Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 58, 1998, стор. 139–148

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 58, 1998, pp. 139–148

КАНТОРОВІСТЬ І ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, Q-ЗНАКИ ЯКИХ УТВОРЮЮТЬ ОДНОРІДНИЙ ЛАНЦЮГ МАРКОВА

УДК 519.21

М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ

РЕЗЮМЕ. Розглядається випадкова величина, Q-знаки (узагальнення n-адичних цифр) якої утворюють однорідний ланцюг Маркова. Досліджується структура її розподілу (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент), вивчаються фрактальні властивості спектра.

Надалі під записом $x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$ будемо розуміти Q-зображення числа $x \in [0;1]$ (див. [1]), тобто

$$x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} = a_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[a_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right],$$

де $0 < q_i \in Q = \{q_0, \ldots, q_{n-1}\}$, $n \geq 2$ — фіксоване натуральне число,

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_i = 1, \qquad a_0 = 0, \qquad a_k = \sum_{i=0}^{k-1} q_i,$$

$N_{n-1}^0 = \{0, 1, \ldots, n-1\} \ni \alpha_k = \alpha_k(x)$ — k-ий Q-знак ("цифра") точки x.

Зауважимо, що при $q_0 = q_1 = \cdots = q_{n-1} = n^{-1}$ Q-зображення є n-адичних розкладом і представлення (5.28) [1, с. 153] функції розподілу в.в. з незалежними однаково розподіленими n-адичними цифрами є її Q-розкладом при $p_i = q_i$. Кожен з відрізків

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \left[\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(0)}; \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k((n-1))}\right], \qquad \alpha_i \in N_{n-1}^0,$$

називатимемо відрізком k-го рангу, а інтервалом k-го рангу — інтервал з тими ж кінцями. Останній позначатимемо $\nabla_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$. Деякі точки $[0;1]$ мають по два різних Q-зображення. Дійсно, $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k 00\ldots} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}(\alpha_k-1)(n-1)(n-1)\ldots}$. Домовимось їх називати Q-раціональними (решта — Q-ірраціональними) і при цьому не використовувати те зображення, яке містить період $(n-1)$. Після цієї домовленості кожна точка відрізка $[0;1]$ має єдине Q-зображення.

Розглянемо випадкову величину (в.в.)

$$\xi = \xi\left(\|p_{ik}\|\right) = \Delta_{\eta_1\ldots\eta_k\ldots},$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60J10.

Q-знаки η_k якої утворюють однорідний ланцюг Маркова $\{\eta_k\}$ з початковими ймовірностями $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ ($p_i > 0$) і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ ($p_{ik} \geq 0$), $i, k \in N^0_{n-1}$. Випадок $p_{ik} > 0$ $\forall i, k \in N^0_{n-1}$ вивчався в [2].

Функція розподілу (ф.р.) $F(x)$ в.в. ξ записується у вигляді

$$F(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + p_{\alpha_1(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)} \right],$$

де

$$\beta_{\alpha_1(x)} = \sum_{i=0}^{\alpha_1(x)-1} p_i, \qquad \beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} = \sum_{j=0}^{\alpha_{k+1}(x)-1} p_{\alpha_k(x)j}.$$

Лема 1. *Спектром S_ξ розподілу в.в. ξ є множина*

$$A = \left\{ x \colon x \in [0;1],\, p_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} > 0 \ \forall k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Наслідок. *Якщо всі елементи матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ додатні, то ф.р. $F(x)$ в.в. ξ є строго зростаючою на $[0;1]$. Якщо ж $p_{\tau s} = 0$, то $F(x)$ є постійною на кожному з інтервалів $\nabla_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \tau s}$.*

Легко бачити, що розподіл в.в. ξ не завжди чистий. Наприклад, при $p_{11} = 1$ і $p_{ik} > 0$ для $1 < i$, $k \in N^0_{n-1}$, кожна точка $x_m = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_m(1)}$ є атомом розподілу ξ і разом з цим він має ненульову неперервну компоненту, оскільки

$$\mathsf{P}\{\xi \in C\} > 0, \qquad C = \{x \colon \alpha_k(x) > 1 \ \forall k \in \mathbf{N}\}.$$

