |S^{(1)}(n_1)| \leq (\delta/3)(h_{m_1}h_{m_2})^{1/\alpha} \quad \text{для всіх } m_2 > 1,$$

$$\max_{n_2 \in H_{m_2}} |S^{(2)}(n_2)| \leq (\delta/3)(h_{m_1}h_{m_2})^{1/\alpha} \quad \text{для } m_2 > m'_2, m_1 \geq 1.$$

Крім того за лемою 6 з ймовірністю 1 для $m_1, m_2 > m_0$

$$\max_{n \in H_m} |S^{(0)}(n)| \leq (\delta/3)(h_{m_1}h_{m_2})^{1/\alpha}.$$

Таким чином, м.н. $\max_{n \in H_m} |S(n) - S(h_m)| \leq (\delta/3)(h_{m_1}h_{m_2})^{1/\alpha}$, як тільки $m_1, m_2 > \max(m_0, m'_1, m'_2)$.

Для $\alpha = 1$, $n \in H_m$ маємо

$$\max_{n \in H_m} |S(n) - S(h_m) - (2/\pi)\beta h_{m_1}h_{m_2} \ln \|h_m\|| \leq |S^{(0)}| + |\kappa(n_1)| + |\kappa(n_2)|,$$

$$\kappa(n_1) = S^{(1)}(n_1) - \frac{2}{\pi}\beta(n_1 - h_{m_1})h_{m_2} \ln h_{m_2} = \sum_{\nu_1=h_{m_1}}^{n_1} \left(\sum_{\nu_2=1}^{h_{m_2}} \xi(\nu_1, \nu_2) - b(h_{m_2}) \right),$$

$$\kappa(n_2) = S^{(2)}(n_2) - \frac{2}{\pi}\beta(n_2 - h_{m_2})h_{m_1} \ln h_{m_1} = \sum_{\nu_2=h_{m_2}}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{h_{m_1}} \xi(\nu_1, \nu_2) - b(h_{m_1}) \right),$$

Застосування лем 7 з $\alpha = 1$, дає

$$\max_{n_1 \in H_{m_1}} \kappa(n_1) = o(h_{m_1}h_{m_2}), \quad \max_{n_2 \in H_{m_2}} \kappa(n_2) = o(h_{m_1}h_{m_2}),$$

звідки і випливає (31).

При $q = 3$

$$\max_{n \in H_m} |S(n) - S(h_m) - B(h_m)| = \max_{n \in H_m} \left| \sum_{h_m \leq \nu \leq n} \xi(\nu) \right| + T_1 + \dots + T_6,$$

де перший член є $o(\|h_m\|^{1/\alpha})$ за лемою 6, а T_i , $i = 1, \dots, 6$ можна трактувати фактично, як максимуми сум по одному чи по двох індексах, для яких співвідношення (31)

вже доведена. Аналогічні міркування дозволяють впевнитися у справедливості (31) для будь-якого $q \geq 3$. $\square$

Для завершення доведення теореми 1 тепер досить скористатися теоремою 2 і оцінками з леми 8. Так, наприклад, якщо $\alpha = 1$, то для $n \in H_m$ маємо

$$|S(n) - T(n)| \leq |S(h_m) - T(h_m)| + \max_{n \in H_m} \left| S(n) - S(h_m) - \frac{2}{\pi} \beta \|h_m\| \ln \|h_m\| \right| + \max_{n \in H_m} \left| T(n) - T(h_m) - \frac{2}{\pi} \beta \|h_m\| \ln \|h_m\| \right|,$$

де кожен з трьох доданків в правій частині нерівності є $o(\|n\|)$.

4. НАСЛІДКИ

Якщо $\{w(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ — н.о.р.в.в. зі стійким розподілом G_α , то $T^*(n)$ має той же розподіл, що і $w(1)$, тобто G_α , і х.ф. $\varrho_n(u) = g_\alpha(u)$. Тоді умова (2) набирає вигляду

$$|f_n(u) - g_\alpha(u)| \leq C_1 \|n\|^r \quad \text{для } |u| < C_2 \|n\|^\delta. \quad (32)$$

Наведемо декілька випадків, коли виконується (32).

4.1. Існування псевдомоментів порядку $l > \alpha$. Позначимо

$$v(l) = \int_{-\infty}^{\infty} x^l d(F(x) - G_{\alpha,\beta}(x))$$

псевдомомент порядку l ,

$$\vartheta(l) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^l d(F(x) - G_{\alpha,\beta}(x))$$

абсолютний псевдомомент порядку l .

Згідно з [11], якщо для деякого $l > \alpha$

$$\vartheta(l) < \infty \quad \text{та} \quad v(m) = 0, \quad m = 0, \dots, [l], \quad (33)$$

то $|f_n(u) - g_\alpha(u)| \leq C_1 \|n\|^{-(l-\alpha)/\alpha} |u|^l \exp(-|u|^\alpha/2)$ для $|u| < C_2 \|n\|^{(l-\alpha)/\alpha}$, де C_1, C_2 залежать лише від l, α і $v(l)$. Отже, за умови (33) автоматично виконується (32) з $r = d = (l - \alpha)/\alpha$ і справедлива теорема 1.

4.2. Умови на характеристичну функцію.