Лема 2. *Розподіл в.в. ξ матиме атоми тоді і тільки тоді, коли існує набір Q-знаків $i_1, \ldots, i_m$, ($i_j \in N^0_{n-1}$), такий, що*

$$p_{i_m i_1} \prod_{j=1}^{m-1} p_{i_j i_{j+1}} = 1. \tag{1}$$

Доведення. Стрибок σ_x ф.р. $F(x)$ в.в. ξ в точці $x \in [0;1]$ рівний

$$\sigma_x = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(x+\varepsilon) - F(x)] = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}\left\{\xi \in \nabla_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}\right\} = p_{\alpha_1(x)} \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)}$$
$$= p_{\alpha_1(x)} \prod_{j=1}^{\infty} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)}. \tag{2}$$

Тому x є атомом тоді і тільки тоді, коли останній добуток збігається, а це можливо лише тоді, коли всі його члени, починаючи з деякого k_0, рівні одиниці, тобто

$$p_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} = 1$$

для $k \geq k_0$, оскільки в Q-зображенні символів скінченне число і ланцюг Маркова однорідний.

Нехай x — атом розподілу. Очевидно, що існує символ, який в Q-зображенні x зустрічається нескінченну кількість разів. Позначимо його через i_1. Нехай

$$\alpha_k(x) = i_1, \qquad k \geq k_0 = \min\left\{j \colon p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)} = 1\right\},$$
$$\alpha_{k+m-1}(x) = i_1, \qquad m = \min\left\{j \colon \alpha_{k+j}(x) = i_1\right\}.$$

Позначивши $\alpha_{k+j}(x) = i_j$, $j = 1, \ldots, m-1$, матимемо (1).

Нехай тепер має місце (1). Розглянемо точку $x' = \Delta_{(i_1 \ldots i_m)}$. Згідно з (2)

$$\sigma_{x'} = p_{i_1} \lim_{k\to\infty} \left[p_{i_m i_1} \prod_{j=1}^{m-1} p_{i_j i_{j+1}} = \right]^k = p_{i_1} > 0,$$

тобто x' є атомом. Лема 2 доведена. □

Лема 3. *Для того щоб спектр S_ξ розподілу в.в. ξ мав нульову міру Лебега, необхідно і достатньо, щоб матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ мала по меншій мірі один нуль.*

Доведення. Необхідність випливає з наслідка леми 1.

Достатність, як легко бачити, досить довести для випадку, коли матриця $\|p_{ik}\|$ має лише один нуль, нехай $p_{\tau s} = 0$.

Позначимо через E_k об'єднання відрізків k-го рангу, внутрішні точки яких належать спектру S_ξ, а через F_k — об'єднання інтервалів k-го рангу, які мають порожній переріз з S_ξ, але містяться у відрізках $(k-1)$-го рангу, що належать E_{k-1}. Тоді

$$S_\xi \subset E_{k+1} \subset E_k, \qquad S_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad E_{k-1} = E_k \cup F_k, \qquad E_k \cap F_k = \varnothing$$

і

$$\lambda(S_\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k).$$

Оскільки $p_i > 0$ для $\forall i \in N$, то $F_1 = \varnothing$, $E_1 = [0;1]$ і $\lambda(F_1) = 0$, $\lambda(E_1) = 1$.

$$F_2 = \nabla_{\tau s}, \quad E_2 = [0;1] \setminus \nabla_{\tau s}.$$

Тому

$$\lambda(F_2) = q_\tau q_s, \qquad \lambda(E_2) = \lambda(E_1) - \lambda(F_2) = 1 - q_{\tau s}.$$

Можливі випадки: 1. $\tau \neq s$; 2. $\tau = s$.

1. Нехай $\tau \neq s$. Тоді

$$\lambda(F_k) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{k-2} \\ i_j i_{j+1} \neq \tau s}} \left| \Delta_{i_1 \ldots i_{k-2} \tau s} \right| = q_\tau q_s \lambda(E_{k-2}),$$

де сумування ведеться за всеможливими наборами $(i_1, \ldots, i_{k-2})$, такими, що

$$(i_j, i_{j+1}) \neq (\tau, s) \quad \forall j = 1, \ldots, k-3.$$

Далі,

$$\lambda(S_\xi) < \lambda(E_k) = \lambda(E_{k-1}) - \lambda(F_k) = \lambda(E_{k-1}) - q_\tau q_s \lambda(E_{k-2}),$$

$$1 = \frac{\lambda(E_{k-1})}{\lambda(E_k)} - q_\tau q_s \frac{\lambda(E_{k-2})}{\lambda(E_k)} \quad \forall k \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Тоді

$$\lambda(S_\xi) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) = 0,$$

оскільки в протилежному випадку, тобто при

$$0 < \lambda(S_\xi) < \infty,$$

із (3) матимемо $1 = 1 - q_\tau q_s$, що суперечить нерівності $q_\tau q_s > 0$.

2. Якщо $\tau = s$, то

$$\lambda(F_k) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{k-2}\\ i_j i_{j+1}\neq\tau\tau,\, i_{k-2}\neq\tau}} \left|\Delta_{i_1\ldots i_{k-2}\tau s}\right| = q_\tau^2\lambda(E_{k-2}) - q_\tau^3\lambda(E_{k-3}),$$

де сумування ведеться за всеможливими наборами $(i_1,\ldots,i_{k-2})$, такими, що

$$(i_j, i_{j+1}) \neq (\tau,\tau) \quad \text{і} \quad i_{k-2}\neq\tau.$$

Аналогічно до пункту 1

$$\lambda(S_\xi) < \lambda(E_k) = \lambda(E_{k-1}) - \lambda(F_k) = \lambda(E_{k-1}) - q_\tau^2\lambda(E_{k-2}) + q_\tau^3\lambda(E_{k-3}),$$

$$1 = \frac{\lambda(E_{k-1})}{\lambda(E_k)} - q_\tau^2\frac{\lambda(E_{k-2})}{\lambda(E_k)} + q_\tau^3\frac{\lambda(E_{k-3})}{\lambda(E_k)} \quad \forall k\in\mathbf{N}. \tag{4}$$

Якщо припустити, що

$$0 < \lambda(S_\xi) < \infty,$$

то з (4) матимемо

$$1 = 1 - q_\tau^2 + q_\tau^3 \Leftrightarrow q_\tau^2(1-q_\tau) = 0,$$

що суперечить $0 < q_\tau < 1$. Отже, $\lambda(S_\xi) = \lim_{k\to\infty}\lambda(E_k) = 0$. Лема 3 доведена. □

Наслідок 1. *Необхідною умовою фрактальності* [1] *спектра є наявність у матриці* $\|p_{ik}\|$ *по меншій мірі одного нуля.*

Наслідок 2. *Якщо матриця перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *має принаймні один нуль, то розподіл в.в.* ξ *не містить абсолютно неперервної компоненти, а у випадку відсутності атомів має сингулярний розподіл канторівського типу* [3].

Наслідок 3. *Якщо розподіл в.в.* ξ *має атоми, то він не містить абсолютно неперервної компоненти.*

Теорема 1. *Розподіл в.в.* ξ *є сингулярним розподілом канторівського типу тоді і тільки тоді, коли він є неперервним і матриця перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *містить по меншій мірі один нуль.*

Теорема 1 є наслідком лем 2 і 3.

Займемося вивченням метричних властивостей спектра розподілу в.в. ξ при наявності у матриці перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ нулів. Нагадаємо, що множина E метричного простору (M,ρ) називається [1] *фрактальною (фракталом)*, якщо її розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(E)$ є дробовим числом.

Непорожня обмежена множина $E\subset M$ називається *самоподібною (СП-множиною)*, якщо

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & E = E_1\cup\cdots\cup E_n;\ n>1; \\ 2) & E_i \overset{k_i}{\sim} E \quad (i=1,\ldots,n); \\ 3) & \alpha_0(E_i\cap E_j) < \alpha_0(E), \forall i\neq j; \end{array}\right\} \tag{5}$$

тобто множина E — самоподібна, якщо вона представляється у вигляді скінченного об'єднання своїх підмножин E_i, які подібні E (взагалі кажучи, кожна зі своїм коефіцієнтом подібності k_i), причому розмірність Хаусдорфа–Безиковича перерізу довільних двох таких підмножин менша, ніж розмірність самої множини E. Остання властивість означає, що переріз $E_i\cap E_j$ "малий" в порівнянні з E.