Лема 9 12. Нехай $\{\xi(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ — н.о.р.в.в. з х.ф. $f(u)$. Якщо для деяких $a_1, a_2 > 0$ та $l > \alpha$

$$|f(u) - g_\alpha(u)| \leq a_2 |u|^l \quad \text{коли } |u| < a_1, \quad (34)$$

то для всіх $n \in Z_+^q$ та $|u| < C_3 \|n\|$

$$|f_n(u) - g_\alpha(u)| \leq C_4 \|n\|^{-(l-\alpha)/\alpha} |u|^l \exp(-C_5 |u|^\alpha),$$

де $C_i, i = 3, 4, 5$ залежать лише від α, l, a_1, a_2, q .

Таким чином, при виконанні (34) знову має місце (32) з $\delta = 1/\alpha$ та $r = (l - \alpha)/\alpha$.

Наслідок 1 (Сильний принцип інваріантності для кратних сум). При виконанні умови (33) або (34) на одному ймовірнісному просторі можна визначити н.о.р.в. $\{\xi(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ з ф.р. $F(x)$ і х.ф. $f(u)$ та послідовність н.о.р. стійких випадкових величин $\{\eta(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ з розподілом $G_{\alpha, \beta}$, так, щоб м.н.

$$\left| \sum_{\nu \leq n} \xi(\nu) - \sum_{\nu \leq n} \eta(\nu) \right| = o\left(\|n\|^{1/\alpha}\right)$$

4.1. Умови на ф.р. Симетричні доданки.

Лема 10 [5]. Нехай $F(x)$ та $F_1(x)$ — симетричні ф.р. такі, що при $x \geq x_0$

$$1 - F(x) = cx^{-\alpha} + d(x)x^{-\alpha}, \quad 1 - F_1(x) = d(x)x^{-\alpha},$$

де $c > 0, 0 < \alpha < 2, d(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow \infty$, та $d(x)x^{-\alpha}$ спадає при $x \geq x_0$. Якщо

$$f(u) = \int \exp(iux) dF(x), \quad f_1(u) = \int \exp(iux) dF_1(x),$$

то має місце таке $\delta = \delta(\alpha) > 0$, що для $|u| \leq \|n\|^\delta$

$$f^{\|n\|}(\|n\|^\alpha u) = \exp(-c^*|u|^\alpha) f_1^{\|n\|}(\|n\|^\alpha u) + o(\|n\|^\delta),$$

$$c^* = 2c \int_0^\infty y^{-\alpha} \sin y dy.$$

Для $q = 1$ це твердження доведено в роботі [5], оскільки доведення використовує лише аналітичні властивості функцій $f(u)$ і $f_1(u)$, то воно залишається вірним і при $q \geq 2$.

Наслідок 2. Нехай:

1. $\{\xi(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ — н.о.р.в.в. з симетричною ф.р. $F(x)$, що задовольняє всім умовам леми 10;
2. $\{\eta(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ — незалежні симетричні стійкі випадкові величини з х.ф. $g_\alpha = \exp(-c^*|u|^\alpha)$, $c^* = 2c \int_0^\infty y^{-\alpha} \sin y dy$;
3. $\{z(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ — незалежні від $\{\eta(\nu), \nu \in Z_+^q\}$ та незалежні між собою однаково розподілені випадкові величини з симетричною ф.р., для якої

$$1 - F_1(x) = d(x)x^{-\alpha}, \quad x > x_0.$$

Тоді всі три сімейства н.о.р.в. можна визначити на одному ймовірнісному просторі так, щоб

$$\left| \sum_{\nu \leq n} \xi(\nu) - \sum_{\nu \leq n} (\eta(\nu) + z(\nu)) \right| = o\left(\|n\|^{1/\alpha}\right).$$

У випадку $q = 1$ похибку апроксимації можна поліпшити до $o(n^{1/\alpha-\tau})$, $\tau > 0$ [5], але для $q > 1$ цього не вдається досягти.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, "Гостехиздат", Москва-Ленинград, 1949.
2. А. В. Скороход, *Исследование по теории случайных процессов*, Изд-во КГУ, Киев, 1961.
3. Н. М. Зинченко, *Сильный принцип инвариантности для сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона*, Теория вероятн. и ее примен. **30** (1985), № 1, 131-135.

4. —, Сильный принцип инвариантности для кратных сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона, Теория вероятностей и мат. статистика 36 (1988), 62–75.
5. I. Berkes, H. Dahling, D. Dobrovski, and W. Philipp, A strong approximation theorem for sums of random vectors in domain of attraction to a stable law, Acta Math. Hung. 48 (1986), № 1–2, 161–172.
6. I. Berkes and H. Dehling, Almost sure and weak invariance principle for random variables attracted by a stable law Jour Probab. Theory and Related Fields 38 (1989), № 3, 331–353.
7. I. Berkes and W. Philipp, Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors, Annals of Probab. 7 (1979), № 1, 29–54.
8. A. de Acosta and E. Gine, Convergence of measures and related functions in general central limit theorem in Banach spaces, Z. Wahrchein. und verw. Geb. 48 (1979), № 3, 213–231.
9. A. Gut, Marcinkievich laws and convergence rate in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices, Annals of Probab. 6 (1978), № 3, 469–482.
10. П. Биллингсли, Сходимость вероятностных мер, "Наука", Москва, 1977.
11. И. И. Банис, Н. Б. Калинаускайте, П. С. Вайткус, О скорости сходимости к устойчивым распределениям в локальной предельной теореме, Лит. мат. сб. 11 (1971), № 3, 171–180.
12. В. Паулаускас, Оценки остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона, Лит. мат. сб. 14 (1974), № 1, 165–187.
13. P. Bickel and M. Wichura, Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications, Ann. Math. Stat. 42 (1971), 1656–1670.

252022 КИЇВ, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Надійшла 19.02.97