Додатне число α_s, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + \cdots + k_n^x = 1,$$

називається *самоподібною розмірністю (СП-розмірністю)* самоподібної множини E, для якої має місце (5).

Як відомо [1], для обмежених замкнених СП-множин СП-розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(E)$.

Якщо $E \subset M$ можна представити у вигляді об'єднання скінченного числа множин:

$$E = E_1 \cup \cdots \cup E_m \cup \cdots \cup E_n,$$

таких, що

1) $E_i \overset{k_i}{\sim} E$, $i = 1, \ldots, m$; $0 \leq m \leq n$;
2) E_j — *СП-множина* , $j = m+1, \ldots, n$, то вона називається [1] *генетично самоподібною (ГСП-множиною).*

Очевидно, що при $m = n$ ГСП-множина є СП-множиною. Якщо $m = 0$, то ГСП-множина буде складатись з скінченного числа СП-множин і називатися *кусково самоподібною.*

Обмежену множину $E \subset M$ називатимемо [1] *N-самоподібною* (скорочено: *N-СП-множиною*), якщо

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & E = E_1 \cup \cdots \cup E_j \cup \ldots; \\ 2) & E_j \overset{k_j}{\sim} E, \quad j = 1, 2, \ldots; \\ 3) & \alpha_0(E_i \cap E_j) < \alpha_0(E), \quad i \neq j. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Очевидно, що N-СП-множина відрізняється від СП-множини лише тим, що перша складається з нескінченного числа множин, подібних їй самій, а остання — скінченного.

Число $\alpha_{NS} = \alpha_{NS}(E)$, яке є розв'язком рівняння

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_j^x = 1,$$

називається *N-самоподібною розмірністю* множини E, для якої має місце (6).

Відомо, що для замкненої N-СП-множини $E \subset \mathbf{R}^n$ її N-самоподібна розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа–Безиковича.

Множина називається *майже самоподібною*, якщо в неї існує самоподібна підмножина $\tilde{E}$ така, що $\alpha_0(E \setminus \tilde{E}) < \alpha_0(E)$, зокрема $E \setminus \tilde{E}$ — не більш ніж зчисленна множина. Очевидно, що $\alpha_0(E) = \alpha_0(\tilde{E})$.

Займемося вивченням самоподібних (а отже, і фрактальних) властивостей спектра розподілу в.в. ξ для випадку, коли матриця перехідних ймовірностей має принаймні один нуль.

Введемо позначення

$$\triangle'_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \triangle_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \cap S_\xi.$$

Теорема 2. *Якщо $n = |Q| = 2$ і матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить:*

1) *більше одного нуля, то ξ має дискретний розподіл з двома атомами;*
2) *тільки один нуль, то ξ має:*
   a) *дискретний розподіл з зчисленною множиною атомів, якщо*

   $$p_{\nu_0} \cdot p_{\nu_1} > 0$$

   для деякого ν;
   b) *сингулярний розподіл канторівського типу в протилежному випадку, тобто коли $p_{\nu\nu} = 0$ для деякого $\nu \in \{0; 1\}$. В цьому випадку*

спектр S_ξ розподілу в.в. ξ є самоподібною фрактальною множиною, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої задовольняє рівняння

$$q^x_{|\nu-1|}(1+q^x_\nu)=1, \tag{7}$$

зокрема при $q_0=q_1=\frac{1}{2}$

$$\alpha_0(S_\xi)=1-\log_2(\sqrt{5}-1).$$

Доведення. 1. Стохастична матриця 2×2 не може мати більше двох нулів. Якщо $\|p_{ik}\|$ має два нулі, то очевидно, що атомами розподілу ξ є точки:

$$\begin{cases} x_1=\Delta_{0(1)} \text{ і } x_2=\Delta_{(1)}, & \text{якщо } p_{01}=p_{11}=0;\\ x_3=\Delta_{1(0)} \text{ і } x_4=\Delta_{(0)}, & \text{якщо } p_{01}=p_{11}=0;\\ x_5=\Delta_{(01)} \text{ і } x_6=\Delta_{(01)}, & \text{якщо } p_{00}=p_{11}=0;\\ x_7=\Delta_{(0)} \text{ і } x_8=\Delta_{(1)}, & \text{якщо } p_{01}=p_{10}=0. \end{cases}$$

2. Нехай тепер матриця $\|p_{ik}\|$ містить лише один нуль.

2a. Якщо $p_{\nu 0}\cdot p_{\nu 1}>0$, то спектру належатимуть лише точки 0 і 1, а також ті, які містять 0 в періоді, коли $p_{01}=0$, і 1 в періоді, якщо $p_{10}=0$. В обох випадках точковий спектр еквівалентний (має ту ж потужність) множині цілих невід'ємних чисел, оскільки між ними легко встановлюється взаємо однозначна відповідність по принципу: точці x першої множини відповідає число другої, що виражає кількість нулів (відповідно 1, якщо $p_{10}=0$) в n-адичному розкладі x.

2b. Нехай $p_{\nu\nu}=0$. Очевидно, що спектр S_ξ в цьому випадку складається з точок $x\in[0;1]$, які в n-адичному розкладі не містять набору цифр $(\nu\nu)$, проте набори $(|\nu-1|\cdot|\nu-1|)$ і $(\nu|\nu-1|)$ можуть зустрічатися в будь-яких комбінаціях.

Розглянемо множину точок

$$D_1=\{\,x\colon(\alpha_{2m-1}(x)\alpha_{2m}(x))\in\{(|\nu-1|\cdot|\nu-1|),(\nu|\nu-1|)\}\,,\,m\in\mathbf{N}\,\}\,.$$

Між D_1 і $[0;1]$ легко встановлюється взаємно однозначна відповідність f, за правилом

$$x\to y\colon\beta_m(y)=\begin{cases}1, & \text{якщо } (\alpha_{2m-1}(x)\alpha_{2m}(x))=(|\nu-1|\cdot|\nu-1|),\\ 0, & \text{якщо } (\alpha_{2m-1}(x)\alpha_{2m}(x))=(\nu|\nu-1|),\end{cases}$$

де $\beta_m(y)$ — m-та двійкова цифра y. Тому D_1, а отже, і S_ξ континуальні.

Очевидно, що

$$\Delta'_{|\nu-1|}\overset{q_{|\nu-1|}}{\sim}S_\xi;\qquad \Delta'_{\nu|\nu-1|}\overset{k}{\sim}S_\xi,\quad k=q_\nu q_{|\nu-1|},$$

і

$$S_\xi=\Delta'_{|\nu-1|}\cup\Delta'_{\nu|\nu-1|}.$$

Тому спектр S_ξ є самоподібною множиною з самоподібною розмірністю α_s, що є розв'язком рівняння (7), а при $q_0=q_1=\frac{1}{2}$ $\alpha_s=1-\log_2(\sqrt{5}-1)$. Оскільки ж вона є дробовим числом, то S_ξ є фракталом. Теорему 2 доведено. □

Наслідок. *При $n=|Q|=2$ розподіл ξ не може мати N-самоподібного спектра.*

Теорема 3. *Якщо $n = |Q| = 3$ і матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить тільки один нуль, причому*

1. $p_{\tau\tau} = 0$, *то S_ξ є самоподібною множиною, розмірність якої задовольняє рівняння*
$$(q_{c1}^x + q_{c2}^x)(1 + q_\tau^x) = 1,$$
де
$$\{c_1; c_2\} = \{0; 1; 2\} \setminus \{\tau\};$$
2. $p_{\tau\nu} = 0$, $(\tau \neq \nu)$, *то спектр S_ξ є N-самоподібним і його розмірність задовольняє рівняння*
$$q_c^x + q_\tau^x + q_\nu^x - (q_\nu q_\tau)^x = 1,$$
де
$$\tau \neq c \neq \nu.$$

Доведення. Справедливість твердження 1 слідує з того, що
$$\begin{cases} S_\xi = \Delta'_{c_1} \cup \Delta'_{c_2} \cup \Delta'_{\tau c_1} \cup \Delta'_{\tau c_2}, \\ \Delta'_c \overset{q_c}{\sim} S_\xi, \\ \Delta'_{\tau c} \overset{q_\tau q_c}{\sim} S_\xi, \; c \in \{c_1; c_2\}. \end{cases}$$

Справедливість твердження 2 випливає з співвідношень
$$\begin{cases} S_\xi = \Delta'_\nu \cup \Delta'_c \cup \left[\bigcup_{m=1}^\infty \Delta'_{\underbrace{\tau \ldots \tau}_{m} c}\right], \\ \Delta'_\nu \overset{q_m}{\sim} S_\xi, \\ \Delta'_c \overset{q_c}{\sim} S_\xi, \\ \Delta'_{\underbrace{\tau \ldots \tau}_{m} c} \overset{k}{\sim} S_\xi, \text{ де } k = q_\tau^m q_c \end{cases}$$
і означення N-самоподібної розмірності. Теорема 3 доведена. □

Наслідок. *При виконанні умов теореми і $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ матимемо:*

1. $\alpha_0(S_\xi) = \log_3(\sqrt{3} + 1)$ *у випадку 1),*
2. $\alpha_0(S_\xi) = \log_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ *у випадку 2).*

Лема 4. *Якщо $n = |Q| = 3$ і матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ має рівно два нулі, причому вони знаходяться на головній діагоналі (нехай $p_{\tau\tau} = p_{ss} = 0$), то спектр розподілу в.в. ξ є N-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якого задовільняє рівняння*
$$q_\nu^x(1 + q_\tau^x + q_s^x + q_\tau^x q_s^x) + q_\tau^x q_s^x - 1 = 0. \tag{8}$$

Доведення. Нехай $\nu = \{0, 1, 2\} \setminus \{\tau, s\}$. Тоді
$$\Delta'_\nu \overset{q_\nu}{\sim} S_\xi;$$
$$\Delta'_{\underbrace{\tau s \tau s \ldots \tau s}_{2k} \nu} \cong \Delta'_{\underbrace{s \tau s \tau \ldots s \tau}_{2k} \nu} \overset{q_\nu q_\tau^k q_s^k}{\sim} S_\xi \quad \forall k \in \mathbf{N};$$
$$\Delta'_{\underbrace{\tau s \tau s \ldots \tau s}_{2k} \tau \nu} \overset{q_\nu q_\tau^{k+1} q_s^k}{\sim} S_\xi \text{ і } \Delta'_{\underbrace{s \tau s \tau \ldots s \tau}_{2k} s \nu} \overset{q_\nu q_\tau^k q_s^{k+1}}{\sim} S_\xi \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Причому

$$S_\xi = \Delta'_\nu \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{\tau s \tau s \ldots \tau s}_{2k} \nu}\right] \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{s \tau s \tau \ldots s \tau}_{2k} \nu}\right] \cup \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{\tau s \tau s \ldots \tau s}_{2k} \tau \nu}\right]$$
$$\cup \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{s \tau s \tau \ldots s \tau}_{2k} s \nu}\right].$$

Таким чином, S_ξ — N-самоподібна множина і її самоподібна розмірність задовольняє рівняння

$$q_\nu^x + 2q_\nu^x \sum_{k=1}^{\infty} (q_\tau q_s)^{kx} + q_\nu^x q_\tau^x \sum_{k=0}^{\infty} (q_\tau q_s)^{kx} + q_\nu^x q_s^x \sum_{k=1}^{\infty} (q_\tau q_s)^{kx} = 1,$$

яке рівносильне

$$q_\nu^x \left[1 + \frac{1}{1 - q_\tau^x}(2q_\tau^x q_s^x + q_\tau^x + q_s^x)\right] = 1$$

і рівнянню (8).

Рівняння (8) має єдиний розв'язок серед чисел (0;1), якими б q_τ, q_s, q_ν не були ($q_i > 0$, $q_\tau + q_s + q_\nu = 1$). Окільки ж N-самоподібна розмірність спектра співпадає з розмірністю Хаусдорфа–Безиковича, то S_ξ — фрактал. Лема 4 доведена. □

Наслідок. *При виконанні умов леми і* $q_0 = q_1 = q_2 = 3^{-1}$

$$\alpha_0(S_\xi) = \log_3(\sqrt{2} + 1).$$

Лема 5. *Якщо* $n = |Q| = 3$ *і матриця перехідних ймовірностей* $\|p_{ik}\|$ *має рівно два нулі, причому в одному рядку, то*

1. *розподіл в.в.* ξ *є сумішшю дискретного і сингулярного, а його спектр* S_ξ — *майже самоподібною множиною, якщо жоден з нулів не міститься на головній діагоналі. При цьому розмірність Хаусдорфа–Безиковича* S_ξ *задовольняє рівняння:*
$$q_s^x + q_\nu^x = 1, \tag{9}$$
де $p_{\tau\nu} = p_{\tau s} = 0$ *і* $\{\nu, \tau, s\} = \{0; 1; 2\}$.
2. *розподіл в.в.* ξ *є сингулярним розподілом канторівського типу із самоподібним спектром* S_ξ, *розмірність якого задовольняє рівняння:*
$$q_\nu^x + q_\tau^x + q_\tau^x q_\nu^x = 1,$$
де $p_{\tau\tau} = p_{\tau s} = 0$, $\{\nu, \tau, s\} = \{0; 1; 2\}$.

Доведення. 1. З $p_{\tau\nu} = p_{\tau s} = 0$ слідує, що $p_{\tau\tau} = 1$ і

$$\begin{cases} \Delta'_i \overset{q_i}{\sim} S_\xi, \ i \in \{s, \tau\}, \\ S_\xi = \Delta'_\nu \cup \Delta'_s \cup \{\Delta_{(\tau)}\}. \end{cases}$$

Звідки випливає, що S_ξ — майже самоподібна множина і її самоподібна розмірність (а отже, і розмірність Хаусдорфа–Безиковича) задовольняє рівняння (9).

2. З $p_{\tau\tau} = p_{\tau s} = 0$ слідує, що $p_{\tau\nu} = 1$ і

$$\begin{cases} \Delta'_i \overset{q_i}{\sim} S_\xi, \ i \in \{s, \tau\}, \\ \Delta'_{\tau\nu} \overset{q_\tau q_\nu}{\sim} S_\xi, \\ S_\xi = \Delta'_\nu \cup \Delta'_s \cup \Delta_{\tau\nu}. \end{cases}$$

Звідки і випливає твердження 2. Лема 5 доведена. □

Лема 6. *Якщо $n = |Q| = 3$ і матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ має рівно два нулі, причому в одному стовпчику, але в такому, що рядок з номером цього стовпця має нуль, тобто $p_{s\tau} = p_{\tau\tau} = 0$ і $\{\tau, s, \nu\} = \{0;1;2\}\setminus\{\tau, s\}$, то спектр S_ξ розподілу в.в. ξ є N-самоподібною множиною з розмірністю, що є додатним розв'язком рівняння:*

$$q_s^x + q_\nu^x(q_s^x + q_\tau^x) = 1. \tag{10}$$

Доведення. З умов леми слідує

$$\begin{cases} \Delta'_\nu \overset{q_\nu}{\sim} S_\xi, \\ \Delta'_{\underbrace{s\ldots s}_{m}\nu} \overset{k'_m}{\sim} S_\xi, \quad \text{де } k'_m = q_\nu q_s^m, \ \forall m \in \mathbf{N}, \\ \Delta'_{\tau\underbrace{s\ldots s}_{m}\nu} \overset{k''_m}{\sim} S_\xi, \quad \text{де } k''_m = q_\tau q_\nu q_s^{m-1}, \ \forall m \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

причому

$$S_\xi = \Delta'_\nu \cup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{s\ldots s}_{m}\nu}\right] \cup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta'_{\tau\underbrace{s\ldots s}_{m}\nu}\right].$$

Отже, S_ξ — N-самоподібна множина і її самоподібна розмірність задовольняє рівняння

$$q_\nu^x + q_\nu^x \sum_{m=1}^{\infty} q_s^m + q_\nu^x q_\tau^x \sum_{m=0}^{\infty} q_s^m = 1,$$

яке рівносильне рівнянню (10). Лема 6 доведена. □

Наслідок. *Якщо $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, то $\alpha_0(S_\xi) = \frac{1}{2}$.*

Лема 7. *Якщо $n = |Q| = 3$ і матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ має рівно два нулі, причому в одному стовпчику, номер якого співпадає з номером рядка вільного від нулів, тобто $p_{\tau\nu} = p_{s\nu} = 0$ і $p_{\nu k} > 0$, $k \in \{0,1,2\}$, $\tau \neq s \neq \nu \neq \tau$, то спектр S_ξ розподілу в.в. ξ є генетично самоподібною множиною з розмірністю, яка є розв'язком рівняння:*

$$q_j^{2x}(q_\tau^x + q_s^x) = 1, \quad \text{де } q_j = \max\{q_\tau, q_s\}. \tag{11}$$

Доведення. Генетична самоподібність спектра випливає безпосередньо з

$$\begin{cases} S_\xi = \Delta'_\nu \cup \Delta'_{\tau\tau} \cup \Delta'_{ss} \cup \Delta'_{\tau s} \cup \Delta'_{s\tau}, \\ \Delta'_\nu \overset{q_\nu}{\sim} S_\xi, \\ \Delta'_{\tau\tau}, \Delta'_{ss}, \Delta'_{\tau s}, \Delta'_{s\tau} \text{— самоподібні множини;} \end{cases}$$

а висновок про розмірність слідує з леми 3.1 [1, с. 30] та властивості розмірності поглинати меншу. Лема 7 доведена. □

Лема 8. *Якщо $n = |Q| = 3$ і матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить рівно два нулі, причому вони містяться в різних стовпцях, то розподіл в.в. ξ є сингулярним розподілом канторівського типу з N-самоподібним спектром S_ξ, розмірність Хаусдорфа–Безковича якого задовольняє*

1. *якщо $p_{\tau\tau} = p_{\nu s} = 0$*

$$q_s^x\left[1 + \frac{q_\tau^x}{1 - q_\nu^x} + \frac{q_\tau^{2x} q_\nu^x}{1 - q_\nu^x q_\tau^x}\right] = 1;$$

2. *якщо* $p_{\tau\nu} = p_{\nu s} = 0$, *де* $\{\tau, \nu, s\} = \{0, 1, 2\}$
$$q_s^x\,(1 + q_\tau^x q_\nu^x) + q_\tau^x = 1.$$

Доведення. 1. Якщо $p_{\tau\tau} = p_{\nu s} = 0$, то

$$\begin{cases} \Delta'_s \overset{q_s}{\sim} S_\xi; \\ \Delta'_{\underbrace{\nu\ldots\nu}_{m}\tau s} \overset{k}{\sim} S_\xi, & \text{де } k = q_\tau q_\nu^m q_s,\ m = 0, 1, \ldots; \\ \Delta'_{\underbrace{\tau\nu\ldots\tau\nu}_{2m}\tau s} \overset{k}{\sim} S_\xi, & \text{де } k = q_\nu^{m+1} q_\tau^m q_s,\ m = 0, 1, \ldots; \end{cases}$$

і

$$S_\xi = \Delta'_s \cup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{\nu\ldots\nu}_{m}\tau s}\right] \cup \left[\bigcup_{m=0}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{\tau\nu\ldots\tau\nu}_{2m}\tau s}\right],$$

звідки слідує твердження 1.

2. Якщо $p_{\tau\nu} = p_{\nu s} = 0$, то

$$\begin{cases} \Delta'_s \overset{q_s}{\sim} S_\xi; \\ \Delta'_{\underbrace{\tau\ldots\tau}_{m}s} \overset{k}{\sim} S_\xi, & \text{де } k = q_\tau^m q_s; \\ \Delta'_{\nu\underbrace{\tau\ldots\tau}_{m}s} \overset{k}{\sim} S_\xi, & \text{де } k = q_\nu q_\tau^{m+1} q_s,\ m = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

$$S_\xi = \Delta'_s \cup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta'_{\underbrace{\tau\ldots\tau}_{m}s}\right] \cup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta'_{\nu\underbrace{\tau\ldots\tau}_{m}s}\right],$$

звідки слідує твердження 2. Лему 8 доведено. □

Література

1. А. Ф. Турбин, М. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, "Наукова думка", Киев, 1992.
2. М. В. Працьовитий, *Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова*, Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій, математики АН України, Київ, 1994, стор. 245–254.
3. ———, *Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра*, Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи, Институт математики АН Украины, Киев, 1992, стр. 77–83.

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М. П. ДРАГОМАНОВА, КИЇВ

Надійшла 15/09/1998